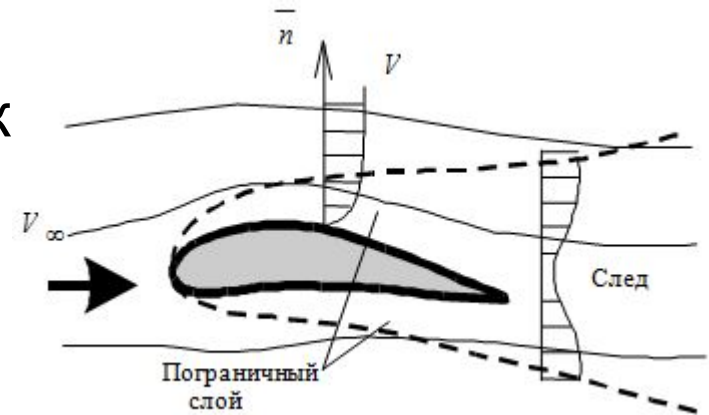


Пограничный слой. Аэродинамический нагрев

Лекции 14, 15

- Сопротивление удобообтекаемых тел при их движении в жидкостях или газах является в значительной степени сопротивлением от трения среды о поверхность тела. Поэтому весьма важно знать законы трения в жидкостях и газах и уметь рассчитывать сопротивление трения.
- Силы трения жидкости проявляются не во всей среде, а лишь в слое, прилегающем к поверхности движущегося тела, где скорость течения резко изменяется по нормали к поверхности, и в следе за телом



- Задача об обтекании тела потоком вязкой жидкости решается интегрированием дифференциальных уравнений движения с учетом внутреннего трения – **уравнений Навье-Стокса**.
- В общем случае, когда коэффициент вязкости μ зависит от температуры, уравнения движения в проекции на оси пространственной декартовой системы координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(2 \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right), \\ \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(2 \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \\ \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(2 \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\}$$

- При $\mu = \text{const}$ уравнения Навье-Стокса имеют вид

$$\frac{dV_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\text{div} \vec{V}) + \nu \Delta V_x \quad \text{и т.д.}$$

- Точное решение задачи обтекания какого-либо тела сводится к интегрированию дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях и практически невозможно. Для получения частных решений какого-либо определенного класса задач прибегают к упрощению этих уравнений.
- При изучении обтекания тел при больших числах Рейнольдса, характерных для авиационной и ракетной техники, применяют метод упрощения уравнений Навье–Стокса, основанный на понятии **пограничного слоя**

14.1. Толщина пограничного слоя

- Течение жидкости в пограничном слое может быть **ламинарным или турбулентным**. При ламинарном течении наблюдается упорядоченное движение жидкости параллельными слоями (слоистое течение) без их перемешивания. Турбулентное течение сопровождается беспорядочным движением частиц (не молекул) жидкости, приводящим к поперечному перемешиванию вязкой среды и к пульсации параметров течения.
- Формула Ньютона для силы внутреннего трения при ламинарном течении $\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}$ показывает, что внутри пограничного слоя и в следе за телом, где градиенты скорости значительны, силой внутреннего трения пренебрегать нельзя, и среду, движущуюся внутри этих областей, следует считать вязкой даже при малых значениях коэффициента вязкости.

- Во внешнем потоке вне пограничного слоя скорость при удалении от поверхности тела изменяется чрезвычайно медленно. Влияние вязкости здесь пренебрежимо мало, и можно считать, что движение подчиняется законам течения идеальной невязкой жидкости. Изучать движение среды в этой области можно с помощью уравнений Эйлера.
- Толщина пограничного слоя величина достаточно условная.
- Обычно за **толщину пограничного слоя** в данной точке поверхности принимают расстояние от тела до такой точки, в которой действительная скорость потока отличается от скорости в потенциальном течении на 1 %:

$$\left(\frac{V_x}{U} \right)_{y=\delta} = 0,99$$

14.2. Толщина вытеснения

- Секундные расходы жидкости через сечение пограничного слоя высотой δ для потоков невязкого и вязкого газов различны:

$$\int_0^{\delta} \bar{\rho} U dy - \int_0^{\delta} \rho V_x dy = \int_0^{\delta} (\bar{\rho} U - \rho V_x) dy = \bar{\rho} U \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho V_x}{\bar{\rho} U} \right) dy$$

