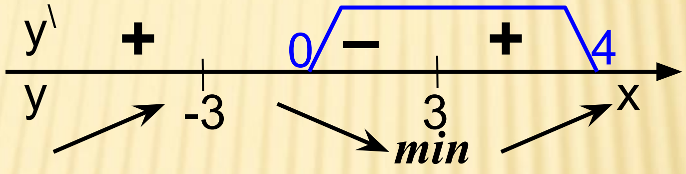
Наибольшее и наименьшее значение функции.

Работу выполнила:
Козачёк Л.П.
учитель математики

Алгоритм решения задач

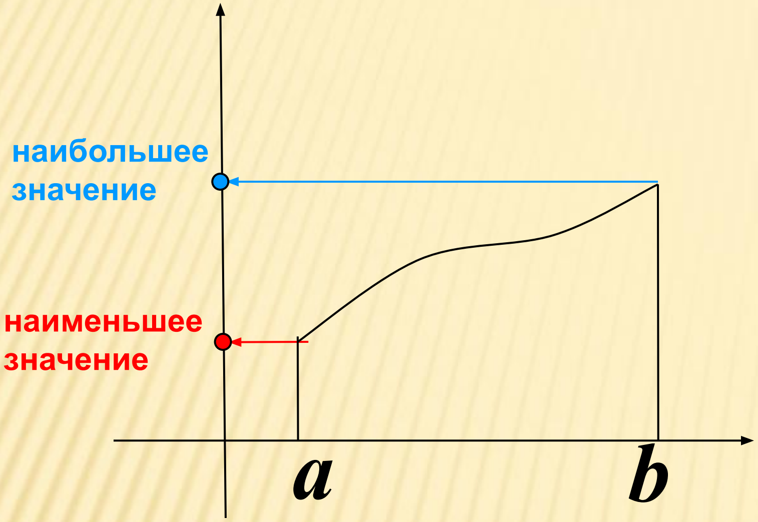
Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 – 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f^{/}(x)$	1) $y^{/} = 3x^2 – 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y^{/} = 3x^2 – 27 = 3(x^2 – 9) = 3(x \overset{3}{–} 3)(x \overset{-3}{+} 3)$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = –3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = \boxed{0}$ $y(4) = 4^3 – 27 \cdot 4 = \boxed{– 44}$ $y(3) = 3^3 – 27 \cdot 3 = \boxed{–54}$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	**В 11** - 5 4

Другой способ решения

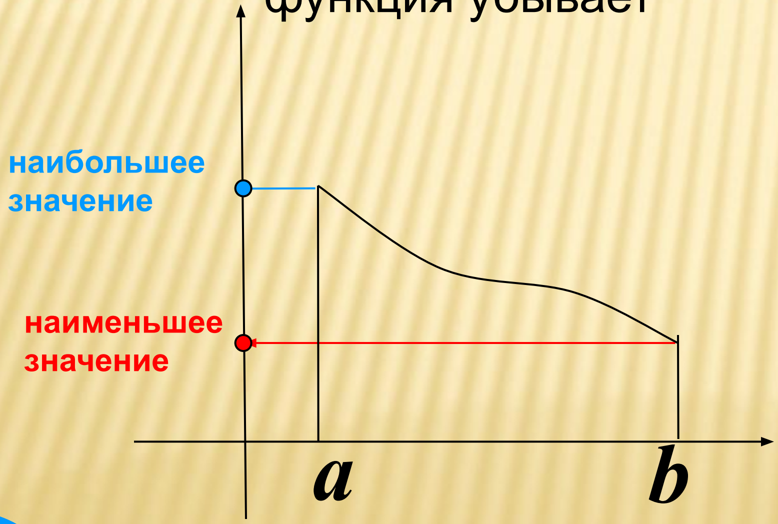
Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 – 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f^{/}(x)$	1) $y^{/} = 3x^2 – 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y^{/} = 3x^2 – 27 = 3(x^2 – 9) = 3(\overset{3}{x – 3})(\overset{-3}{x + 3})$ 
3. Вычислить значения функции в критических точках ~~и на концах отрезка.~~	3) $y(3) = 3^3– 27 \cdot 3 = –54$
~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее~~	**В 11** - 5 4 **Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным.**

