Свойства функции

Алгебра

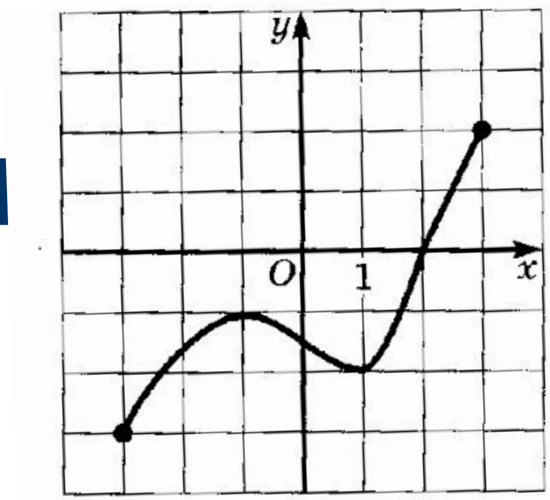
Урок – лекция

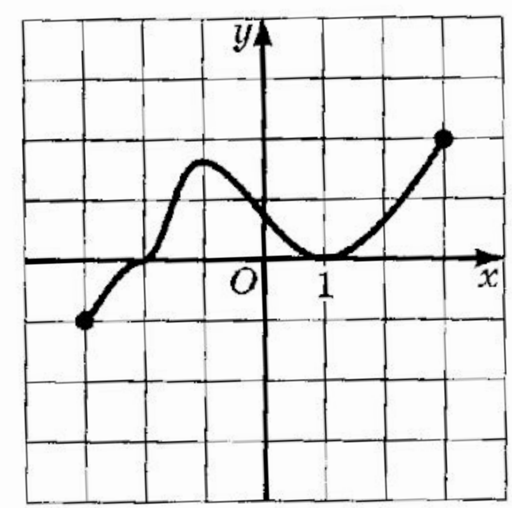
План

- Возрастание и убывание функции
- Ограниченность функции
- Наибольшее и наименьшее значение функции
- Максимум и минимум функции
- Четность и нечетность

Определение № 1

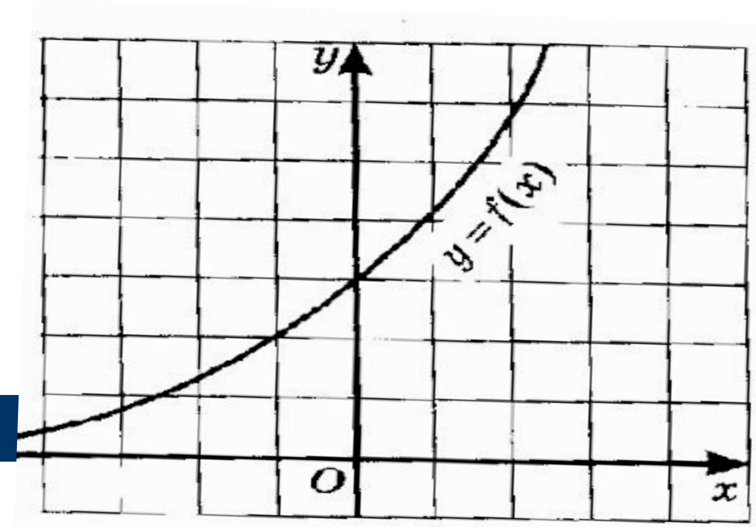
Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей** на множестве X , если для любых точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

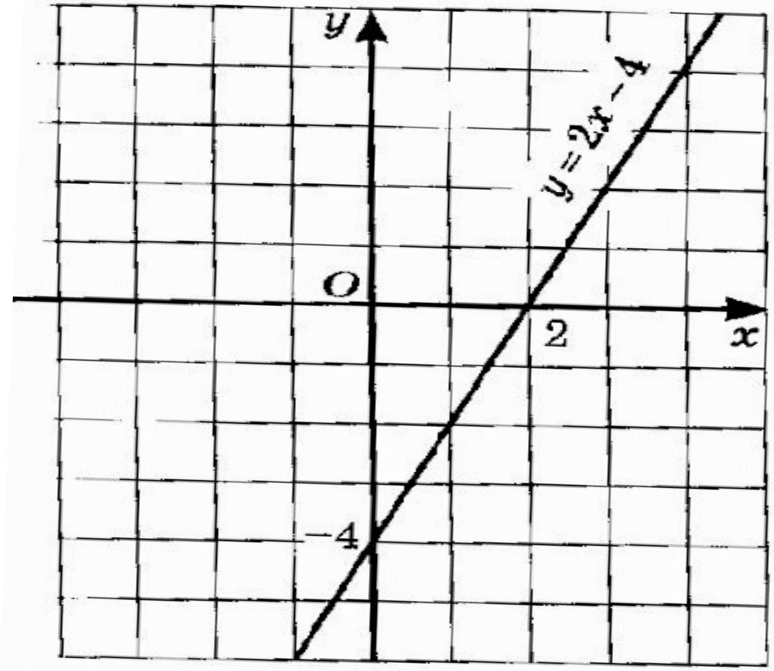




Возрастающая функция

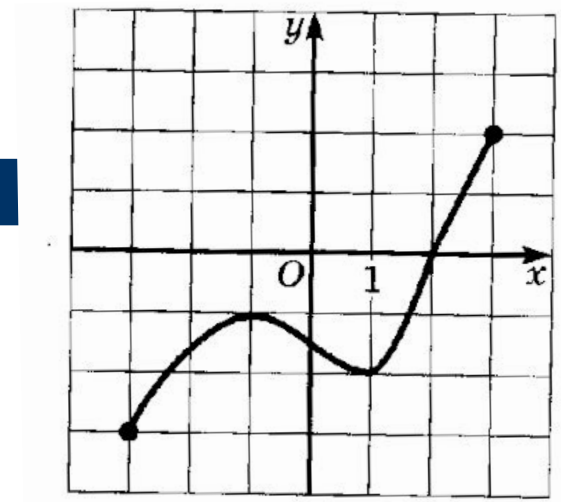
Функция возрастает, если **большему** значению аргумента соответствует **большее** значение функции.