невязкий

вязкий

- **Толщина вытеснения** характеризует уменьшение секундного расхода газа через сечение пограничного слоя вследствие торможения потока в пограничном слое

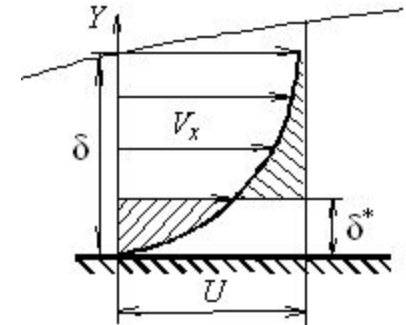


Схема к определению толщины вытеснения при $\rho = \text{const}$

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho V_x}{\bar{\rho} U} \right) dy$$

сжимаемая жидкость

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{V_x}{U} \right) dy$$

несжимаемая жидкость

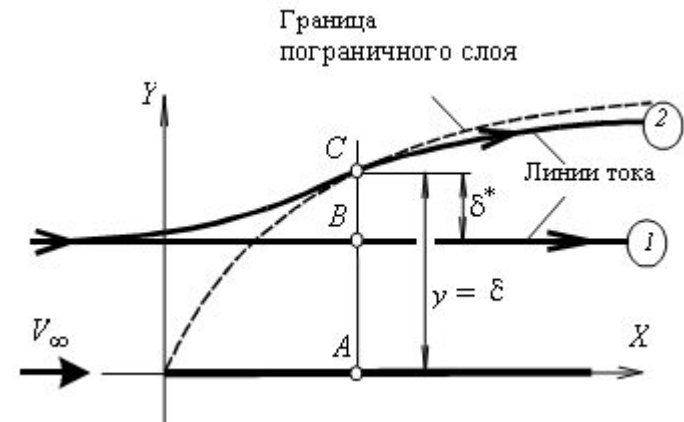
- Толщина вытеснения характеризует **искривление линий тока** вследствие торможения потока в пограничном слое.

- Известно, что расход жидкости в трубке тока одинаков во всех сечениях. Отсюда

$$\bar{\rho}U \cdot AB = \int_0^y \rho V_x dy = (y - BC)\bar{\rho}U$$

- BC – смещение линии тока вязкого потока по отношению к линии тока невязкого потока.

- Т.е. **толщина вытеснения** – это толщина, на которую отодвигаются от тела линии тока в вязком газе по отношению к линиям тока в невязком газе.



$$BC = \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho V_x}{\bar{\rho} U} \right) dy$$

14.3. Толщина потери импульса

- Вследствие торможения потока в пограничном слое происходит не только уменьшение расхода по сравнению с невязким газом, но и уменьшение количества движения, проносимого жидкостью через сечение пограничного слоя, равное $\int_0^{\delta} \rho V_x (U - V_x) dy$.

- Толщина потери импульса** – условная толщина некоторого слоя, сквозь сечение которого в единицу времени с постоянной скоростью переносится количество движения, равное $\int_0^{\delta} \rho V_x (U - V_x) dy$ указанному уменьшению импульса

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho V_x}{\bar{\rho} U} \left(1 - \frac{V_x}{U} \right) dy$$

