

Синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника

Геометрія 8 клас

Підготувала: Голуб Г.С.,
учитель математики

Соколовобалківської загальноосвітньої школи І-ІІІ ст.
Новосанжарської районної ради Полтавської області

Елементи прямокутного трикутника

$\triangle ABC$ - прямокутний

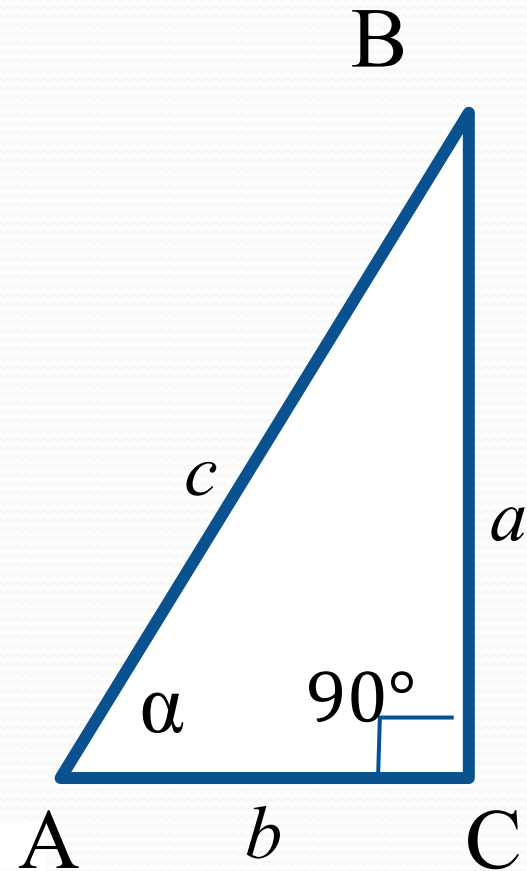
$AB = c$ - гіпотенуза

$BC = a$ і $AC = b$ - катети

α - гострий кут

BC - протилежний катет куту α

і AC - прилеглий катет



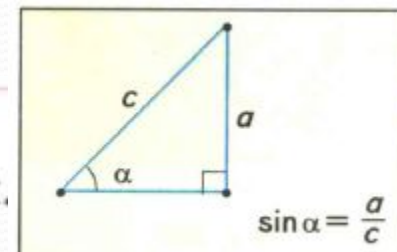
– відношення $\frac{a}{c}$ позначають $\sin \alpha$ і читають «синус альфа»;

– відношення $\frac{b}{c}$ позначають $\cos \alpha$ і читають «косинус альфа»;

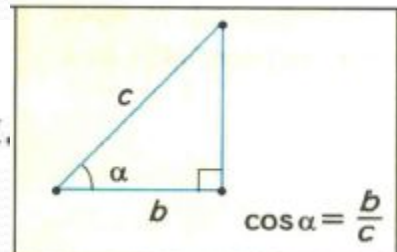
– відношення $\frac{a}{b}$ позначають $\operatorname{tg} \alpha$ і читають «тангенс альфа».

Означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника

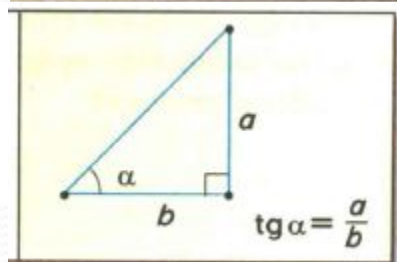
Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.



Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

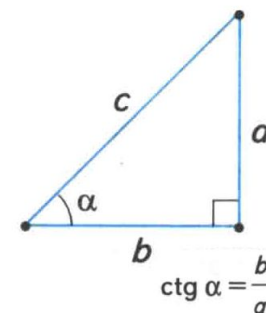


Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого катета.



Крім косинуса, синуса і тангенса кута α є ще одне відношення сторін прямокутного трикутника, яке має особливу назву — *котангенс*. Це відношення катета b , прилеглого до кута α , до протилежного катета a . Позначається: $\text{ctg } \alpha$.

