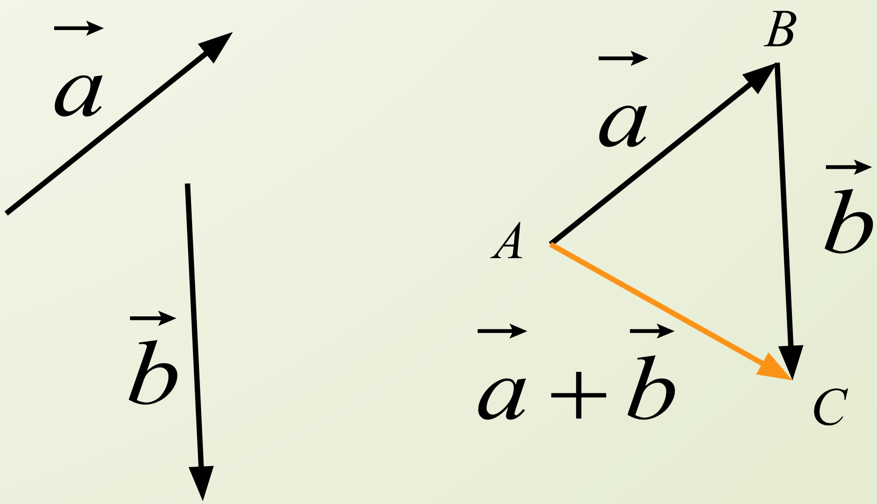
Действия с векторами

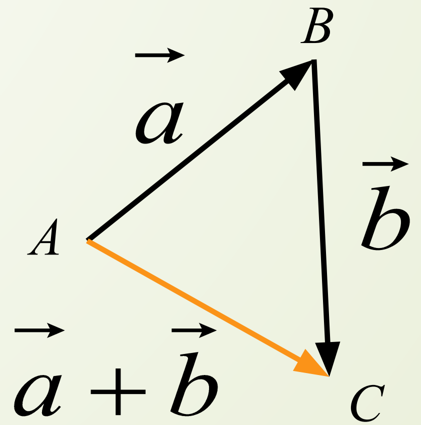
Правило треугольника

Для сложения двух векторов необходимо:

1. *отложить от какой – нибудь точки A вектор* $\overrightarrow{AB}$, *равный* $\vec{a}$
2. *от точки B отложить вектор* $\overrightarrow{BC}$, *равный* $\vec{b}$
3. *вектор* $\overrightarrow{AC}$ *называется суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$



Правило треугольника



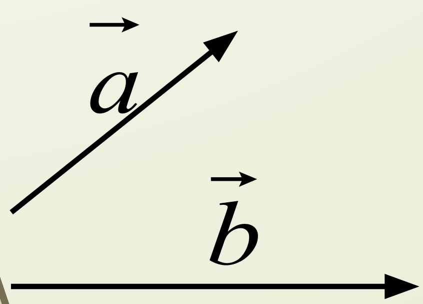
Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

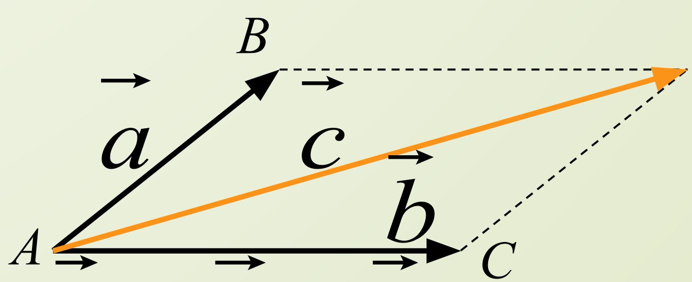
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов необходимо:

1. *отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$*
2. *от точки A отложить вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{b}$*
3. *достроить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам*
4. *диагональ параллелограмма – сумма векторов*





