



# ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ИНФОРМАТИКИ

8 класс

# Ключевые слова

- алгебра логики
- высказывание
- логическая операция
- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание
- логическое выражение
- таблица истинности
- законы логики



# Логика



**Аристотель** (384-322 до н.э.).  
Основоположник формальной логики (понятие, суждение, умозаключение).



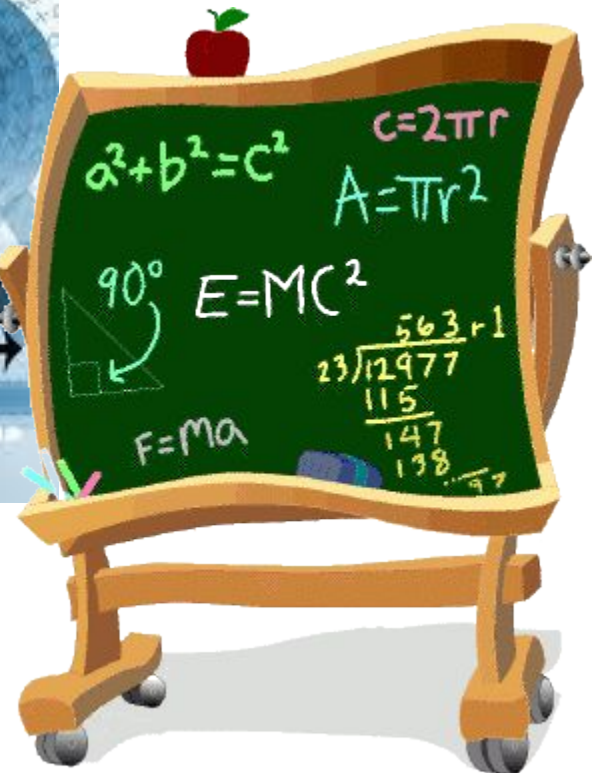
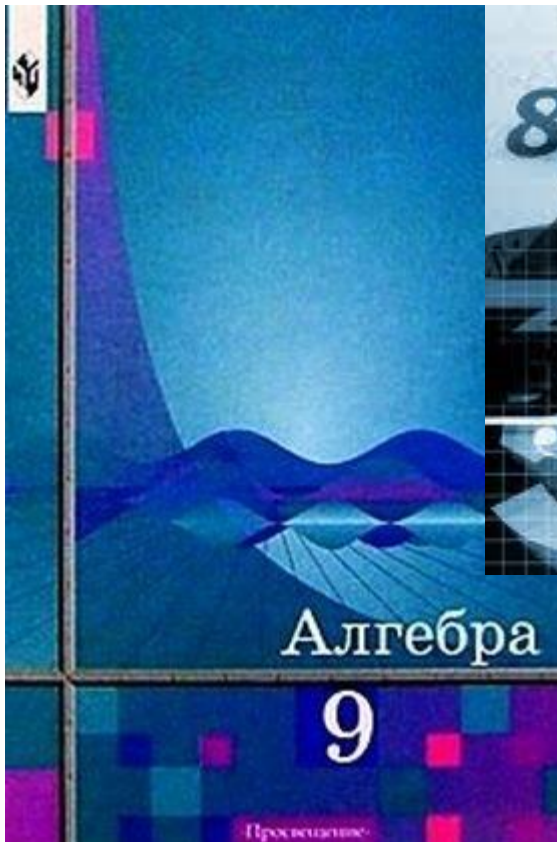
**Джордж Буль** (1815-1864). Создал новую область науки - Математическую логику (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).



**Клод Шеннон** (1916-2001). Его исследования позволили применить алгебру логики в вычислительной технике

# Алгебра

**Алгебра** - наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами – числами, многочленами, векторами и др.



# Высказывание

**Высказывание** - это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

*Земля вращается вокруг Солнца.  
Москва - столица.*

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

*Это высказывание ложное.*

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

*Без стука не входите!  
Откройте учебники.  
Ты выучил стихотворение?*

# Высказывание или нет?

✓ Зимой идет дождь.

✓ Снегири живут в Крыму.

Кто к нам пришел?

✓ У треугольника 5 сторон.

Как пройти в библиотеку?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание

# Алгебра логики

**Алгебра логики** определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей ( **$A = 1$** ), а если ложно - нулём ( **$B = 0$** ).