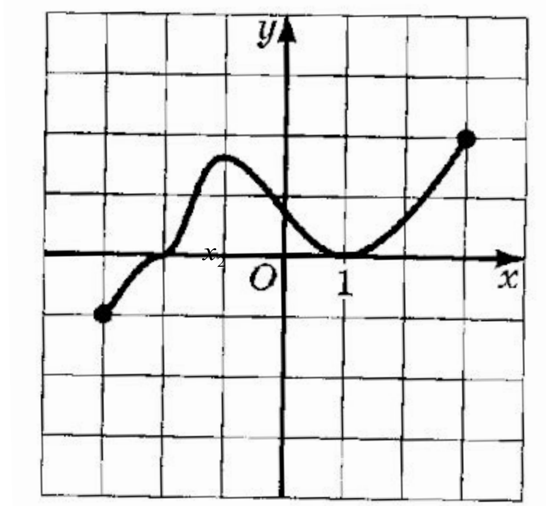




Определение № 2

Функцию $y= f(x)$ называют убывающей на множестве X , если для любых точек x_1 и x_2 из множества X, таких , что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.





Убывающая функция

Функция убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

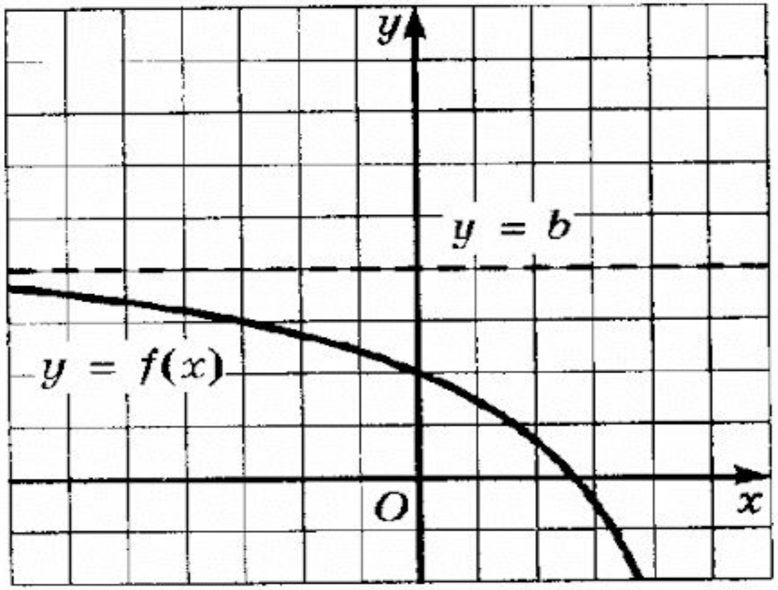


Рис. 197

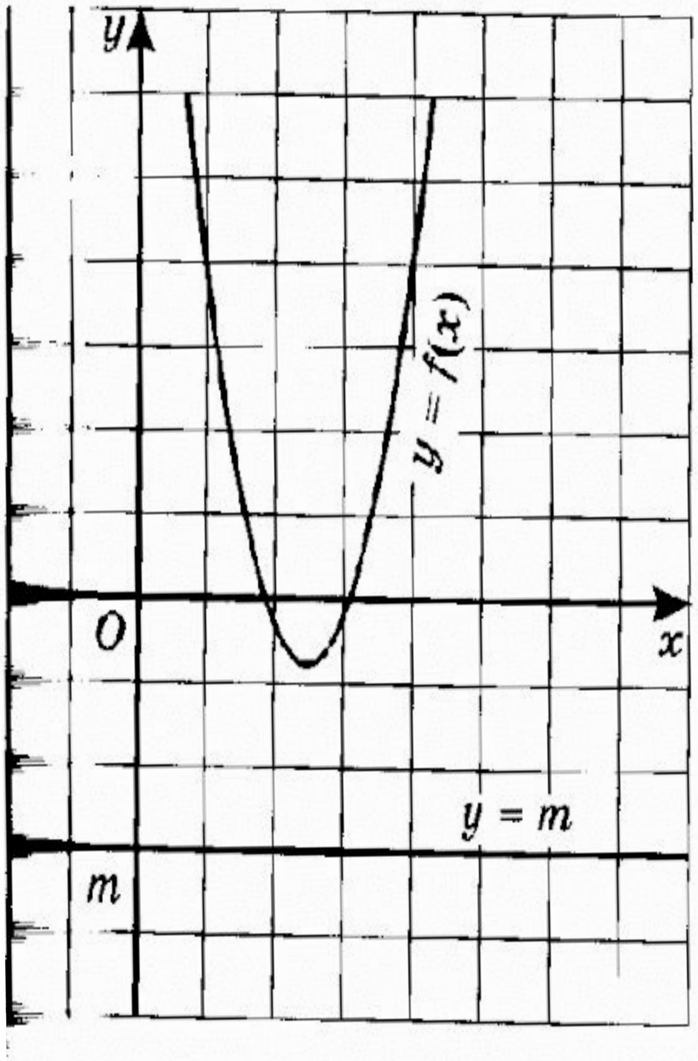
Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием монотонная функция, а исследование функции на возрастание или убывание называют исследованием функции на монотонность.