Отже, $\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a}$.



Історія математики

Видатний індійський астроном і математик АРІАБХАТА

Індійський математик Аріабхата (V ст.) відношення протилежного катета до гіпотенузи назвав *ardhajya* – ардхажіа (півхорда). У XII ст. європейські вчені переклали цю назву на латинську як *sinus* – синус.



Пам'ятник Аріабхаті на території університету в Пуне

Історія математики

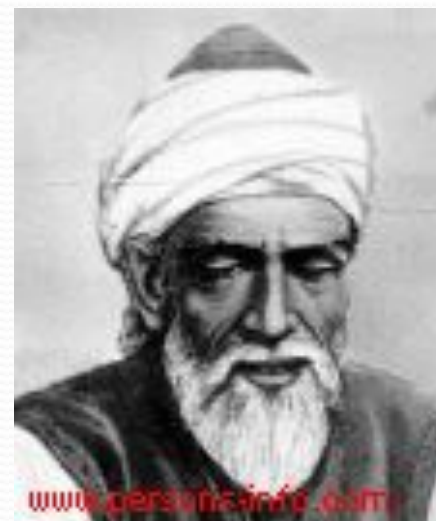
Арабські астрономи-математики ал-Баттані (858 – 929) і Абу-ль-Вефа (940 – 998) визначили поняття тангенса, вимірюючи кутову висоту Сонця за тінню від жердини. Тому відношення катета, протилежного куту α , до прилеглого катета вони називали словом «тінь». Пізніше, в XVI ст., це відношення дістало назву «тангенс».

Абу Абдаллах Мухаммад ібн Джабір ібн Сінан ал-Баттані



видатний середньовічний астроном і математик

Абу-л-Вафа Мухаммад ібн Мухаммад ібн Яхья ібн Исмаїл ібн ал-Аббас ал-Бузджані

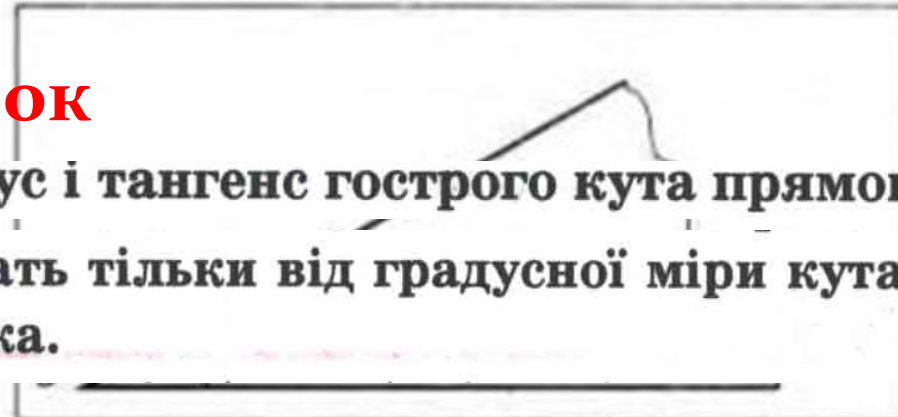


арабський астроном і математик з Хорасана

Практична робота

1. На аркуші паперу накресліть гострий кут α . Виріжте шаблон цього кута

Висновок



синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать тільки від градусної міри кута і не залежать від розмірів трикутника.

2. За допомогою виготовленого шаблону і косинця накресліть у зошиті кілька подібних прямокутних трикутників

3. Виміряйте сторони трикутників і обчисліть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ для кожного з трикутників.
4. Порівняйте значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ для кожного з трикутників. Зробіть висновок.