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

функция возрастает



функция убывает



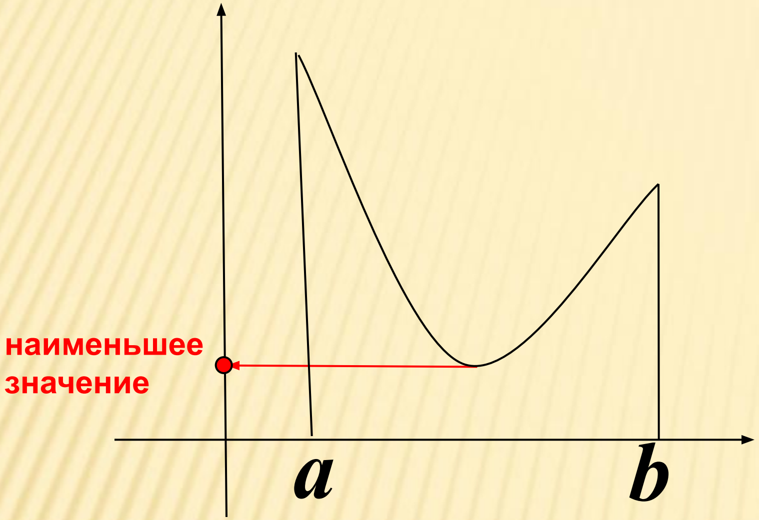
Предположим, что функция f не имеет на отрезке [a; b] критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

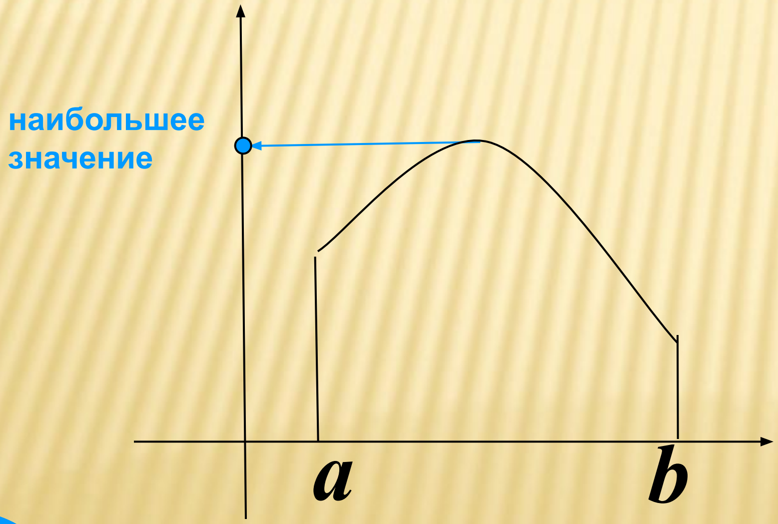
Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a; b] — это значения в концах a и b.

Предположим, что функция f имеет на отрезке [a; b] **одну** точку экстремума.



Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.



Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.

Сложная функция

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ – функция, представленная как композиция нескольких функций. **Сложная функция** – функция от функции.

Сложная функция $u(v(x))$ представлена в виде цепочки простых функций. $v(x)$ – промежуточный аргумент, x – независимая переменная.

Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.

$$[u(v(x))]^{/} = u^{/}(v(x)) \cdot v^{/}(x)$$

Чтобы **найти производную сложной функции**, нужно:

1. Определить, какая функция является внешней и найти по таблице производных соответствующую производную.

2. Определить промежуточный аргумент.

Функция квадратного корня

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Показательная функция

$$y = 2^{x^2 + 2x + 5}$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Логарифмическая функция

$$y = \log_5\left(4 - 2x - x^2\right) + 3$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Степенная функция

$$y = \sin^4 x$$

Функция промежуточного аргумента – тригонометрическая функция sinx

1. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} – 6e^{x} + 3$ на отрезке [1; 2]

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(1) = e^{2} – 6e + 3$; $y(2) = e^{4} – 6e^{2} + 3$

2) $y^{/} = \quad – 6e^{x} + \boxed{0} = 2e^{x}(e^{x} – 3)$

$>$
0

$$[u(v)]^{/} = u^{/}(v) \cdot v^{/}$$

$(e^{2x})^{/} = e^{2x} \cdot (2x)^{/} = e^{2x} \cdot 2 = \mathbf{2e^{2x}}$

$\neq 0$

$(e^{x})^{/} = e^{x}$

$(kx)^{/} = k$

$(C)^{/} = 0$

1) производная
для внешней функции: $(e^{x})^{/} = e^{x}$

$2e^{x}(e^{x} – 3) = 0$

$e^{x} – 3 = 0$

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума.
Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Проверим, принадлежит ли x=ln3 промежутку [1; 2]

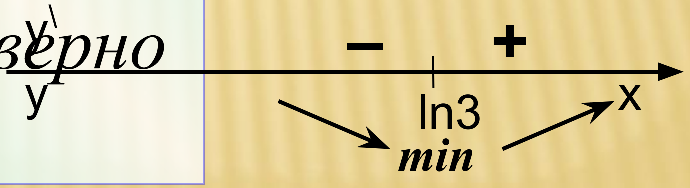
$$1 \le \ln 3 \le 2$$

$$\ln e \le \ln 3 \le \ln e^{2}$$

$$e \le 3 \le e^{2} \quad \textit{верно}$$

$$e \approx 2,7$$

$x = \ln 3 \in [1; 2]$



Найдем значение функции в критической точке.