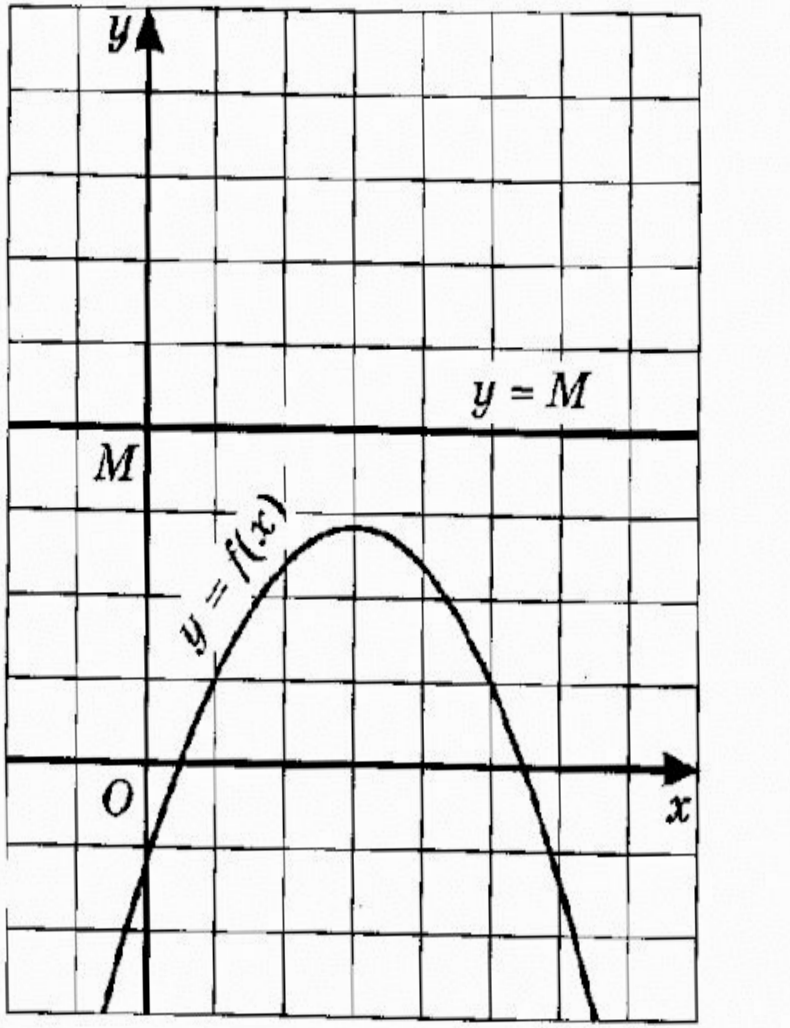
Определение № 3

Функцию $y = f(x)$ называют ограниченной снизу на множестве X, если все значения этой функции на множестве X больше некоторого числа, т.е., если существует такое число m, что для любого значения x выполняется неравенство $f(x) > m$

Определение № 4

Функцию $y = f(x)$ называют ограниченной сверху на множестве X , если все значения этой функции на множестве X меньше некоторого числа , т.е. , если существует такое число M , что для любого значения x выполняется неравенство $f(x) < M$


y
y = f(x)
O
x
y = m
m


y
y = M
M
y = f(x)
O
x

Если функция ограничена и снизу и сверху на всей области определения, то ее называют **ограниченной**

Определение № 5

Число m называют наименьшим значением функции $y=f(x)$ на множестве X , если:

- 1)во множестве X существует такая точка x_0 , что $f(x_0) = m$
- 2) для любого значения x из множества X выполняется неравенство