**0** и **1** называются **логическими значениями**.

# Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется **простым**, если никакая его часть сама не является высказыванием.

**Сложные** (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Название логической операции	Логическая связка
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»
Инверсия	«не»; «неверно, что»



# Логические операции

**Конъюнкция** - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

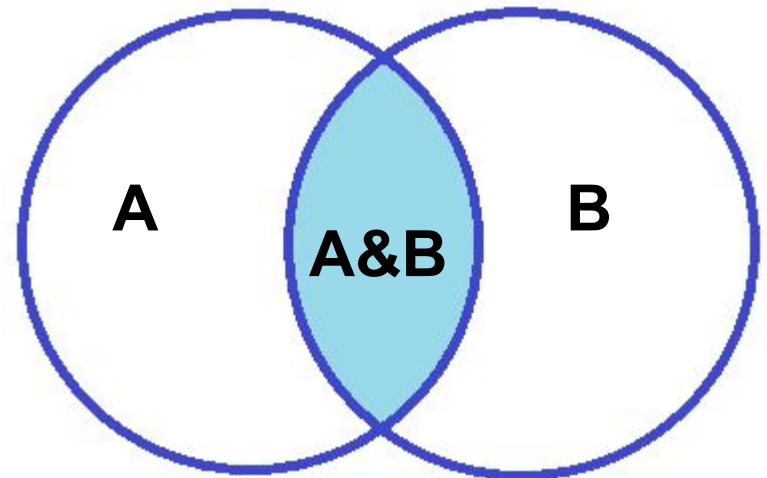
Другое название: **логическое умножение**.

Обозначения:  $\wedge$ ,  $\times$ ,  $\&$ , И.

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление



# Логические операции

**Дизъюнкция** - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

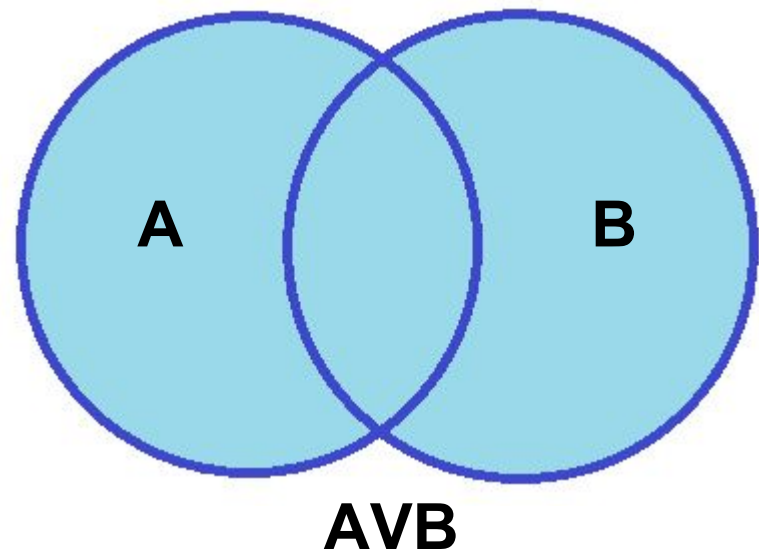
Другое название: **логическое сложение**.

Обозначения:  **$\vee$ ,  $|$ , ИЛИ,  $+$** .

Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



# Логические операции

**Инверсия** - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

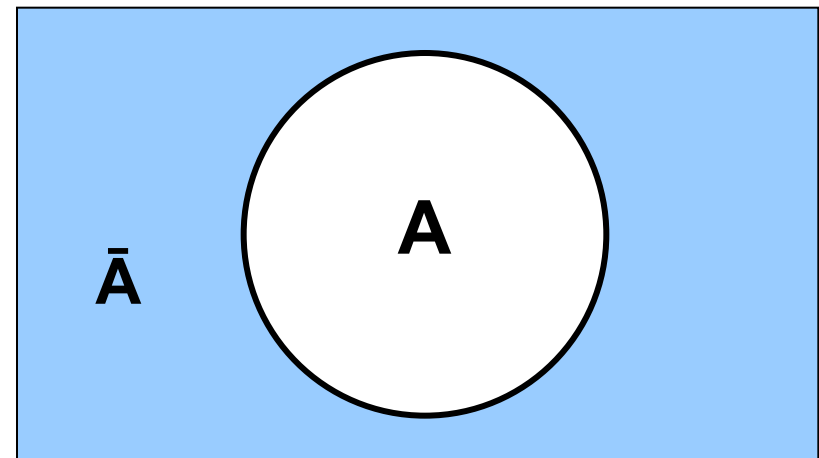
Другое название: **логическое отрицание**.