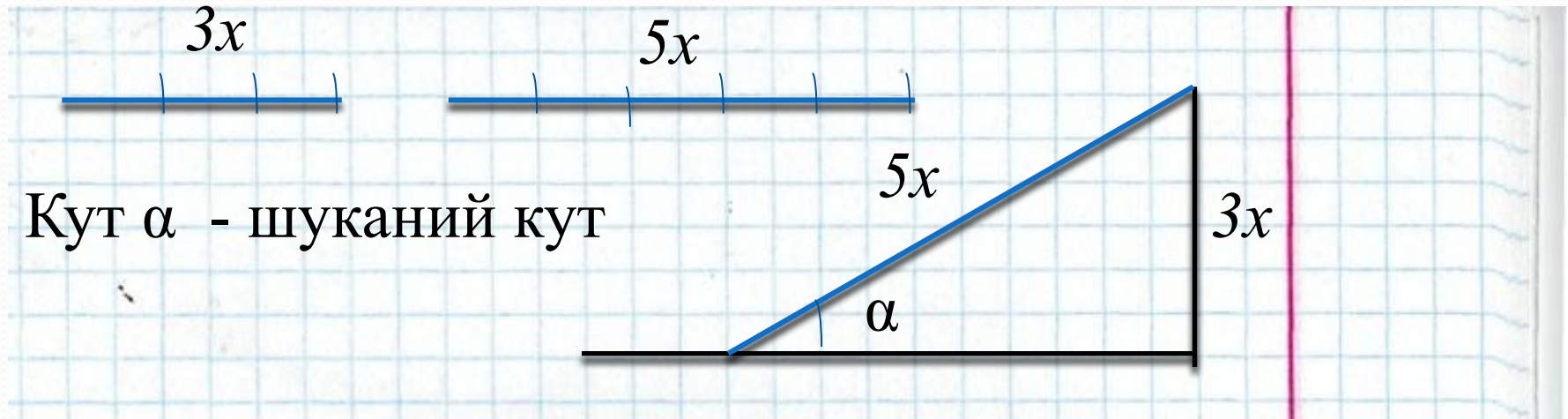


Побудова кута за його тригонометричними функціями

Задача 1. Побудувати кут, синус якого дорівнює $\frac{3}{5}$

Побудова

За допомогою довільного розхилу циркуля будуюмо два відрізки 3:5.



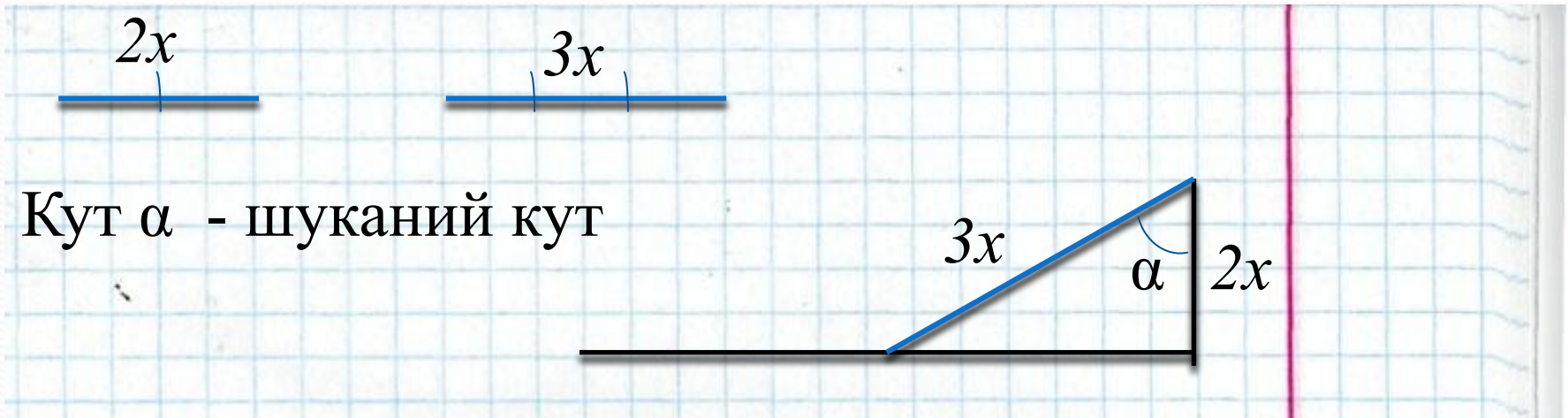
Будуємо прямокутний трикутник за даною гіпотенузою та катетом