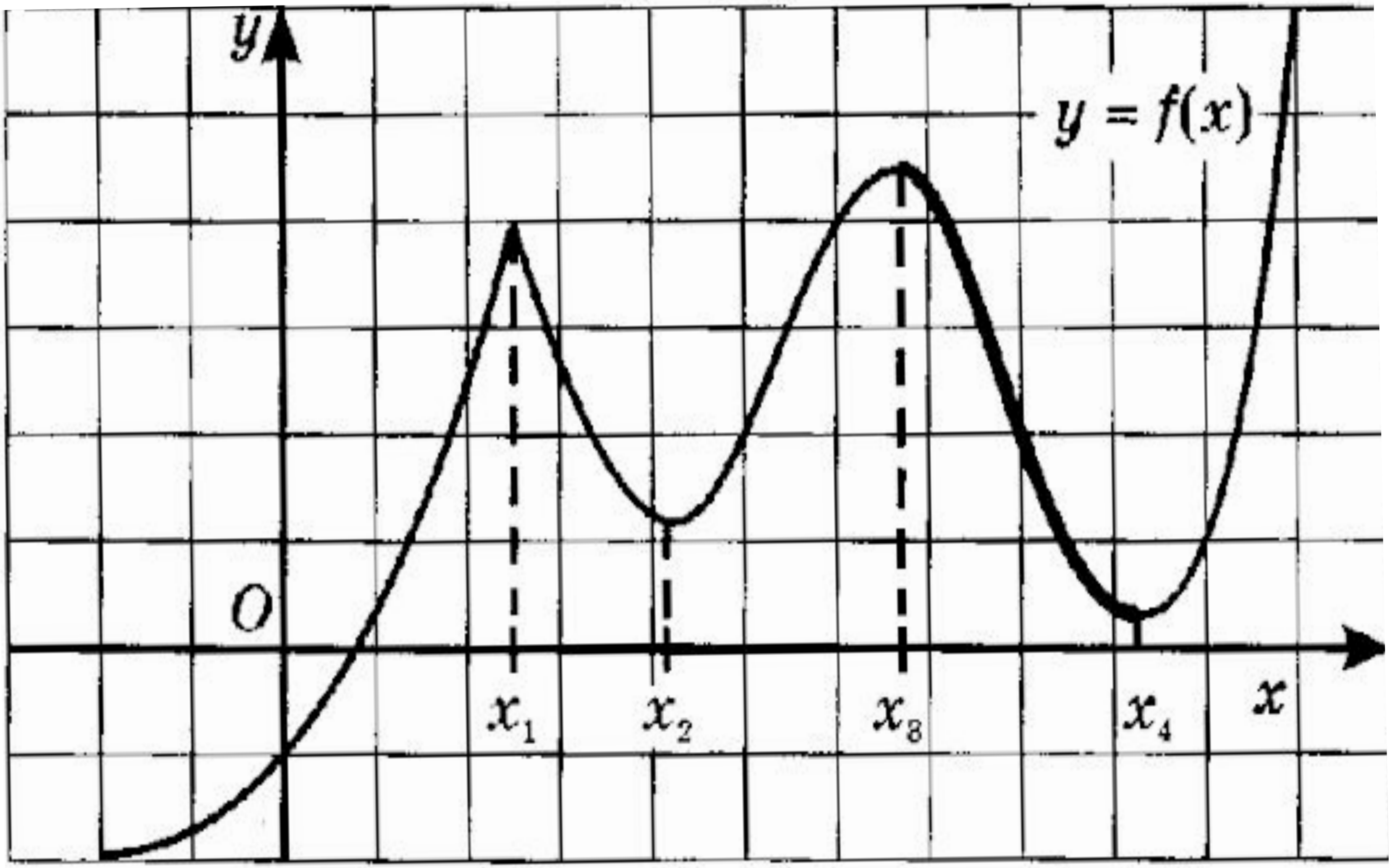
$$f(x) \geq f(x_0)$$

Определение № 6

Число т называют **набольшим** значением функции $y = f(x)$ на множестве X, если:

- 1)во множестве X существует такая точка, что $f(x_0) = m$
- 2) для любого значения x из множества X выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0)$$


y
y = f(x)
O
x₁
x₂
x₃
x₄
x

Если у функции существует $y_{наиб}$, то она ограничена сверху

Если у функции существует $y_{наим}$, то она ограничена снизу.

Определение № 7

x_0

Точку $\boldsymbol{x_0}$ называют точкой максимума функции $\boldsymbol{y = f(x)}$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $\boldsymbol{x_0}$) выполняется неравенство

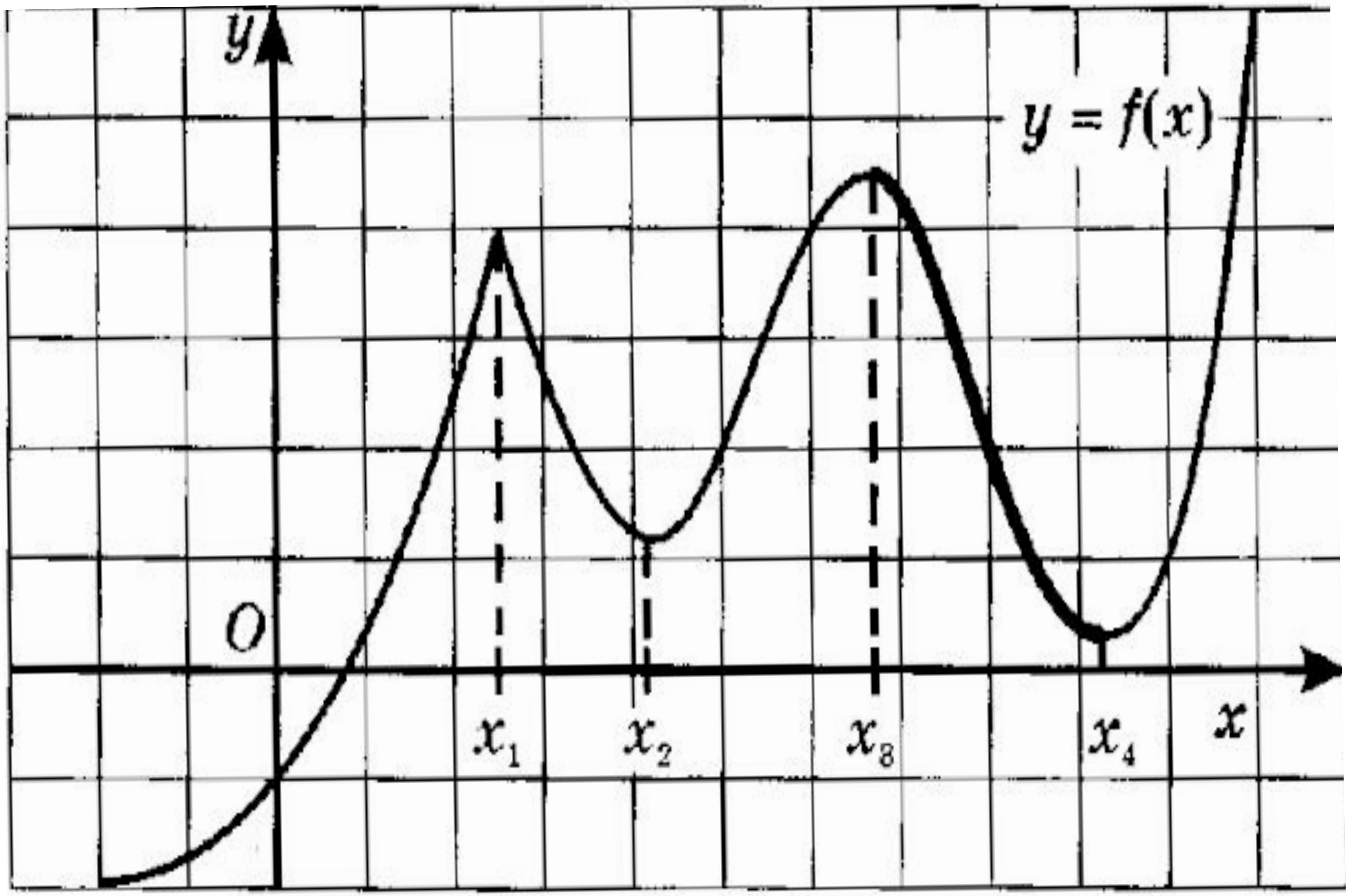
$$f(x) < f(x_0)$$

x_0

Точку $\boldsymbol{x_0}$ называют точкой минимума функции $\boldsymbol{y= f(x)}$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $\boldsymbol{x_0}$) выполняется неравенство