сжимаемая жидкость

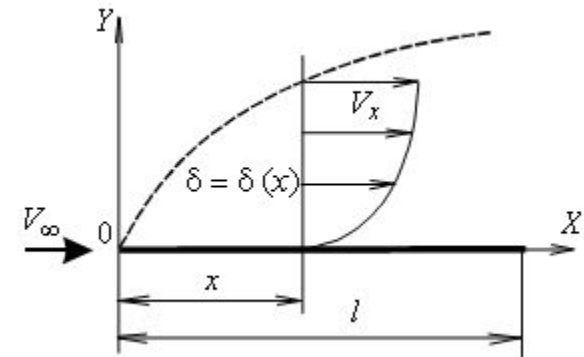
$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{V_x}{U} \left(1 - \frac{V_x}{U} \right) dy$$

несжимаемая жидкость

$$\delta > \delta^* > \delta^{**}$$

14.4. Дифференциальные уравнения пограничного слоя в несжимаемой жидкости

- Для области тонкого пограничного слоя, в котором собственно и проявляются силы трения, Л.Прандтль предложил метод упрощения уравнений движения, основанный на сравнении порядка величины членов уравнения и отбрасывания членов высшего порядка малости.



$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right)$$

Уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

Уравнение неразрывности

- Эта система уравнений полностью описывает движение вязкой жидкости в пределах пограничного слоя в рамках настоящей задачи.
- Оценим порядок входящих в эти уравнения членов, имея в виду, что $0 \leq y \leq \delta$ имеет порядок толщины пограничного слоя δ ($y \sim \delta$) и является малой величиной по сравнению с характерным размером обтекаемой поверхности, например, его длиной l ($\delta/l \rightarrow 0$). Скорость в пределах пограничного слоя $0 \leq V_x \leq V$ ($V_x \sim V$), продольная координата $0 \leq x \leq l$, т. е. $x \sim l$.
- Тогда приращение скорости $\partial V_x \approx \Delta V_x$ имеет порядок величины скорости во внешнем потоке V .
- Установив порядок производных входящих в первое из уравнений Навье-Стокса, произведя упрощения получим

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

- Внутри пограничного слоя силы вязкости и инерции имеют одинаковый порядок, т. е. их отношение должно быть равным единице.

Их отношение равно $\frac{V^2}{l} : \nu \frac{V}{\delta^2} \approx 1$, следовательно

$$\frac{V^2}{l} \frac{\delta^2}{\nu V} = \frac{Vl}{\nu} \frac{\delta^2}{l^2} = \text{Re} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 \approx 1,$$



$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$$

- Проведя подобный анализ членов второго уравнения, приходим к аналогичной упрощенной записи

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}$$

- Инерционные и вязкие члены этого уравнения относятся к соответствующим членам первого уравнения как $\delta/l \rightarrow 0$. Очевидно, что в данной задаче вклад второго уравнения не превышает указанного отношения.

- Поэтому инерционными и вязкими членами второго уравнения можно пренебречь и в задаче исследования течения в пограничном слое вообще не учитывать. Тогда из второго уравнения системы с достаточной точностью можно записать следующее

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

давление внутри пограничного слоя

не меняется вдоль нормали к контуру тела и равно давлению на внешней границе пограничного слоя

- Так как $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, то $p = p(x)$ и $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$. Система дифференциальных уравнений

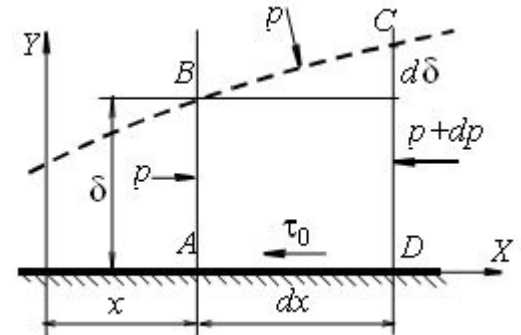
для пограничного слоя

примет вид

$$\left. \begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

14.5. Интегральное соотношение пограничного слоя

- Рассмотрим установившийся плоский пограничный слой. Выделим в пограничном слое малый объем $ABCD$.
Применим к данному объему теорему об изменении количества движения. Вычислим изменение количества движения в направлении оси OX за промежуток времени dt .



$$\left(\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x dy \right) dx dt$$