Побудова кута за його тригонометричними функціями

Задача 1. Побудувати кут, косинус якого дорівнює $\frac{2}{3}$

Побудова

За допомогою довільного розхилу циркуля будуємо два відрізки 2:3.



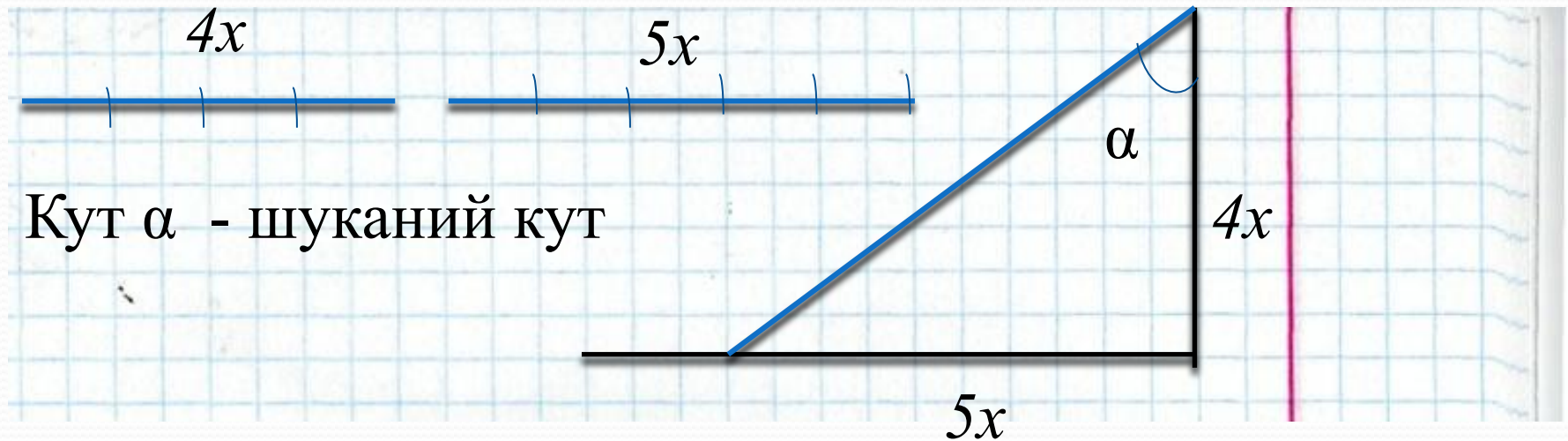
Будуємо прямокутний трикутник за даною гіпотенузою та катетом

Побудова кута за його тригонометричними функціями

Задача 1. Побудувати кут, тангенс якого дорівнює $\frac{5}{4}$

Побудова

За допомогою довільного розхилу циркуля будуюмо два відрізки 4:5.



Будуємо прямокутний трикутник за даними катетами

Розмірковуємо

1. Чи правильна нерівність $\sin \alpha > 1$? Відповідь пояснити.

2. Чи правильна нерівність $\cos \alpha > 1$? Відповідь пояснити.

3. Чи правильна нерівність $\operatorname{tg} \alpha > 1$? Відповідь пояснити.

Висновок

Значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ не може бути більше одиниці, тому, що катет завжди менший від гіпотенузи.