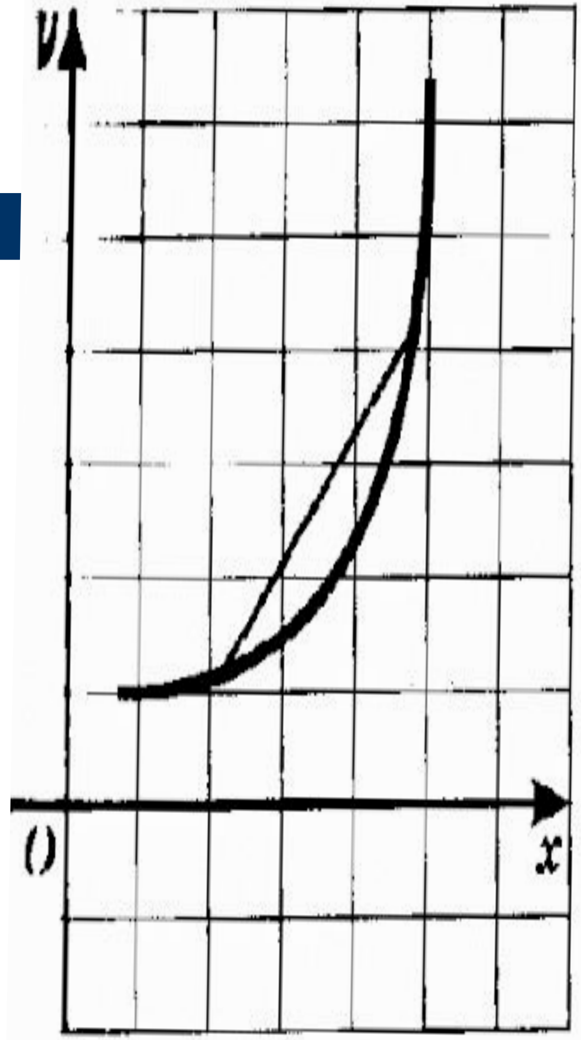
$$f(x) < f(x_0)$$

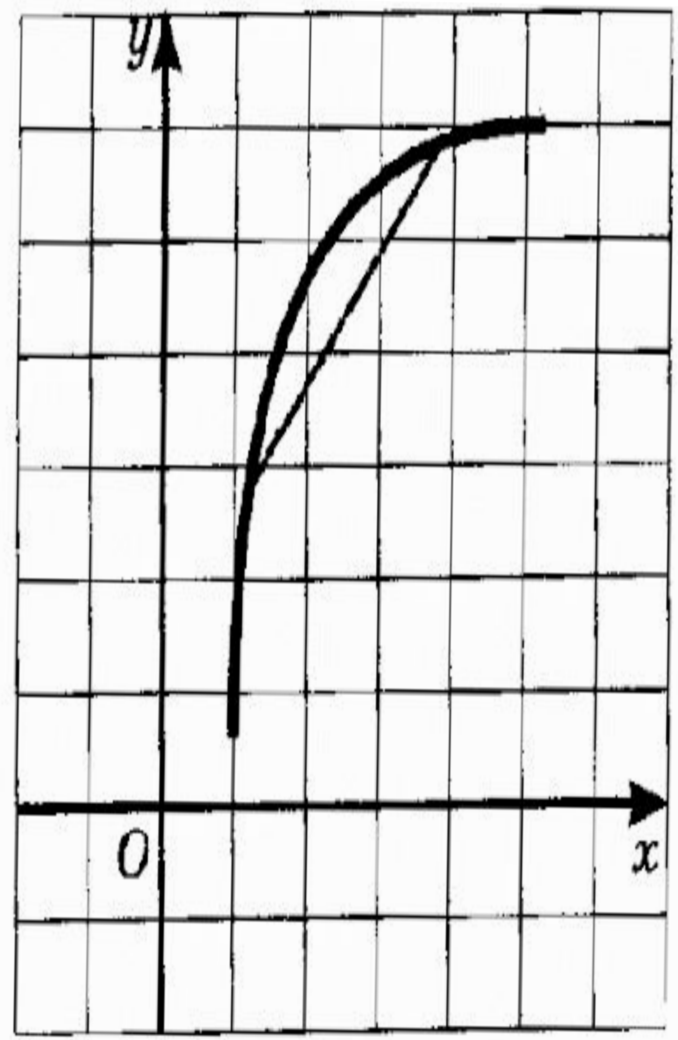
Точки максимума и минимума объединяют общим названием – точки экстремума


y
y = f(x)
O
x
x1
x2
x3
x4

Выпуклость функции

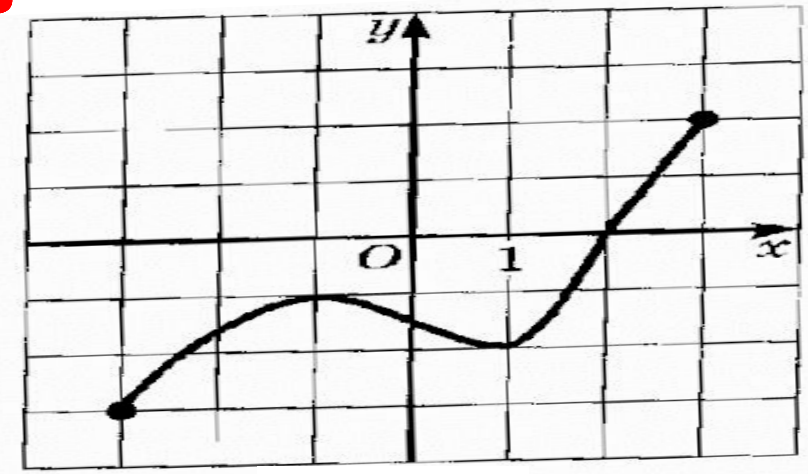
- Функция выпукла вниз на промежутке X, если, соединив любые две точки ее графика (с абсциссами из X) отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка.
- Функция выпукла вверх на промежутке X, если, соединив любые две точки ее графика (с абсциссами из X) отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка.