$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Свойства сложения

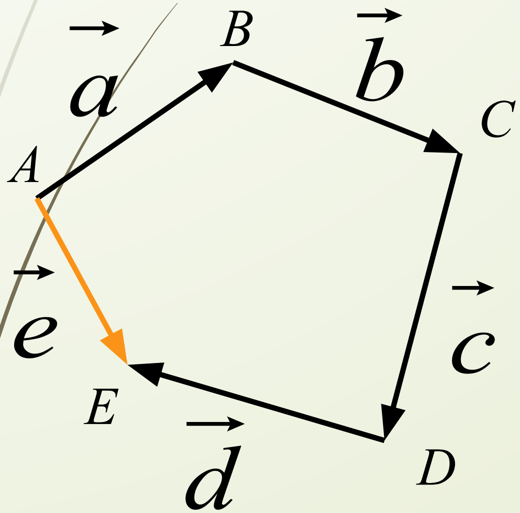
Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *справедливы равенства* :

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$ *переместительный закон*

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$ *сочетательный закон*

Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего(при последовательном откладывании).

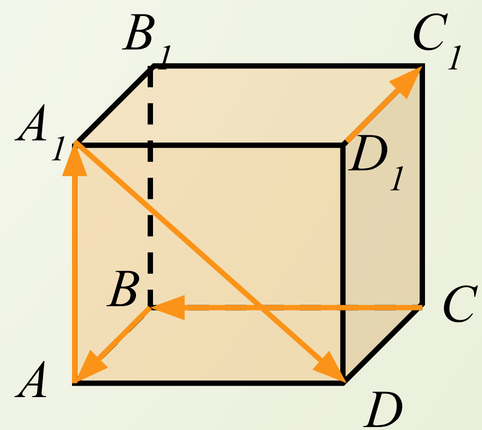


$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{e}$$

Пример

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\underline{\overrightarrow{AE}}$$

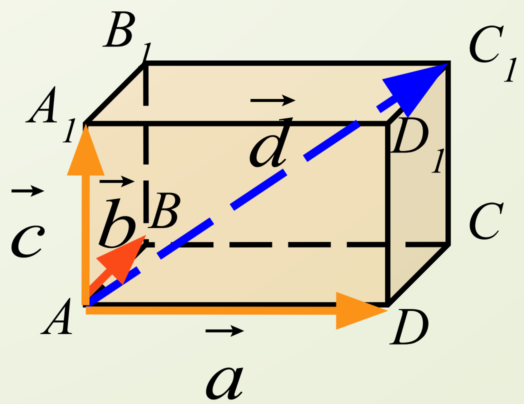
Пример



$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Правило параллелепипеда

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

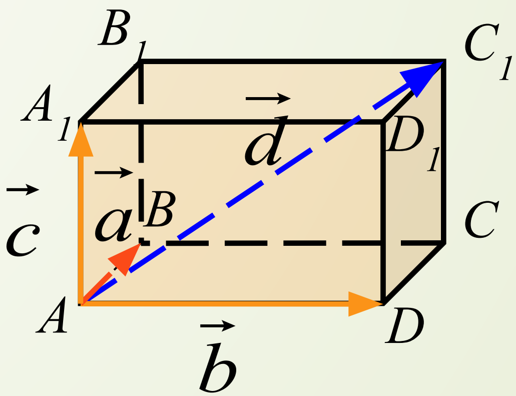
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$

Свойства



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ *для любого параллелепипеда*

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ *для прямоугольного параллелепипеда*

Вычитание векторов

- Вычитание
- Сложение с противоположным

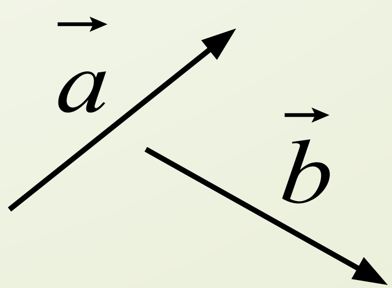
Вычитание

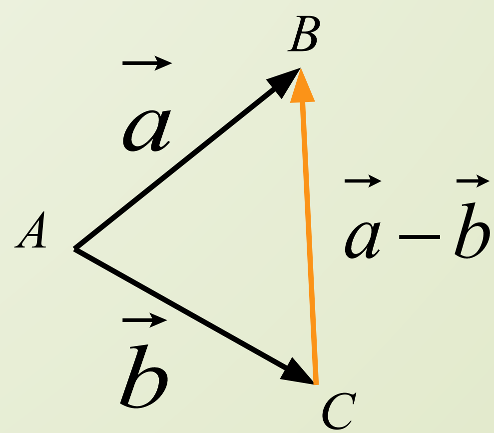
Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется такой вектор, сумма которого с вектором* $\vec{b}$ *равна вектору* $\vec{a}$

Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$
2. от этой же точки A отложить вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{b}$
3. вектор $\overrightarrow{CB}$ называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

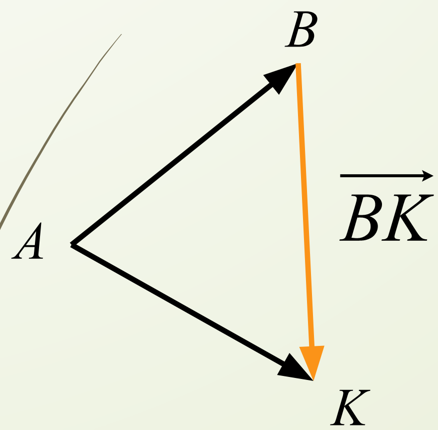




Правило трех точек

Правило трех точек

Любой вектор можно представить как разность двух векторов, проведенных из одной точки.

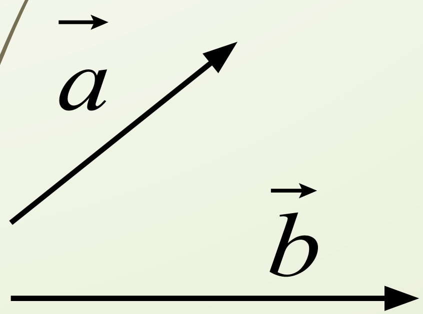


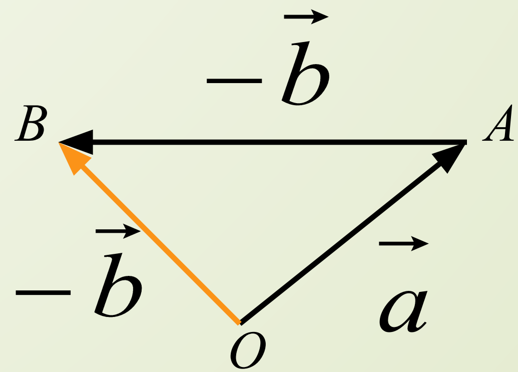
$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$$

Сложение с противоположным

Разность векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *можно представить как сумму вектора* $\vec{a}$ *и вектора, противоположного вектору* $\vec{b}$*.*

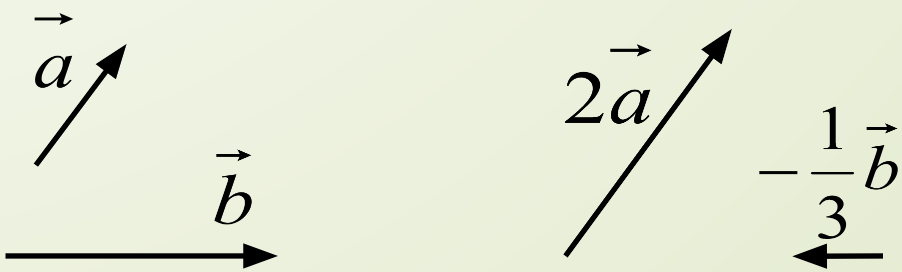
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$





Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ *на число* k *называется такой вектор* $\vec{b}$, *длина которого равна* $|k| \cdot |\vec{a}|$, *при чем векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *сонаправлены при* $k \geq 0$ *и противоположно направлены при* $k < 0$.



Свойства

- *Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.*

$$\vec{0} \cdot n = \vec{0}$$

- *Произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.*

$$\vec{n} \cdot 0 = \vec{0}$$

Свойства

Для любых векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *и любых чисел* **k, l** *справедливы равенства :*

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ *сочетательный закон*

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ 1 – *ый распределительный закон*

$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ 2 – *ой распределительный закон*

Скалярное произведение

Скалярным произведением *двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения

Справедливые утверждения

● *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

● *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 = a^2$$

Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ *выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательство

Доказательство формулы скалярного произведения

Доказатель ство:

$I.$ *при* $\vec{a}=\vec{0}$ *или* $\vec{b}=\vec{0}$, *равенство*

$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ *справедлив о, т.к.* $\vec{0}\{0;0;0\}$