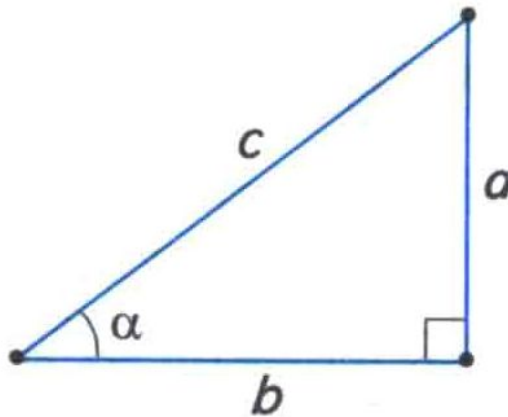
Значення $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ може бути більше одиниці і менше одиниці, тому, що катети можуть бути і менше і більше один одного.

Розв'язування вправ усно

1) За даними на малюнку назвіть: катет, прилеглий до кута α ; катет, протилежний куту α .

2) Прочитайте відношення сторін $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ і $\frac{a}{b}$, вживаючи слова «протилежний катет», «прилеглий катет», «гіпотенуза».

3) Позначте кожне з відношень $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ і $\frac{a}{b}$ знаком « $\cos \alpha$ », « $\operatorname{tg} \alpha$ » або « $\sin \alpha$ ».



Розв'язування вправ усно

Назвіть правильну відповідь (

1) $\operatorname{tg} \beta$ дорівнює:

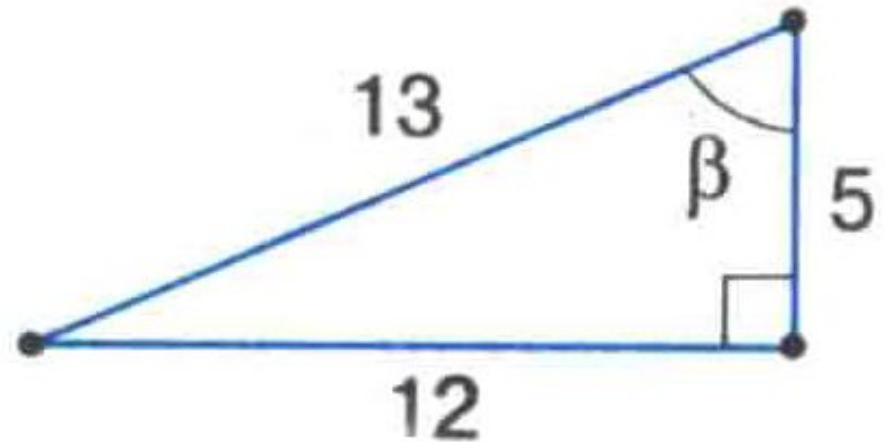
а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

2) $\cos \beta$ дорівнює:

а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{13}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

3) $\sin \beta$ дорівнює:

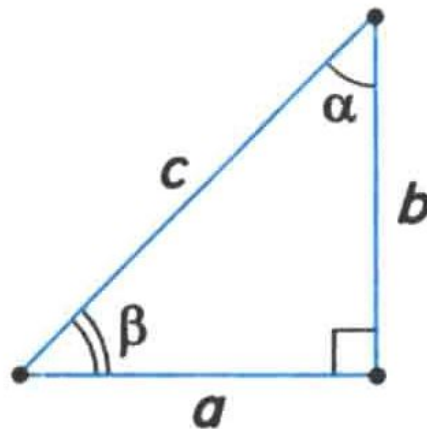
а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{13}{5}$.



Розв'язування вправ усно

За малюнком назвіть правильну відповідь:

- 1) для кута α відношення $\frac{a}{c}$ є: а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha$;
- 2) для кута β відношення $\frac{a}{c}$ є: а) $\sin \beta$; б) $\cos \beta$; в) $\operatorname{tg} \beta$;
- 3) для кута β відношення $\frac{b}{a}$ є: а) $\sin \beta$; б) $\cos \beta$; в) $\operatorname{tg} \beta$.