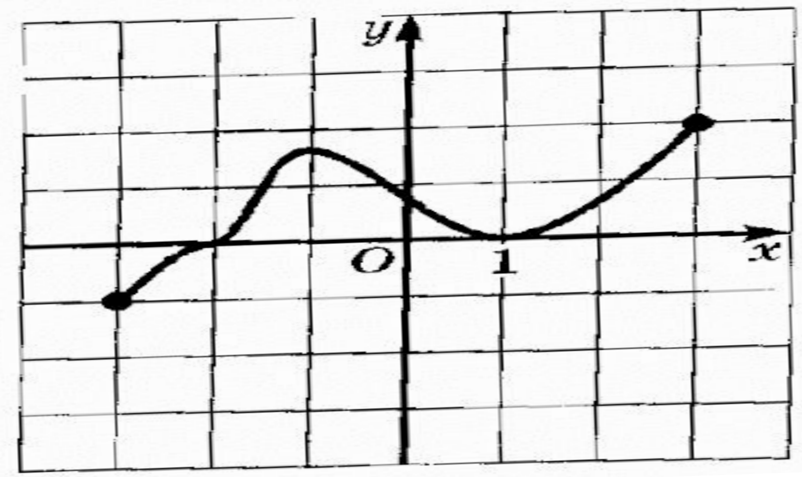

y
O
x

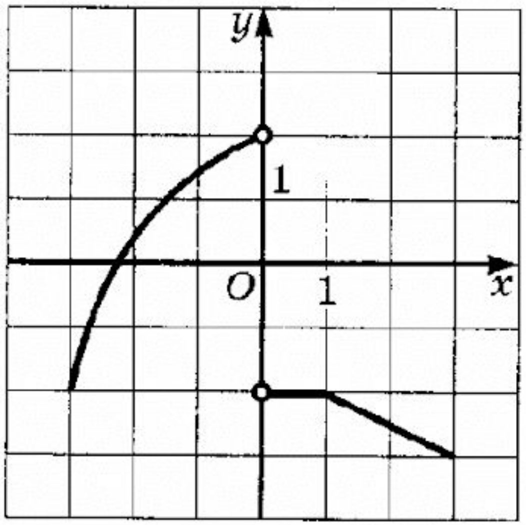

y
O
x

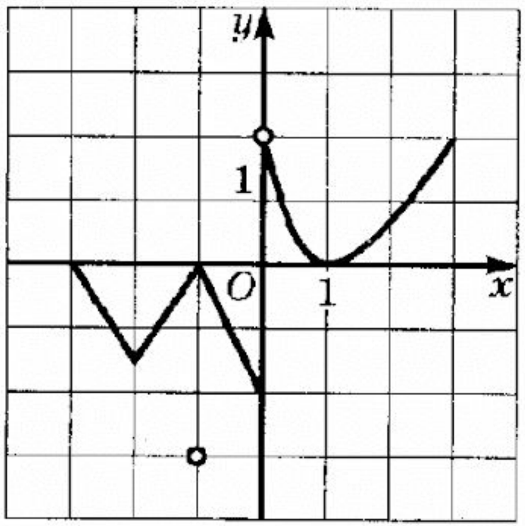
Непрерывность функции

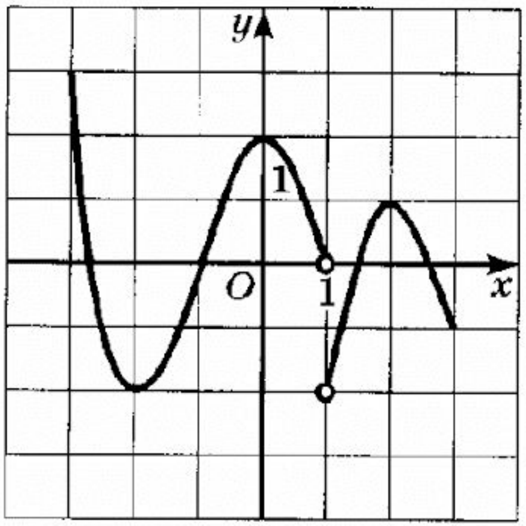
Непрерывность функции на отрезке ***X*** – означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва

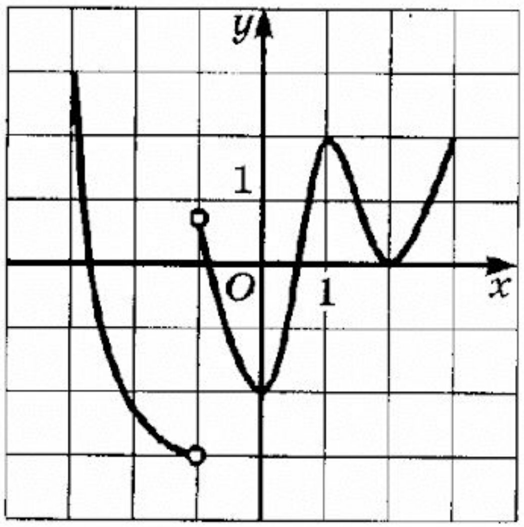





y
1
O
1
x


y
1
O
1
x


y
1
O
1
x


y
1
O
1
x

Определение 8

- Функцию ***y= f(x)*** называют четной, если для любого значения ***x*** из множества ***X*** выполняется равенство

$$f(-x) = f(x)$$

Пример 1

Пример

Исследовать на четность функцию: $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$

Решение:

1. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ – симметричное множество
2. $f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$
3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство f(-x)=f(x).