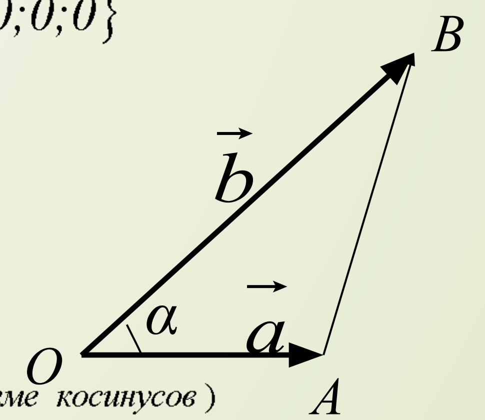
$II.$ *при* $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$

O *– произвольн ая точка*

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$

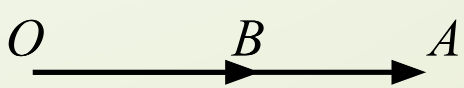
если $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеа рны, то*

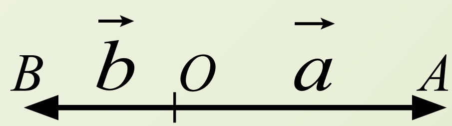
$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot \cos\alpha$ *(по теореме косинусов)*



это равенство верно и в том случае когда векторы

$\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарн ы*





$\cos\alpha=1, AB^2=(OA-OB)^2=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\alpha$

$\cos\alpha=-1, AB^2=(OA+OB)^2=$

$=OA^2+OB^2+2OA\cdot OB=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\alpha$

Доказательство формулы скалярного произведения

$$\text{Так как } \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \text{ то}$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2\right)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \left|\vec{b}\right|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$-(z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$-x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ *и* $\vec{\mathbf{c}}$ *и любого числа* $\mathbf{k}$ *справедливы равенства :*

1^0. $\vec{a}^2 \geq 0$ *причем* $\vec{a}^2 > 0$ *при* $\vec{a} \neq 0$

2^0. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ ***(переместительный закон)***

3^0. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ ***(распределительный закон)***

4^0. $\left(k\vec{a}\right)\vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ ***(сочетательный закон)***

Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам

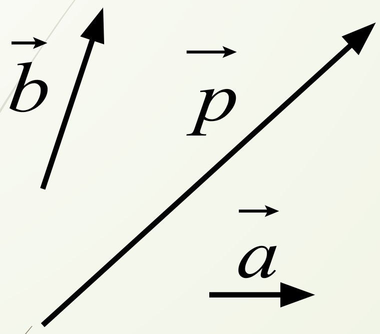
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

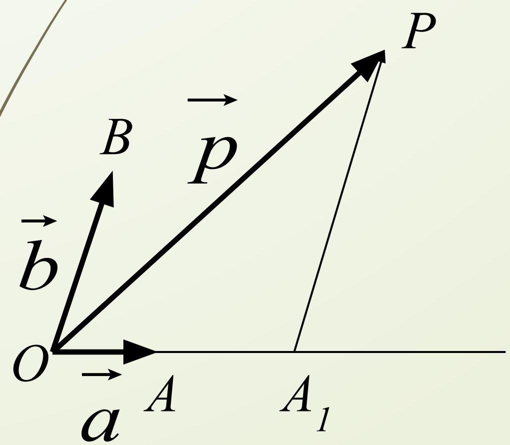
Теорема.

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Доказательство теоремы





Дано:

$\vec{a}, \vec{b}$ – *неколлинеарные векторы*

Доказать:

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$

Доказательство:

1)Пусть $\vec{p}$ *коллинеарен* $\vec{b}$.

Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, *где y – некоторое число.*

Следовательно,

$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$

т.е. $\vec{p}$ *разложен по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Доказательство теоремы

2) $\vec{p}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$.

Отметим O – произвольную точку.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$PA_1 \parallel BO$ $PA_1 \cap OA = A_1$

$\vec{p} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P}$ *(пп правилу треугольника)*

но: $\overrightarrow{OA_1}$ *и* $\overrightarrow{A_1P}$ *коллинеарны* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *соответственно,*

значит $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P} = y\vec{b}$,

следовательно $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *т.е.* $\vec{p}$ *разложен по* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$

ч.т.д.

Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$

Тогда: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$ -

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}$

$x - x_1 = 0,\ y - y_1 = 0,$

если бы $x - x_1 \neq 0$ *то* $\vec{a} = -\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$

а значит $\vec{a}$, *и* $\vec{b}$ *коллинеарны, что противоречит условию теоремы*

значит $x - x_1 = 0,\ y - y_1 = 0,$ *откуда*

$x = x_1$ *и* $y = y_1$.

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Если вектор ***p*** *представлен в виде*

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где ***x, y, z*** *– некоторые числа, то говорят, что вектор* $\vec{p}$ *разложен по векторам* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$.

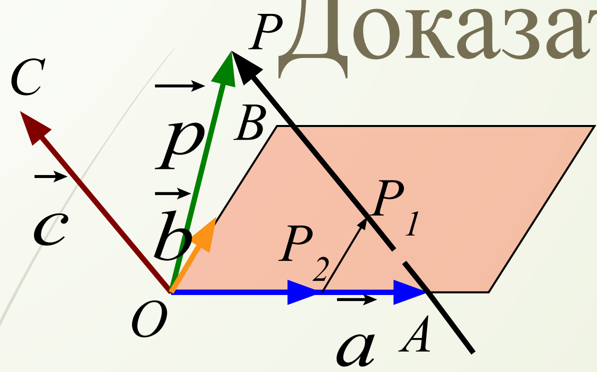
Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Доказательство теоремы



Дано:

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ – некомпланрные векторы

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Доказательство:

O – произвольная точка

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

$\overrightarrow{OP_2}$, и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{OC}$ – коллинеарны

$\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ч.т.д.

Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.
Допустим:

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$$

Тогда:

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

-

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$$

$$x - x_1 = 0,\ \ y - y_1 = 0,\ \ z - z_1 = 0$$

$$\text{если бы } z - z_1 \neq 0 \text{ то } \vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$$

а значит $\vec{a}$, $\vec{b}$, *и* $\vec{c}$ *компланарны, что противоречит условию теоремы*

значит $x = x_1,\ \ y = y_1,\ \ z = z_1$

Базисные задачи

Вектор, проведенный в середину отрезка

Вектор, проведенный в точку отрезка

Вектор, соединяющий середины двух отрезков

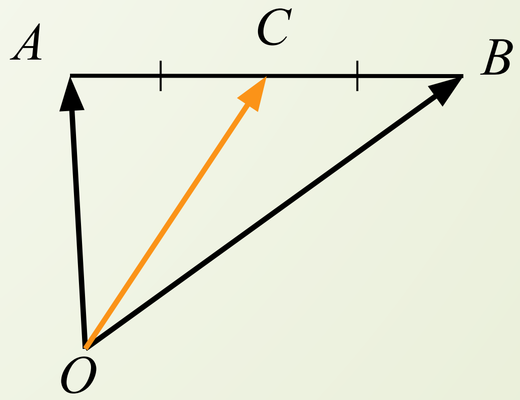
Вектор, проведенный в центроид треугольника

Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда

Вектор, проведенный в середину отрезка,

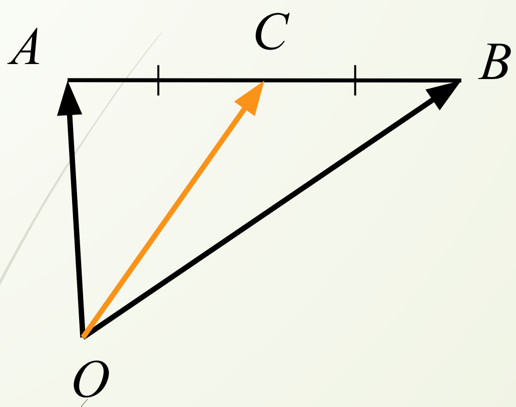
равен полусумме векторов, проведенных из той же точки в его концы.