Обозначения: **НЕ**,  $\neg$ ,  $\bar{\phantom{A}}$ .

Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Графическое представление



Логические операции имеют следующий приоритет:  
**инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.**

# Решаем задачу

Пусть  $A$  = «На Web-странице встречается слово "крейсер"»,  $B$  = «На Web-странице встречается слово "линкор"».

В некотором сегменте сети Интернет 5000000 Web-страниц. В нём высказывание  $A$  истинно для 4800 страниц, высказывание  $B$  - для 4500 страниц, а высказывание  $AVB$  - для 7000 страниц.

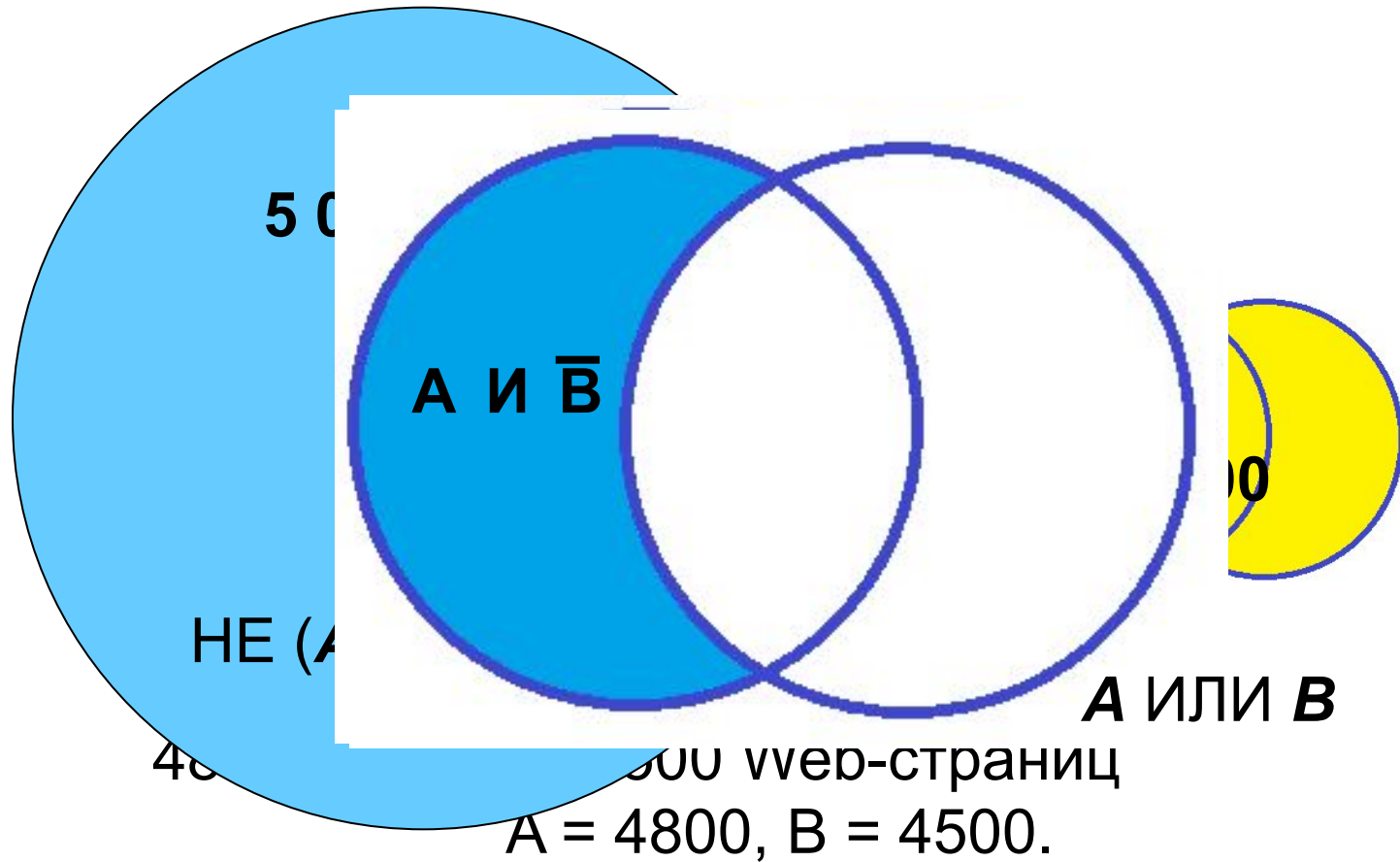
Для какого количества Web-страниц в этом случае будут истинны следующие выражения и высказывание?

