Занимательная математика

АЛГЕБРА

9 КЛАСС.

**УРОК НА ТЕМУ:
СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ.**

$$y = f(x)$$

Свойства функций.

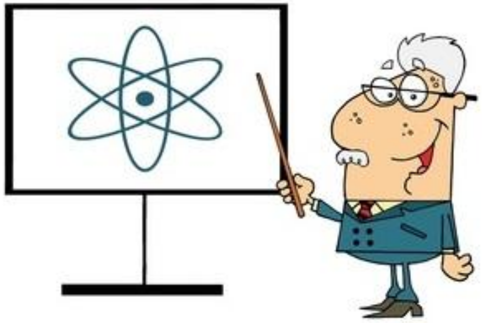
Ребята, мы продолжаем изучать числовые функции.

Сегодня мы остановимся на такой теме как ***свойства функции***.

Функции обладают многими свойствами, как думаете, какие свойства мы с вами, совсем недавно прошли?

Правильно, область определения и область значений это одни из ключевых свойств. Никогда не забывайте про них и помните, что функция всегда обладает этими свойствами.

Сейчас, мы с вами определим некоторые свойства, тот порядок, в котором мы будем их определять, рекомендовано соблюдать и при решение заданий.



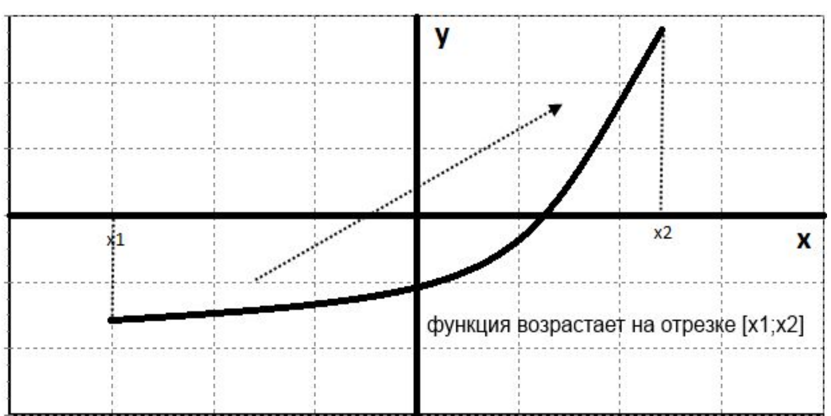
Возрастание и убывание.

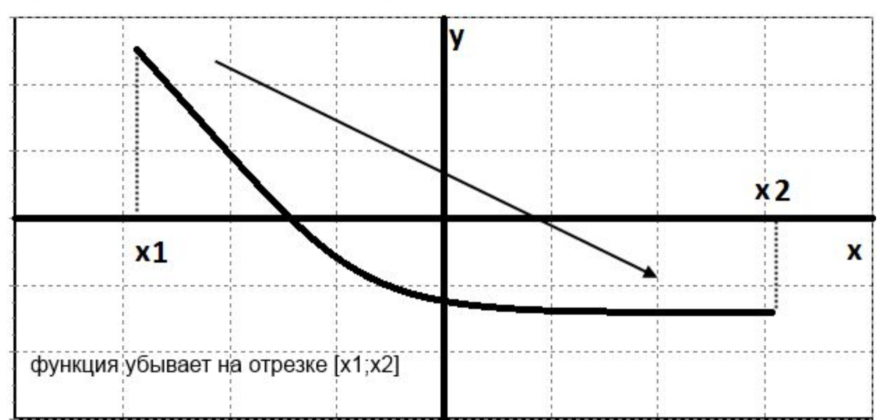
Первое свойство, которое мы определим, это ***возрастание и убывание функции.***

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей*** на множестве $X\subset D(f)$ ***если для любых x1 и x2, таких что $x1<x2$*** - выполняется неравенство ***$f(x1)<f(x2)$***. ***То есть большему значению аргумента, соответствует большее значение функции.***

Функция $y=f(x)$ называется ***убывающей*** на множестве $X\subset D(f)$если ***для любых x1 и x2, таких что $x1<x2$*** - выполняется неравенство ***$f(x1)>f(x2)$***. ***То есть большему значению аргумента, соответствует меньшее значение функции.***

Возрастание и убывание функции очень легко понять, если смотреть на графики функции. Для возрастающей функции, если как бы идти по ней, то мы поднимаемся в горку, для убывающей соответственно спускаемся. Общий вид возрастающих и убывающих функции представлен на графиках ниже.