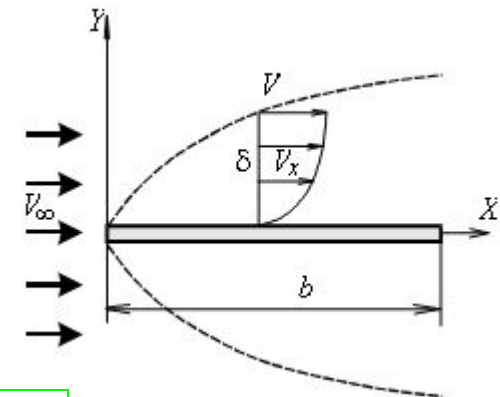
- Приравняем его суммарному импульсу от сил давления и трения, действующих на грани выделенного объема.
- От сил давления: $p\delta$, $p d\delta$ и $-\left[p\delta + \frac{d(p\delta)}{dx} dx \right]$

- Суммарный импульс сил давления $-\delta \frac{dp}{dx} dx dt$
- Импульс от силы трения $-\tau_0 dx \cdot 1 \cdot dt.$
- Изменение количества движения жидкости в объеме = суммарному импульсу от сил давления и трения
- Получаем
$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0$$
- *интегральное соотношение пограничного слоя*
- Пригодно для изучения ламинарного и турбулентного пограничных слоев, но необходимы два дополнительных уравнения:
 1. Закон распределения скорости по поперечному сечению пограничного слоя (можно задать приближенно аппроксимирующей функцией).
 2. Зависимость напряжения трения от изменения скорости по нормали к поверхности (например, формула Ньютона для ламинарного п.с.)

15.1. Расчет пограничного слоя на плоской поверхности в несжимаемой среде

- Задача расчета пограничного слоя в несжимаемой среде сводится к определению закона изменения толщины пограничного слоя, т. е. $\delta = \delta(x)$, и силы сопротивления трения $X_{тр}$ при условии, что известны скорость V_∞ , величина коэффициента кинематической вязкости и хорда пластинки b .
- Для плоской пластинки скорость потенциального течения $U = V_\infty$, градиент давления вдоль пластинки $\frac{dp}{dx} = 0$
- Тогда интегральное соотношение примет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x^2 dy - V_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x dy = -\tau_0$$



15.2. Ламинарный пограничный слой

- Закон распределения скорости по толщине ПС

$$\frac{V_x}{V_\infty} = a + b\left(\frac{y}{\delta}\right) + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + d\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

- Коэффициенты полинома - из граничных условий:

- Кинематические: $(V_x)_{y=0} = 0$ и $(V_x)_{y=\delta} = V_\infty$

- Динамические: 1) $\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$, т.к. $\frac{dp}{dx} = 0$, То $\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right)_{y=\delta} = 0$

- 2) при $y = \delta$ $\tau = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \longrightarrow 0$ и $\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0$

- Тогда из закона распределения скорости получаем:

$$a = 0, b = \frac{3}{2}, d = -\frac{1}{2} \text{ . Т.е.}$$

$$\frac{V_x}{V_\infty} = \frac{1}{2} \left(3 \frac{y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3} \right)$$

- Выражение для τ_0 получим из закона Ньютона для внутреннего трения при ламинарном течении. Т.к.

- $$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{3}{2} \frac{V_\infty}{\delta} \left(1 - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad , \text{то} \quad \tau_0 = \frac{3}{2} \mu \frac{V_\infty}{\delta}$$

- Интегралы, входящие в интегральное соотношение

$$\int_0^\delta \rho V_x dy = \frac{\rho V_\infty}{2} \int_0^\delta \left(3 \frac{y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3} \right) dy = \frac{5}{8} \rho V_\infty \delta \quad \int_0^\delta \rho V_x^2 dy = \frac{\rho V_\infty}{4} \int_0^\delta \left(3 \frac{y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3} \right)^2 dy = \frac{17}{35} \rho V_\infty^2 \delta.$$