Розв'язування вправ самостійно

На малюнку 448 $\angle ABC = \angle ADB = 90^\circ$. Запишіть відношення, яким дорівнюють $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, через сторони трикутників ABC і BDA .

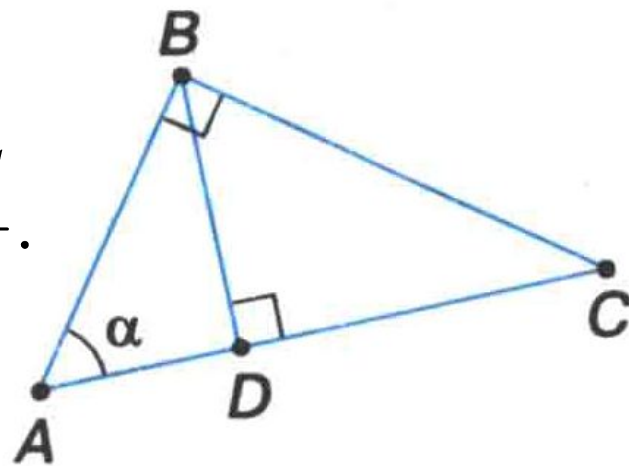
Перевірка

У $\triangle ABC$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC}; \quad \cos \alpha = \frac{AB}{AC}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB}.$$

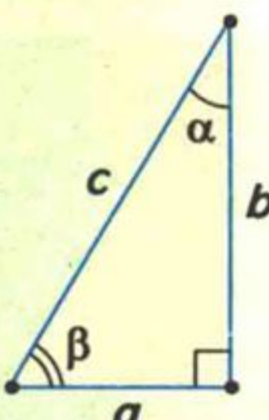
У $\triangle BDA$

$$\sin \alpha = \frac{BD}{AB}; \quad \cos \alpha = \frac{AD}{AB}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD}.$$



Розв'язування вправ самостійно

Накресліть у зошиті таблицю Поставте «+» у тій клітинці, де відношення сторін трикутника відповідає його позначенню.

| Відношення | | Позначення | | | | | |
|---|---------------|---------------|---------------|--------------|--------------|----------------------------|---------------------------|
| | | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\sin \beta$ | $\cos \beta$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \beta$ |
|  <p>The diagram shows a right-angled triangle with a right angle at the bottom-right vertex. The horizontal leg is labeled a, the vertical leg is labeled b, and the hypotenuse is labeled c. The angle at the top vertex is labeled α, and the angle at the bottom-left vertex is labeled β.</p> | $\frac{a}{b}$ | | | | | + | |
| | $\frac{b}{a}$ | | | | | | + |
| | $\frac{b}{c}$ | | + | + | | | |
| | $\frac{a}{c}$ | + | | | | + | |

Розв'язування вправ

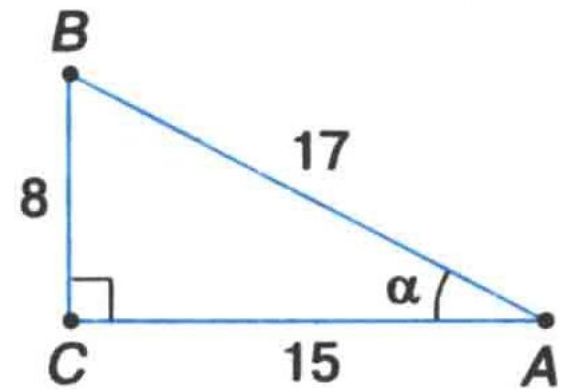
За даними, наведеними на малюнку, знайдіть синус, косинус і тангенс кута α з точністю до 0,1.

Розв'язання

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}; \quad \sin \alpha = \frac{8}{17} \approx 0,5;$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \cos \alpha = \frac{15}{17} \approx 0,9;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} \approx 0,5.$$



Розв'язування вправ

Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC , де $\angle C = 90^\circ$. На катеті AC позначте довільну точку D і сполучіть точки D і B . Виміряйте катети прямокутних трикутників ABC і DBC та знайдіть тангенс $\angle ABC$ і тангенс $\angle DBC$. Порівняйте:

- кути ABC і DBC ;
 - значення тангенсів цих кутів.
- Зробіть висновок.