Возрастание и убывание.

Возрастание и убывание функции в общем случае называется ***монотонностью***.

То есть, задача найти промежутки убывания и возрастания функции в общем случае формулируется, как ***найти промежутки монотонности или исследовать функцию на монотонность.***

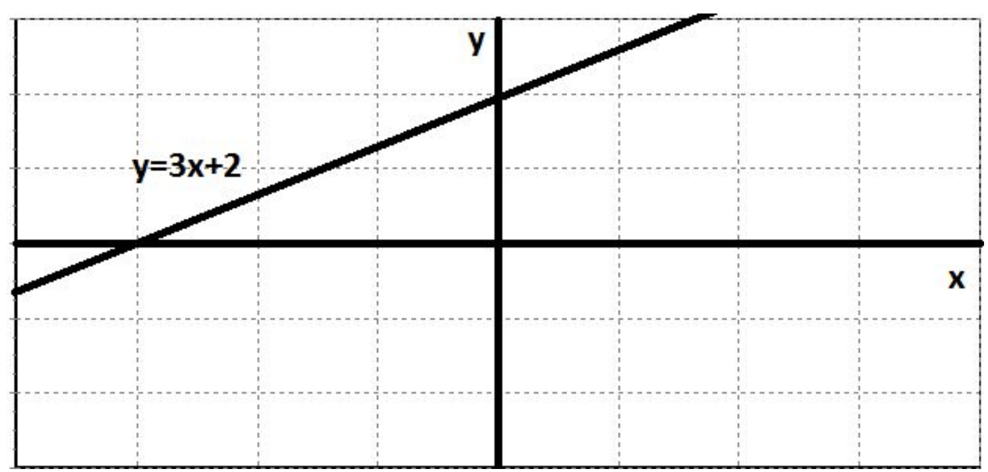
Пример. Исследовать на монотонность функцию $y=3x+2$

Решение. Проверим для любых $x1$ и $x2$ и пусть $x1<x2$.

$f(x1)=3x1+2$

$f(x2)=3x2+2$

Т.к. $x1<x2$ то $f(x1) < f(x2)$, то есть большему значению аргумента, соответствует большее значение функции.



Ограниченность функции.

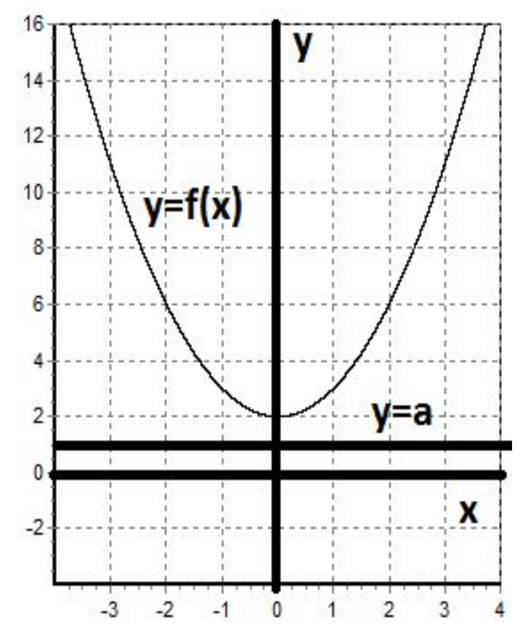
Функцию y=f(x) называют ***ограниченной снизу*** на множестве X⊂D(f), если ***существует такое число а***, ***что для любых xϵX выполняется неравенство f(x)>a.***

Функцию y=f(x) называют ***ограниченной сверху*** на множестве X⊂D(f), если ***существует такое число а, что для любых xϵX выполняется неравенство f(x)<a.***

Если ***промежуток X не указывается***, то считают, что функция ***ограничена на всей области определения***.

Функция ограниченная и сверху и снизу называется ограниченной.