Таким образом, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ - четная функция

Определение 9

- Функцию y= f(x) называют нечетной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x)$$

Пример 2

- Исследовать на четность функцию: $y = x^3 - \frac{3}{x^5}$

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{3}{(-x)^5} = -x^3 - \frac{3}{-x^5} = -\left(x^3 - \frac{3}{x^5}\right)$$

2. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

Таким образом, $y = x^3 - \frac{3}{x^5}$ – нечетная функция

Пример 3

- Исследовать на четность функцию: $y=\frac{x-4}{x^2-9}$.

Решение:

1. $D(f)=(-\infty; -3)\cup(-3; 3) \cup (3; +\infty)$ – симметричное множество.

2. $f(-x)=\dfrac{(-x)-4}{(-x)^2-9} = -\dfrac{x+4}{x^2-9}$

3. Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x)=f(x)$, ни тождество $f(-x)=-f(x)$.

Например, $x=4$, $f(4)=0$, $f(-4)=-\frac{8}{7}$, то есть $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

Таким образом, функция не является ни четной ни нечетной.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$, $x \in X$ на четность

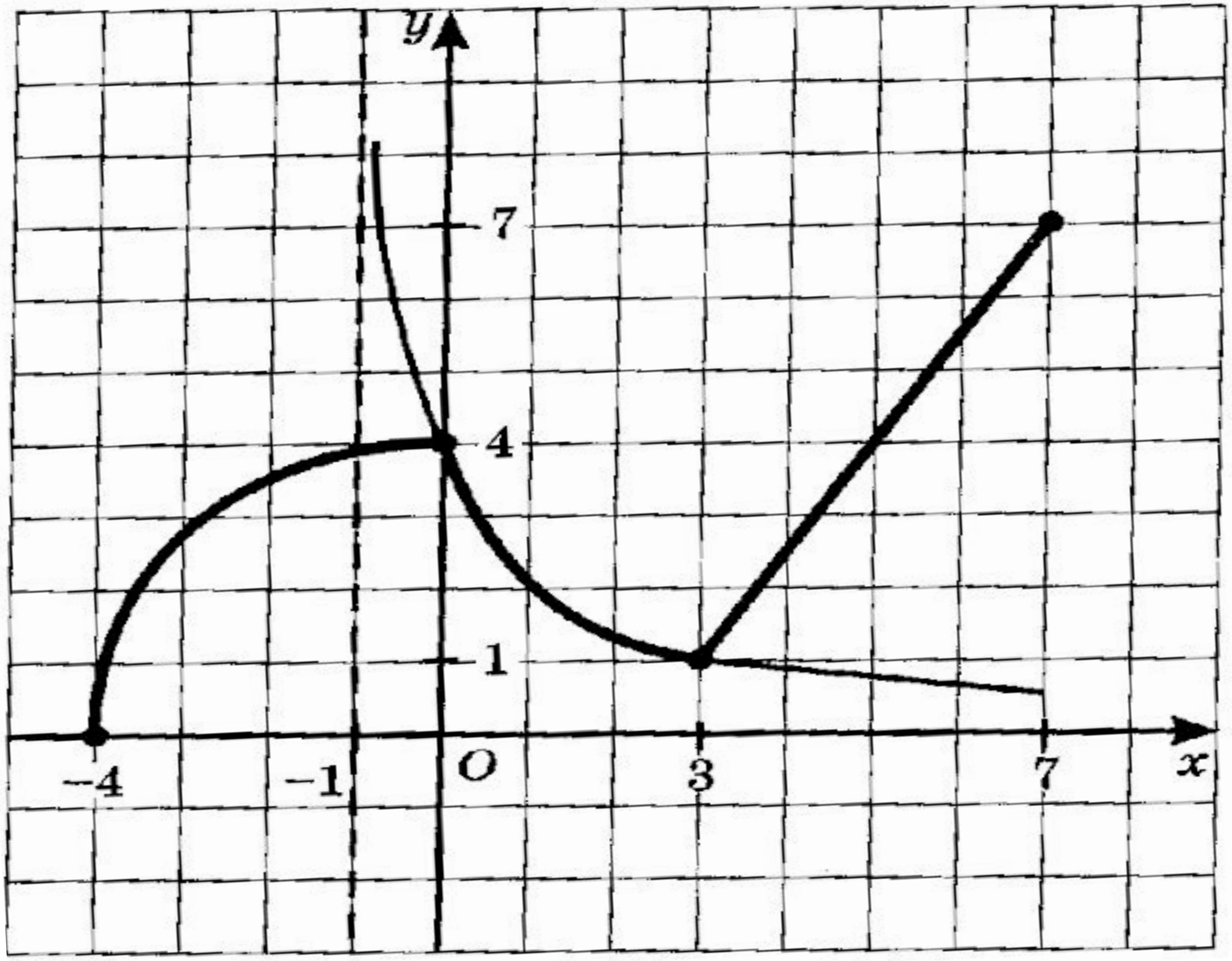
1. Установить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то объявить, что функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.
2. Составить выражение $f(-x)$.
3. Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
   а) если имеет место тождество $f(-x) = f(x)$, то функция четная;
   б) если имеет место тождество $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная;
   в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