а) **НЕ (A ИЛИ B)**;

б) **A & B**;

в) *На Web-странице встречается слово "крейсер" И НЕ встречается слово "линкор"*.

Представим условие задачи графически:



Сегмент Web-страниц  
 $500 + 7000 - 4900 = 2600$  веб-страниц **НЕ (A и B)**  
**И НЕ** встречается слово "линкор"  
 $9300 - 7000 = 2300$  Web-страниц **A&B**

# Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать  $n$  - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки:  $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

# Пример построения таблицы ИСТИННОСТИ

$$A \vee A \& B$$

$$n = 2, m = 2^2 = 4.$$

Приоритет операций:  $\&$ ,  $\vee$

$A$	$B$	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

# Свойства логических операций

## Законы алгебры-логики

Закон исключения  
третьего

$$A \& \bar{A} = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

Закон повторения

$$A \& A = A$$

$$A \vee A = A$$

Законы операций  
с 0 и 1

$$A \& 0 = 0; A \& 1 = A$$

$$A \vee 0 = A; A \vee 1 = 1$$

Законы общей  
инверсии

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$



# Доказательство закона

Распределительный закон для логического сложения:

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C).$$

A	B	C	B&C	$A \vee (B \& C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Учитывая, что  $(A \vee B) \& (A \vee C)$  и  $A \vee (B \& C)$  имеют одинаковые значения, доказывает распределительный закон.

# Решение логических задач

**Задача.** Коля, Вася и Серёжа гостили летом у бабушки. Однажды один из мальчиков нечаянно разбил любимую бабушкину вазу.

На вопрос, кто разбил вазу, они дали такие ответы:

**Серёжа:** 1) Я не разбивал. 2) Вася не разбивал.

**Вася:** 3) Серёжа не разбивал. 4) Вазу разбил Коля.

**Коля:** 5) Я не разбивал. 6) Вазу разбил Серёжа.

Бабушка знала, что один из её внуков (правдивый), оба раза сказал правду; второй (шутник) оба раза сказал неправду; третий (хитрец) один раз сказал правду, а другой раз - неправду. Назовите имена правдивого, шутника и хитреца.

Кто из внуков разбил вазу?



**Решение.** Пусть  $K$  = «Коля разбил вазу»,  
 $V$  = «Вася разбил вазу»,  
 $C$  = «Серёжа разбил вазу».

Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

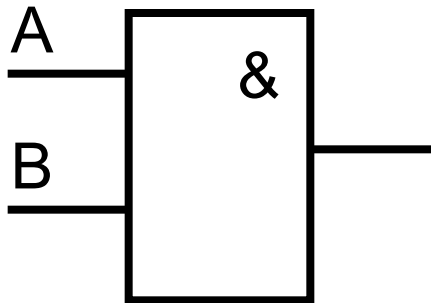
K	V	C	Утверждение Серёжи		Утверждение Васи		Утверждение Коли	
			$\overline{C}$	$\overline{V}$	$\overline{C}$	K	$\overline{K}$	C
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0

Исходя из того, что знает о внуках бабушка, следует искать в таблице строки, содержащие в каком-либо порядке три комбинации значений: 00, 11, 01 (или 10). Это первая строка.

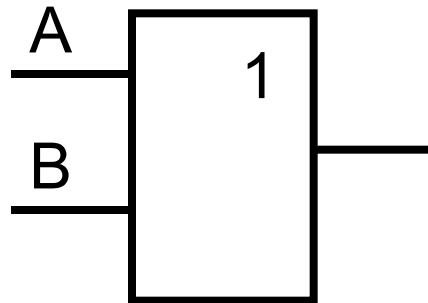
Вазу разбил Серёжа, он - хитрец. Шутником оказался Вася. Имя правдивого внука - Коля.