Ограниченность функции так же легко читается по графику. Можно провести некоторую прямую y=a, и если функция выше этой прямой, то ограниченность снизу, если ниже, то соответственно сверху. Ниже график ограниченной снизу функции. График ограниченной функции, ребята, попробуйте нарисовать сами.



Ограниченность функции.

Пример. Исследовать на ограниченность функцию:

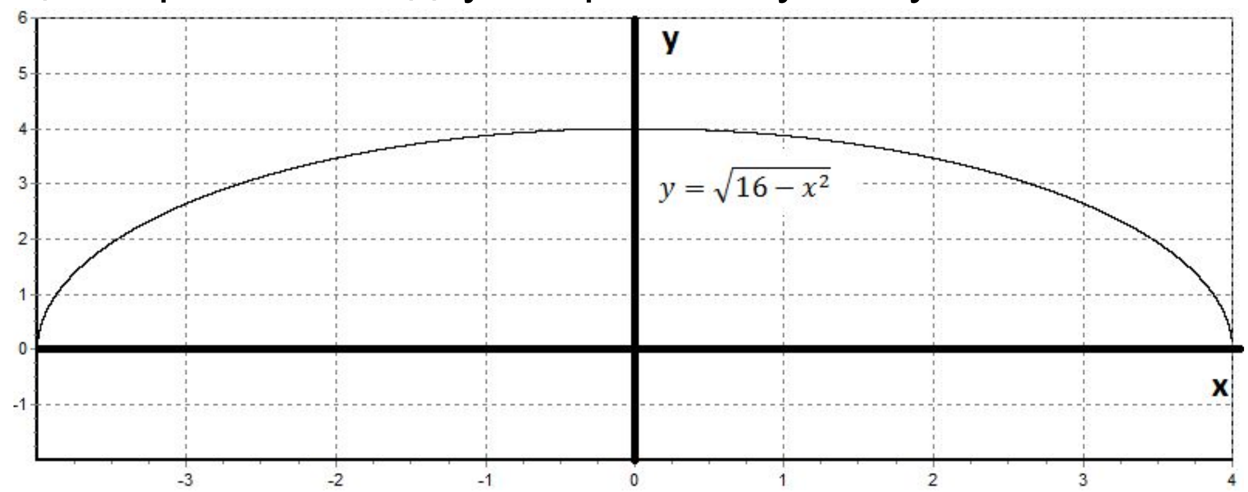
$$y=\sqrt{16-x^2}$$

Решение:

Т.к. корень квадратный из некоторого числа больше либо равен нуля, то очевидно, что наша функция так же больше либо равна нуля, то есть ограниченна снизу.

Корень квадратный мы можем извлекать только из неотрицательного числа, тогда $16-x^2\geq 0$Решением нашего неравенства будет промежуток [-4;4]. На этом отрезке $16-x^2\leq 16$ или $\sqrt{16-x^2}\leq 4$ но это значит ограниченность сверху.

Получили, что наша функция ограниченна двумя прямыми y=0 и y=4.



Наибольшее и наименьшее значение.

Наименьшим значение функции y=f(x) на множестве X⊂D(f), ***называется некоторое число m***, такое что

а) Существует некоторое x0, что f(x0)=m

б) для любого xϵX, выполняется f(x)≥f(x0)

Наибольшим значение функции y=f(x) на множестве X⊂D(f), ***называется некоторое число m, такое что***

а) Существует некоторое x0, что f(x0)=m

б) для любого xϵX, выполняется f(x)≤f(x0)

Наибольшее и наименьшее значение принято обозначать как

$y_{\text{наиб}}$ $y_{\text{наим}}$

Понятия ограниченности и наибольшего с наименьшим значением функции тесно связаны. Выполняются следующие утверждения:

а) Если существует наименьшее значение у функции, то она ограничена снизу.

б) Если существует наибольшее значение у функции, то она ограничена сверху.

в) Если функция не ограничена сверху, то наибольшего значения не существует.

г) Если функция не ограничена снизу, то наименьшего значения не существует.

Наибольшее и наименьшее значение.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции.

$$y = \sqrt{9 - 4x^2 + 16x}$$

Решение.

$$f(x) = y = \sqrt{9 - 4x^2 + 16x} = \sqrt{9 - (x-4)^2 + 16} = \sqrt{25 - (x-4)^2} \le 5$$

При x=4 f(4)=5, при всех остальных значениях функция принимает меньшие значения или не существует, то есть это наибольшее значение функции.