- Теперь интегральное соотношение преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{17}{35} \rho V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{5}{8} \rho V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = -\frac{3}{2} \mu \frac{V_\infty}{\delta}$$

- Группируя подобные члены и разделяя переменные интегрируем

$$\frac{13}{280} \rho V_\infty \delta^2 = \mu x + C$$

- Из условий на передней кромке $x = \delta = 0$ и $C = 0$;
после преобразований

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13} \frac{\mu x}{\rho V_\infty}} = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}} \quad \delta = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

- Местный коэффициент трения $c_f = \frac{\tau_0}{\rho V_\infty^2 / 2}$ $c_f = \frac{0,65}{\sqrt{\text{Re}_x}}$

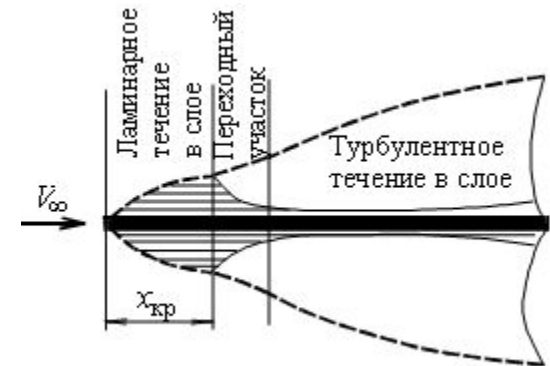
- Коэффициента сопротивления трения

$$c_{x\text{тр}} = \frac{1}{b} \int_0^b c_f dx \quad c_{x\text{тр}} = \frac{1,3}{\sqrt{\text{Re}}}$$

- В качестве характерного линейного размера в числе Рейнольдса используется хорда пластинки b

15.3. Турбулентный пограничный слой

- Ламинарное течение в пограничном слое плоской пластины возможно лишь в случае, если число Рейнольдса не превышает некоторого значения, называемого **критическим**.
- Для числа Рейнольдса, в котором за характерную длину принято расстояние x от входной кромки пластины, критическое число $Re_x = 9 \cdot 10^4 \dots 1,1 \cdot 10^6$.
- При превышении критического числа Рейнольдса происходит турбулизация течения.
- Законы турбулентного течения наиболее полно изучены для движения жидкости в круглых трубах



- Допустим, что в пограничном слое профиль скорости такой же, как и в круглой трубе $\frac{V_x}{V_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$
- Воспользуемся зависимостью касательных напряжений на стенке, $\tau_0 = 0,225\rho V_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty \delta}\right)^{1/4}$ полученной для труб
- Интегралы, входящие в интегральное соотношение

$$\int_0^\delta \rho V_x dy = \frac{7}{8} \rho V_\infty \delta \quad \int_0^\delta \rho V_x^2 dy = \frac{7}{9} \rho V_\infty^2 \delta$$
- Интегральное соотношение $\frac{7}{12} \rho V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = 0,225 \rho V_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty \delta}\right)^{1/4}$
- Толщина турбулентного пограничного слоя $\delta = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re_x}}$
- Местный коэффициент трения $c_f = \frac{0,0578}{\sqrt[5]{Re_x}}$
- Коэффициент сопротивления трения (!) $c_{xтр} = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re}}$

- Как показывают экспериментальные данные, более точное значение числителя в формуле (1) равно 0,074. Незначительное отличие величины множителя свидетельствует в пользу принятого допущения о **совпадении законов турбулентного течения в трубах и в пограничном слое пластинки**

Характеристики	Ламинарный ПС	Турбулентный ПС
Толщина пограничного слоя δ	$\sim x^{0,5}$	$\sim x^{0,8}$
Толщина вытеснения δ^*	$\frac{3}{8}\delta$	$\frac{1}{8}\delta$
Толщина потери импульса δ^{**}	$\frac{39}{280}\delta$	$\frac{7}{72}\delta$