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Доказательство

Доказательство



$$\text{Дано}:$$
$$AB - \text{отрезок}$$
$$AC = CB$$
$$\text{Доказать}:$$
$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$\text{Доказательство}:$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AC} \\ \vec{OC} &= \vec{OB} + \vec{BC} \end{aligned}\right| +$$

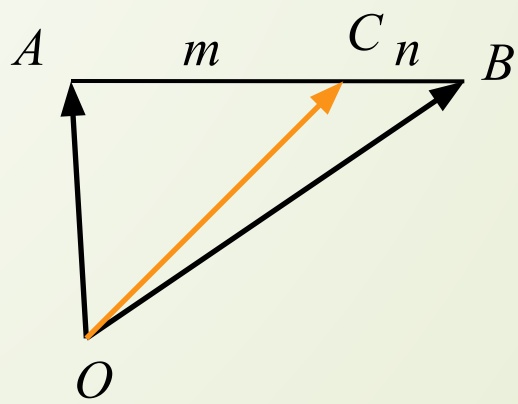
$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\underbrace{\vec{AC} + \vec{BC}}_{\vec{o}})$$

$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad \Big| \div 2$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \quad \Big| \text{ч.т.д.}$$

Вектор, проведенный в точку отрезка

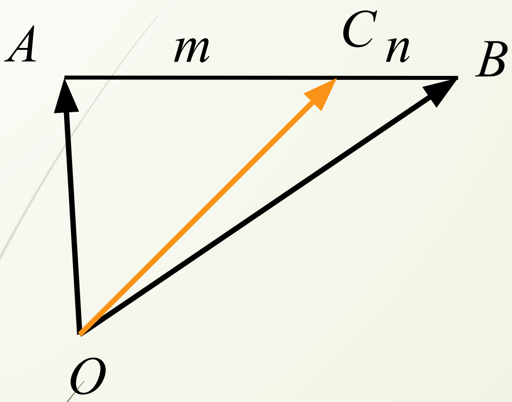
Точка **C** *делит отрезок* **AB** *в отношении* ***m : n***.



$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

Доказательство

Доказательство



Дано:

AB – *отрезок*

$AC = m$

$CB = n$

Доказать:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

Доказательство:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

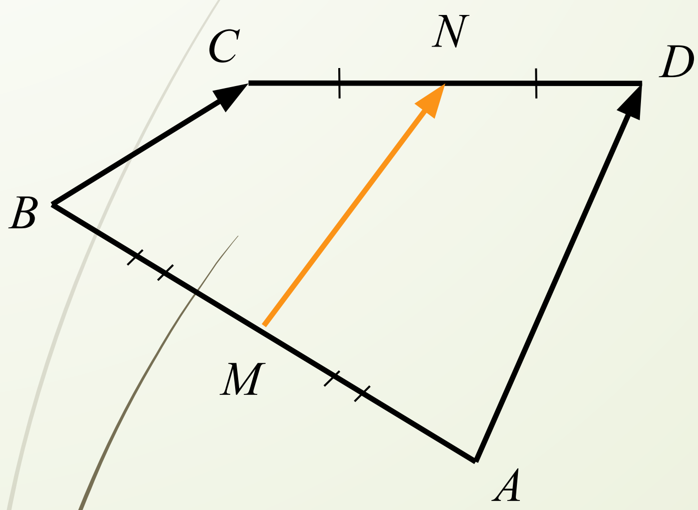
$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

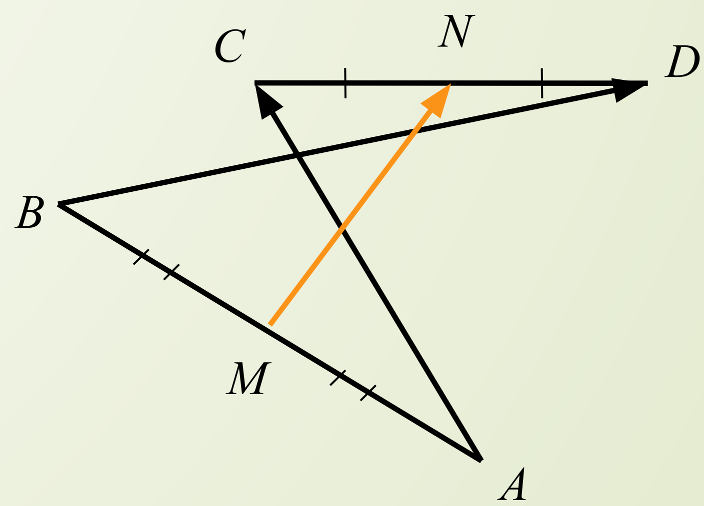
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} =$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \text{ ч.т.д.}$$

Вектор, соединяющий середины двух отрезков,

равен полусумме векторов, соединяющих их концы.