По определению $9 - 4x^2 + 16x \ge 0$ Найдем корни квадратного трехчлена (2x+1)(2x-9)≥0 при x=-0,5 и x=4,5, функция обращается в ноль во всех остальных точках она больше нуля. Тогда, по определению, наименьшее значению функции равно нулю.

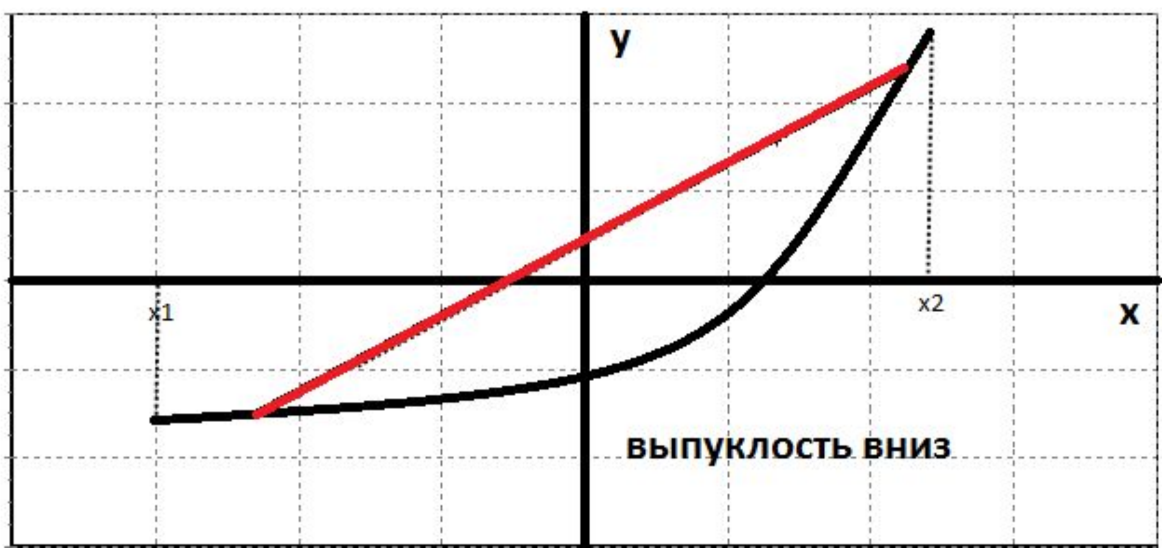
$$y_{\text{наиб}} = 5 \; y_{\text{наим}} = 0$$

Выпуклость. Непрерывность.

Ребята мы с вами еще изучали понятия ***выпуклости функции***. При решении не которых задач, нам это свойство может понадобиться. Это свойство, так же легко определимо с помощью графиков.

Функция выпукла вниз, если ***любые две точки графика***, исходной функции, ***соединить и график функции окажется ниже линии соединения точек.***

Функция выпукла вверх, если ***любые две точки***, графика исходной функции, ***соединить и график функции окажется выше линии соединения точек.***