Розв'язання

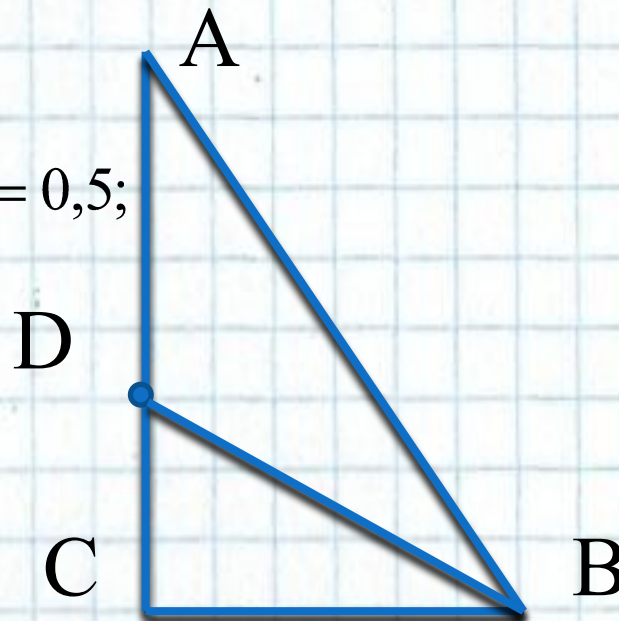
$$\angle ABC > \angle DBC.$$

$$\operatorname{tg} \angle DBC = \frac{DC}{BC}, \quad \operatorname{tg} \angle DBC = \frac{1,5}{3} = 0,5;$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC},$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{4}{3} \approx 1,3.$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC > \operatorname{tg} \angle DBC.$$



Розв'язування вправ

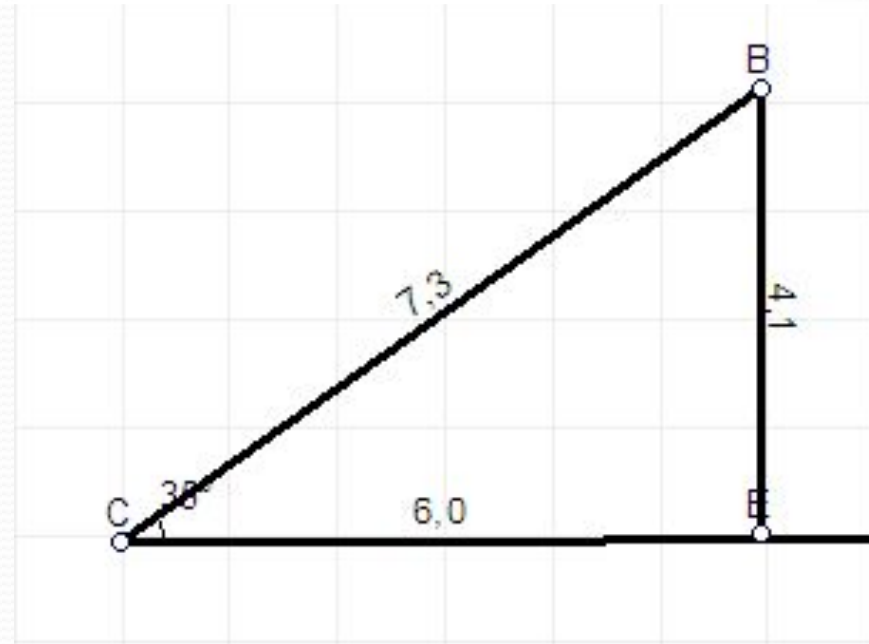
Накресліть за допомогою транспортира кути: 1) 35° ; 2) 40° ; 3) 75° .
Знайдіть синус, косинус і тангенс цих кутів.