# Логические элементы

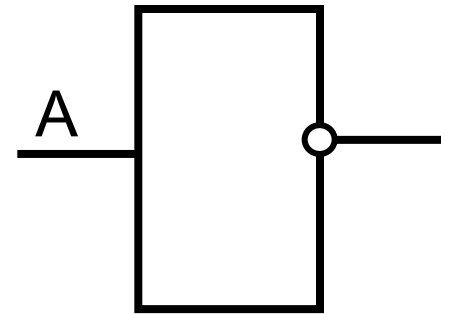
**Логический элемент** – устройство, которое после обработки двоичных сигналов выдаёт значение одной из логических операций.



**И** (конъюнктор)



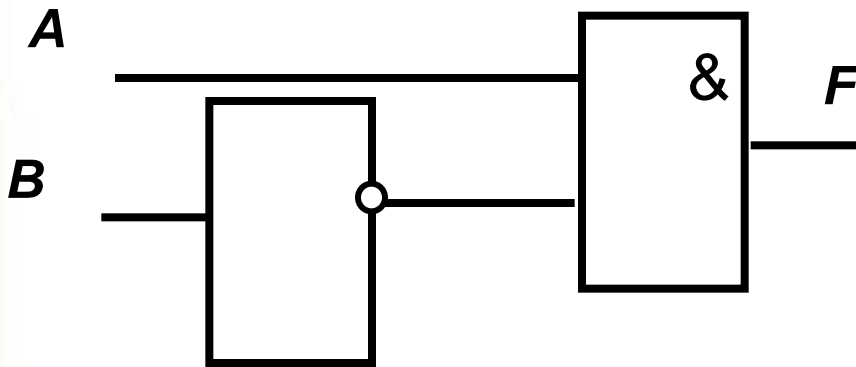
**ИЛИ** (дизъюнктор)



**НЕ** (инвертор)

# Анализ электронной схемы

**Решение.** Все возможные комбинации сигналов на входах **A** и **B** в таблице будут выходы истинности. Проследим преобразование каждой пары сигналов при прохождении их через логические элементы и запишем полученный результат в таблицу. Заполненная таблица истинности полностью описывает рассматриваемую электронную схему.



<b>A</b>	<b>B</b>	<b>F</b>
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

В инвертор поступает сигнал от входа **B**.

В конъюнктор поступают сигналы от входа **A** и от инвертора. Таким образом,  $F = A \& \bar{B}$ .



# Вопросы и задания

В следующих высказываниях выделите простые  
 Объясните, почему следующие предложения не  
 являются высказываниями.

Зачем идти к компьютеру, если на выходе электронной  
 Пусть  $A =$  «Ане нравятся уроки математики», а  $B =$   
 как она будет выглядеть? Какое отношение имеет к логическим  
 «Ане, какого цвета у тебя волосы?» Выразите следующие  
 высказывания в логическом виде, где сидит фазан,  
 формулы на обычном языке.

- 3) Число  $x$  не превосходит единицы.
- 2) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
- 4) В натуральном числе оканчивается цифрой 0, не
- 3) Не
- 1)  $A \& B$ ; 2)  $\bar{A} \& B$ ; 3)  $A \& \bar{B}$ ; 4)  $A \vee B$ ; 5)  $A \vee \bar{B}$ ; 6)  $\bar{A} \vee \bar{B}$ ; 7)  $\neg(A \& B)$ ; 8)  $\overline{(A \vee B)}$ ; 9)  $(A \& B)$ .

- 5) Эта тема скучна.
  - 6) Коля решил все задания контрольной работы.
  - 7) В каждой школе некоторые ученики интересуются
  - 8) В уроке математики старшеклассники отвечали на
  - 9) Некоторые еляки питаются исключительно
- работу.

# Вопросы и задания

Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый из них высказал по два предположения. На основании каждого из подозреваемых сделал два заявления:

1) **Алёша:** «Я не делал этого, Браун и Смит сделали это в V веке».  
**Джон:** «Браун не виновен. Смит сделал это».

2) **Боря:** «Этот сосуд финикийский и изготовлен в III веке».  
**Браун:** «Я не делал этого. Джон не делал этого».