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 9 - 6 \cdot 3 + 3 = -6$$

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$

D(y): $5-4x-x^2 \geq 0$

$$f'(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

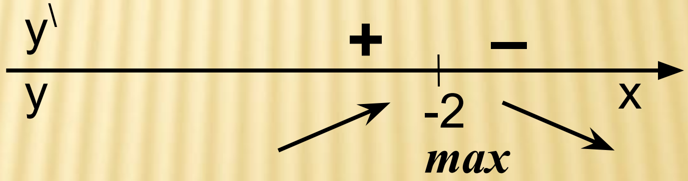
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{5-4x-x^2}}\cdot\left(5-4x-x^2\right)'=$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$$=\frac{1}{2\sqrt{5-4x-x^2}}\;\frac{\overset{-2(2+x)}{\cancel{(-4-2x)}}}{2\sqrt{5-4x-x^2}}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

$x=-2 \in D(y)$



Наибольшее значение функция примет в точке максимума.

$$y(-2)=\sqrt{5-4\cdot(-2)-(-2)^2}=\sqrt{5+8-4}=\sqrt{9}=3$$

В 14 **3**

При решении некоторых заданий на вычисление наибольшего и наименьшего значений функции можно найти ответ и без вычисления производной.

Сложная функция $f(g(x))$ представлена в виде цепочки простых функций.
Где g(x) – промежуточный аргумент, квадратичная функция

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

Если внешняя функция является монотонно возрастающей на всей области определения, значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция будет иметь наибольшее значение.

А наименьшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция будет иметь наименьшее значение.

Рассмотрим примеры.

2 способ

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $5 - 4x - x^2 \geq 0$

Функция квадратного корня монотонно возрастает на всей области определения, значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $-x^2 - 4x + 5$ будет иметь наибольшее значение.
Старший коэффициент квадратного трехчлена равен $-1 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. И наибольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{-4}{2*(-1)} = -2 \in D(y)$$

Итак, наибольшее значение функция квадратного корня примет, когда промежуточная квадратичная функция примет наибольшее значение, т.е. в точке $x = -2$. Вычислим его:

$$y(-2)=\sqrt{5-4\cdot(-2)-(-2)^2} = \sqrt{5+8-4} = \sqrt{9} = 3$$

В 14	**3**					

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$

D(y): $x \in R$

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

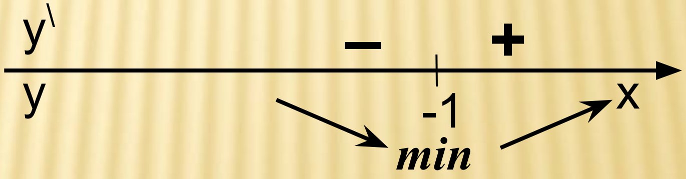
$$y' = 2^{x^2+2x+5} \ln 2 \cdot \left(x^2+2x+5\right)' =$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$$= \underset{>0}{2^{x^2+2x+5}}\ \underset{>0}{\ln 2} \cdot (2x+2)$$

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

x = - 1 ∈ D(y)



Наименьшее значение функция примет в точке минимума.

$$y(-1) = 2^{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} = 2^{1-2+5} = 2^4 = 16$$

В 14 1 6

2 способ

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $x \in R$

Показательная функция с основанием 2>1 монотонно возрастает на всей области определения. Значит, наименьшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $x^2 + 2x + 5$ будет иметь наименьшее значение.
Старший коэффициент квадратного трехчлена равен +1> 0, значит, ветви параболы направлены вверх. И наименьшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{2}{2*1} = -1 \in \text{D(y)}$$

Итак, наименьшее значение показательная функция примет, когда промежуточная квадратичная функция примет наименьшее значение, т.е. в точке x = – 1. Вычислим его:

$$y(-1) = 2^{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} = 2^{1-2+5} = 2^4 = 16$$

В 14	1	6				

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\log_5\left(4-2x-x^2\right)+3$$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $4 - 2x - x^2 > 0$

Логарифмическая функция с основанием 5 является монотонно возрастающей на всей области определения. Значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $4 - 2x - x^2$ будет иметь наибольшее значение. Старший коэффициент квадратного трехчлена равен –1<0, значит, ветви параболы направлены вниз. И наибольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

$$x_0=-\frac{-2}{2(-1)}=-1$$

$$y(-1)=\log_5\left(4-2\cdot(-1)-(-1)^2\right)+3=\log_5\left(4+2-1\right)+3=\overset{1}{\log_5 5}+3$$

$$=4$$

В 14	**4**					