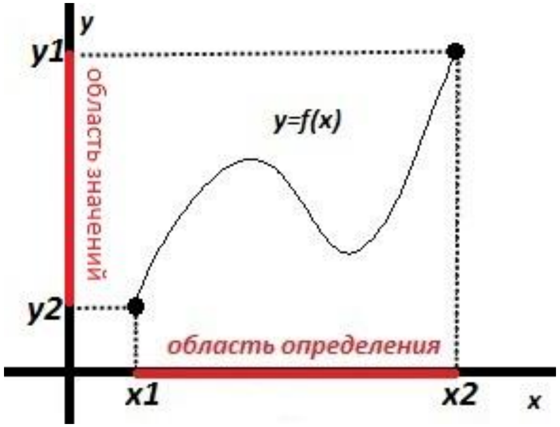


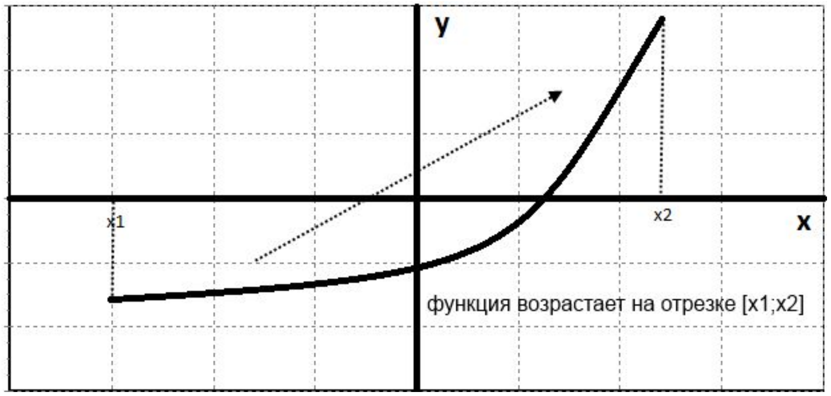
Функция ***непрерывна***, ***если график нашей функции не имеет разрывов, например, как график функции левее.***

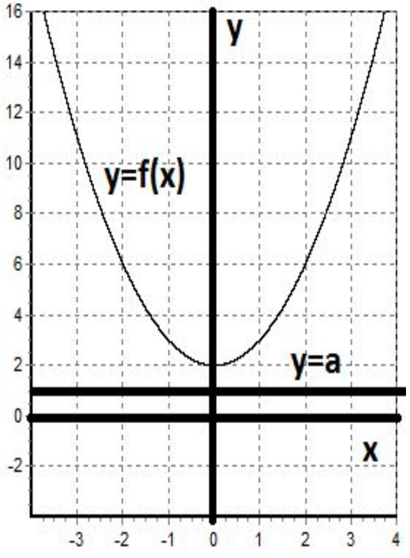
Свойства функции.

Если требуются найти свойства функции, то последовательность поиска свойств такова:

1) *Область определения.*
2) *Монотонность*
3) *Ограниченность*
4) *Наибольшее и наименьшее значение*
5) *Непрерывность.*
6) *Область значений.*

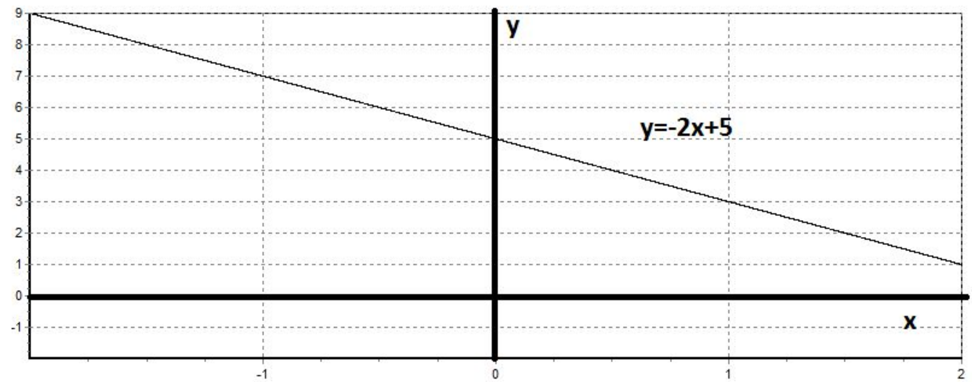






Свойства функции.

Найти свойства функции $y=-2x+5$.
Решение.



а) Область определения $D(y)=(-\infty;+\infty)$
б) Монотонность.
Проверим для любых $x1$ и $x2$
пусть $x1<x2$.
$f(x1)=-2x1+2$
$f(x2)=-2x2+2$
Т.к. $x1<x2$ то $f(x1) > f(x2)$, то есть большему значению аргумента, соответствует меньшее значение функции. Ф
Функция убывает.
в) Ограниченность. Очевидно, что функция не ограничена.
г) Наибольшее и наименьшее значение. Т.к. функция не ограничена то наибольшее и наименьшее значение не существует.
д) Непрерывность. График нашей функции не имеет разрывов, тогда функция непрерывна.
е) Область значений. $E(y)=(-\infty;+\infty)$

Свойства функции.

Задачи для самостоятельного решения.

Найти свойства функции

а) $y=2x+7$ б) в $y = 3x^2$ $y = \frac{4}{x}$