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий один раз солгал, один раз сказал правду.

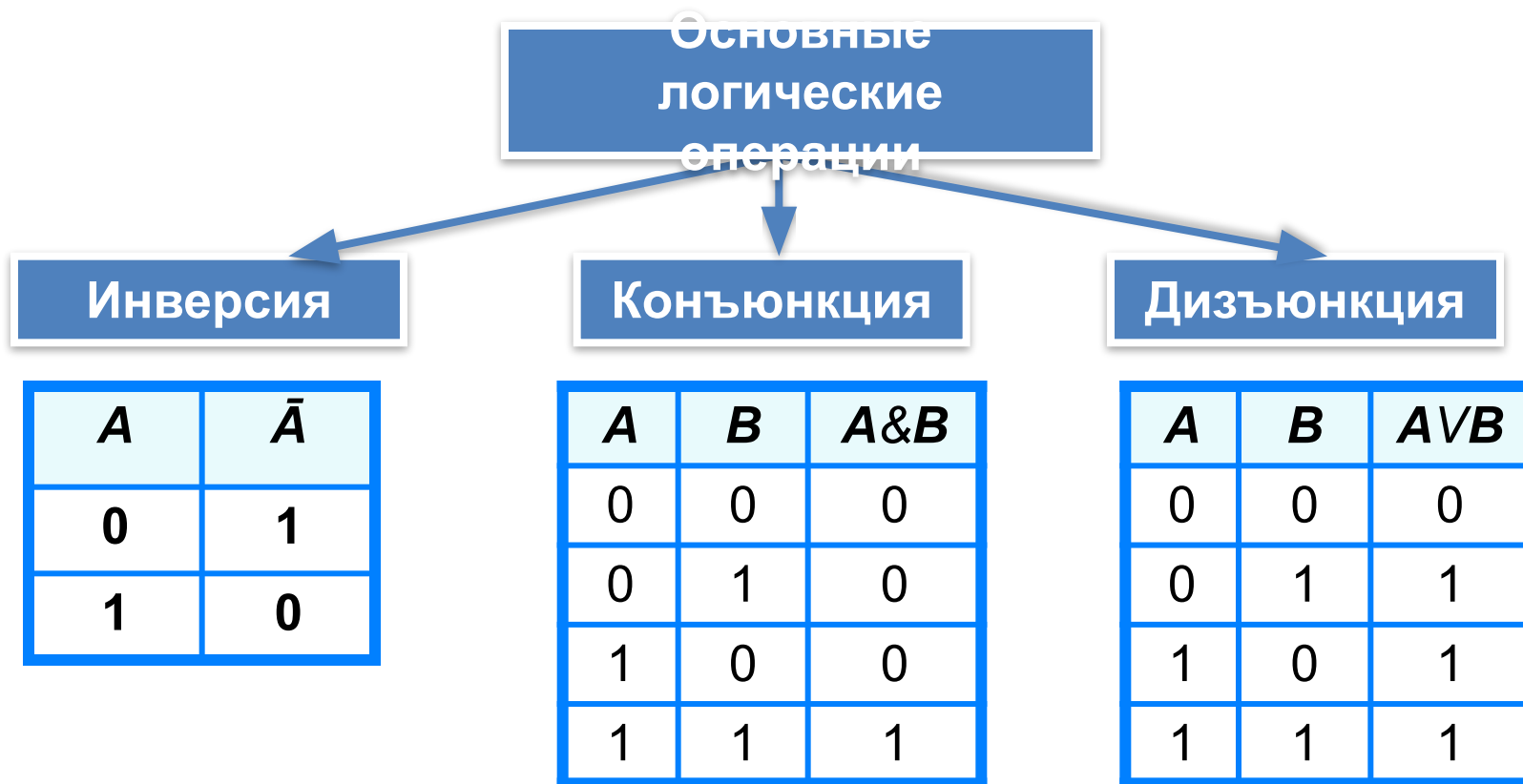
3) **Гриша:** «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?



# Опорный конспект

*Высказывание – это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.*



*Приоритет выполнения логических операций:  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ .*

# Электронные образовательные ресурсы

1. <http://school-collection.edu.ru/catalog/res/9e997f40-f285-4369-aa7d-88b892beca45/?interface=catalog&class=51&subject=19> – Элементарные логические операции