Розв'язання

$$\sin 35^\circ = \frac{4,1}{7,3} \approx 0,5616;$$

$$\cos 40^\circ = \frac{6}{7,3} \approx 0,8219;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4,1}{6} \approx 0,6833.$$



Розв'язування вправ

У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 24 см і 7 см. Знайдіть:
1) косинус гострого кута, який лежить проти меншого катета;

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 24 \text{ см}$, $BC = 7 \text{ см}$

Знайти: 1) $\cos \angle A$.

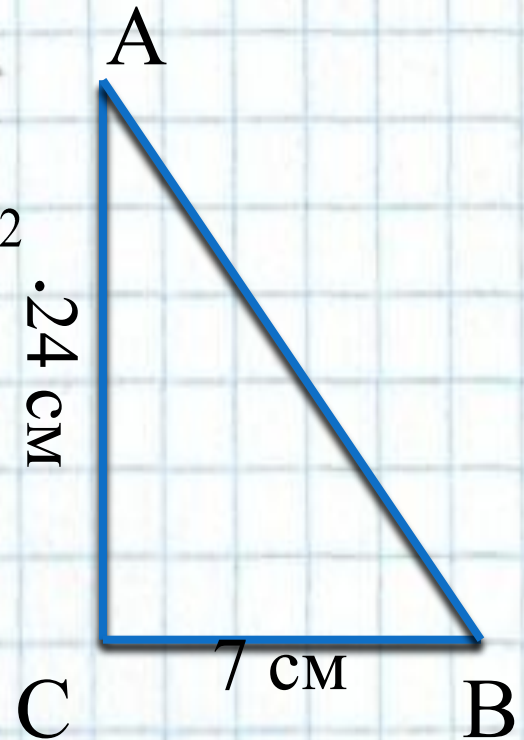
Розв'язання

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$$

За теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

$$AB = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{546 + 49} = 25(\text{см}).$$

$$\cos \angle A = \frac{24}{25} = 0,96.$$



Розв'язування вправ

- З точки A до прямої проведено похилу $AB = 15$ см і перпендикуляр $AC = 9$ см.
Знайдіть синус і косинус:
1) кута A ; 2) кута B .

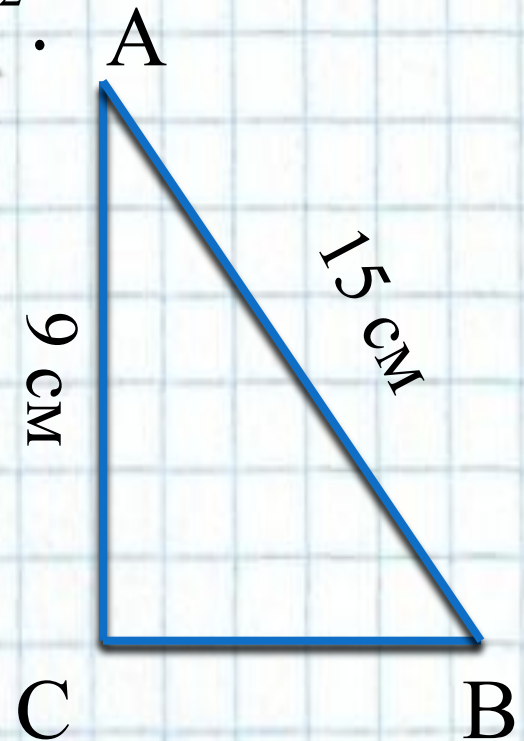
Розв'язання

За теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

$$BC = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{(15-9)(15+9)} = \\ = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 4} = 6 \cdot 2 = 12(\text{см}).$$

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB}, \quad \cos \angle A = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB}, \quad \sin \angle A = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8.$$



Використано

- Підручник Геометрія 8 клас/ М.І.Бурда, Н.А. Тарасенкова/Київ, Зодіак-Еко, 2008