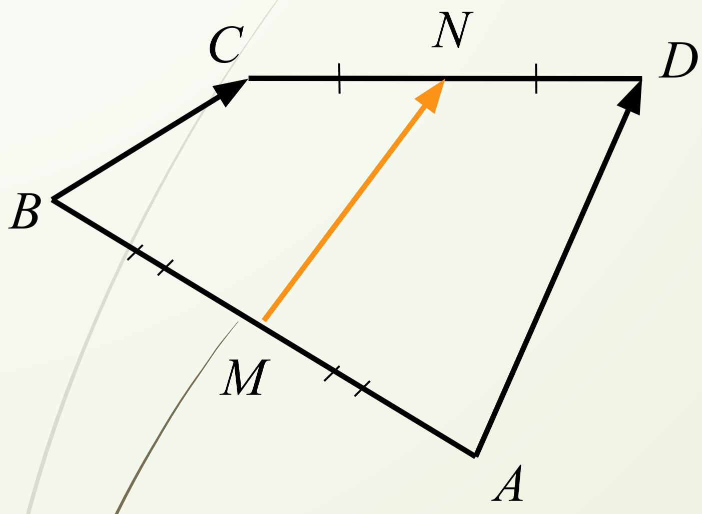




$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство

Доказательство



Дано:

$AB; CD$

$BM = AM$

$CN = ND$

Доказать:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}\end{aligned}\right| +$$

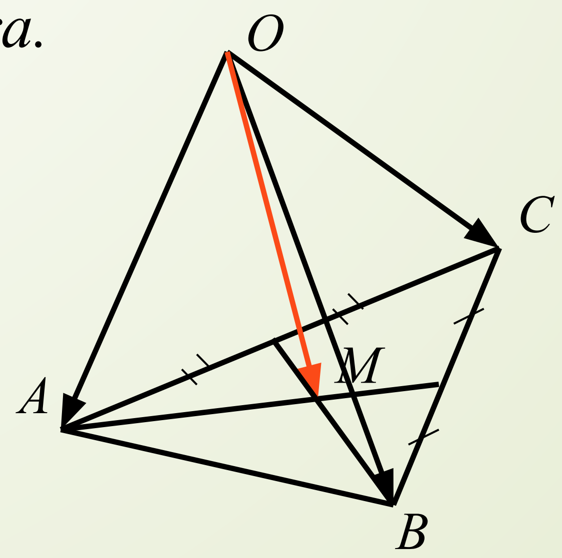
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \text{ ч.т.д.}$$

Вектор, проведенный в центроид треугольника,

равен одной трети суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника.

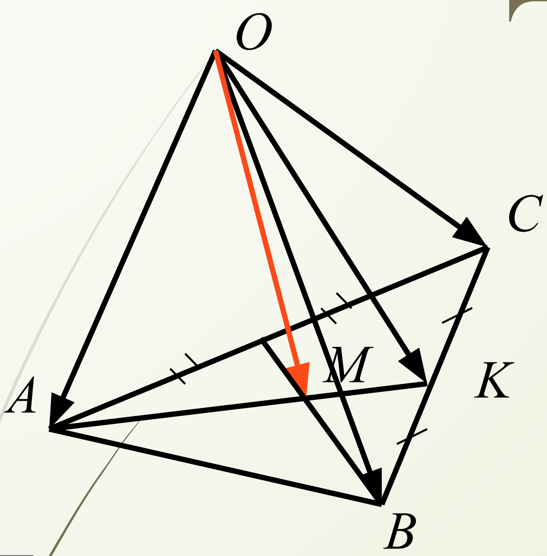
Центроид *– точка пересечения медиан треугольника.*



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

ΔABC

M – *центроид*

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство :

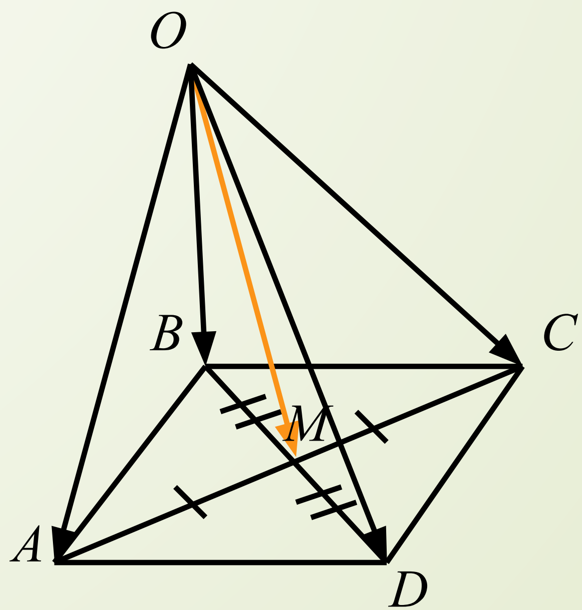
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ ч.т.д.}$$

Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма,

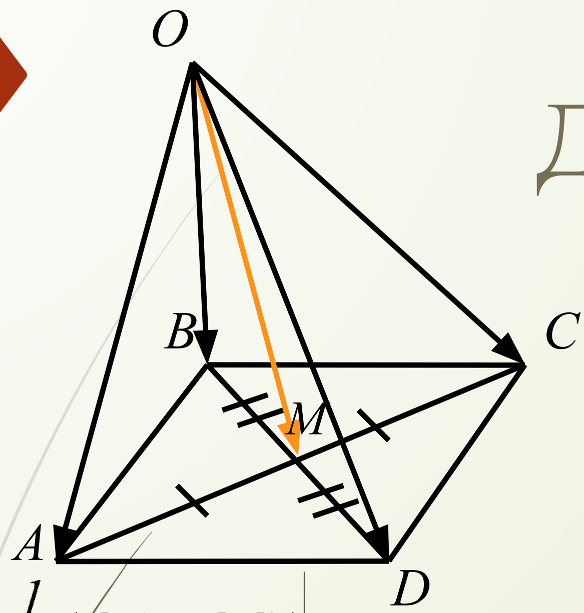
равен одной четверти суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины параллелограмма.



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

[Доказательство]

Доказательство



Дано:

$ABCD - пар - м$

$BD \cap AC = M$

Доказать:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\left.\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned}\right| +$$

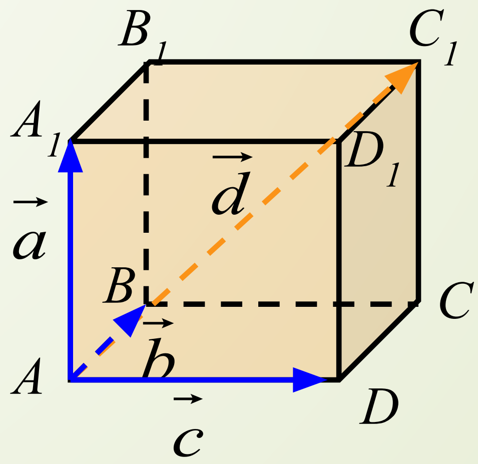
$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) \div.\grave{o}.\ddot{a}.$$

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда,

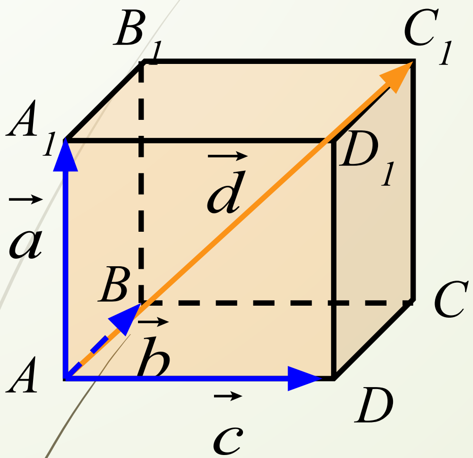
равен сумме векторов, лежащих на трех его ребрах, исходящих из одной вершины.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Доказательство

Доказательство



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1 - пар - м$

$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$

Доказать:

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Доказательство:

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} =$$

$$= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ ч.т.д.}$$