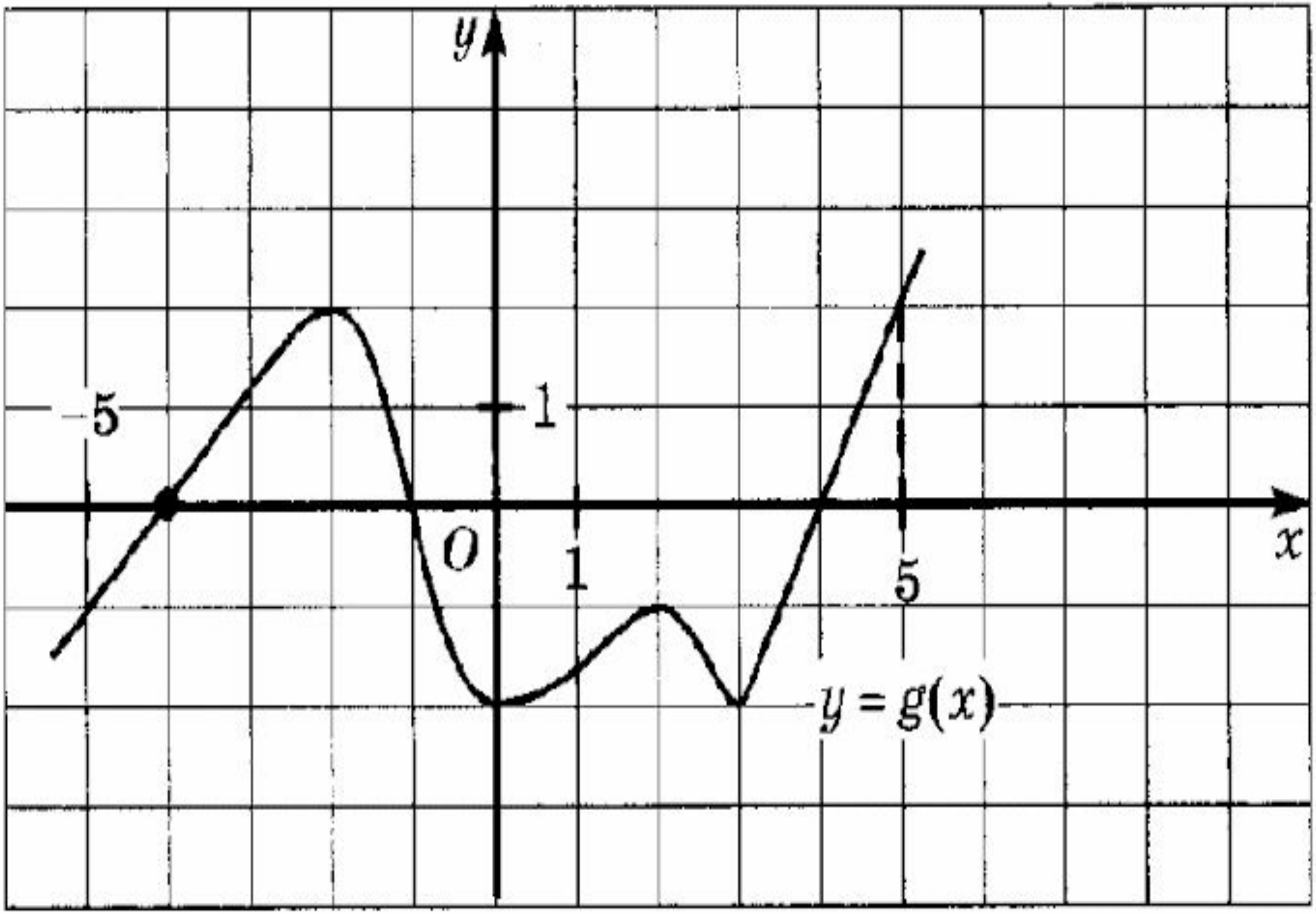
- Если график функции симметричен относительно оси ординат, то функция четная

- Если график функции симметричен относительно начала координат, то функция нечетная

Алгоритм исследования функции

- 1. Область определения функции
- 2. Четность , нечетность
- 3. Непрерывность
- 4. Выпуклость
- 5. Промежутки возрастания и убывания
- 6. Точки экстремума
- 7. Ограниченность функции
- 8. Наибольшее и наименьшее значение функции
- 9. Множество значений функции


y
7
4
1
−4
−1
O
3
7
x



y
x
O
1
1
−5
5
y = g(x)

Рассмотрим

основные правила

преобразования графиков

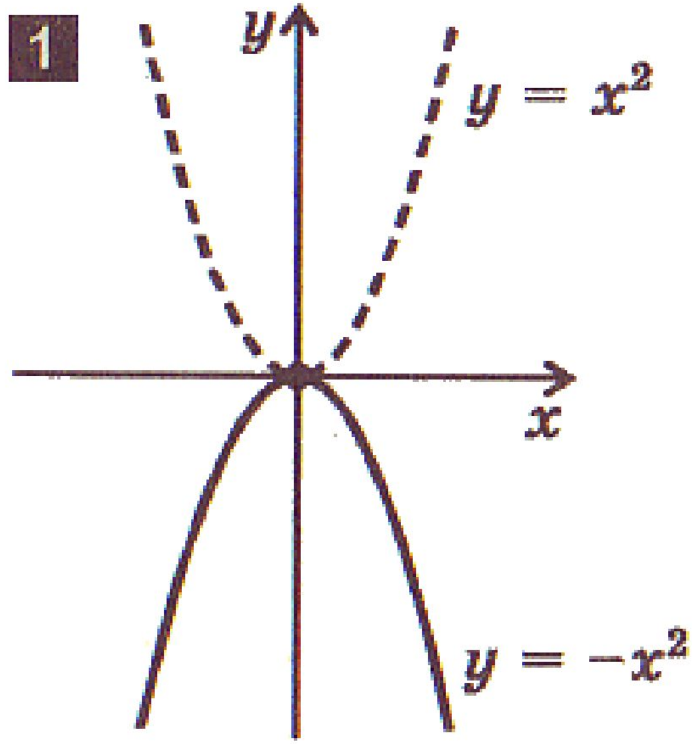
на примерах

элементарных функций

1) y=-f(x)

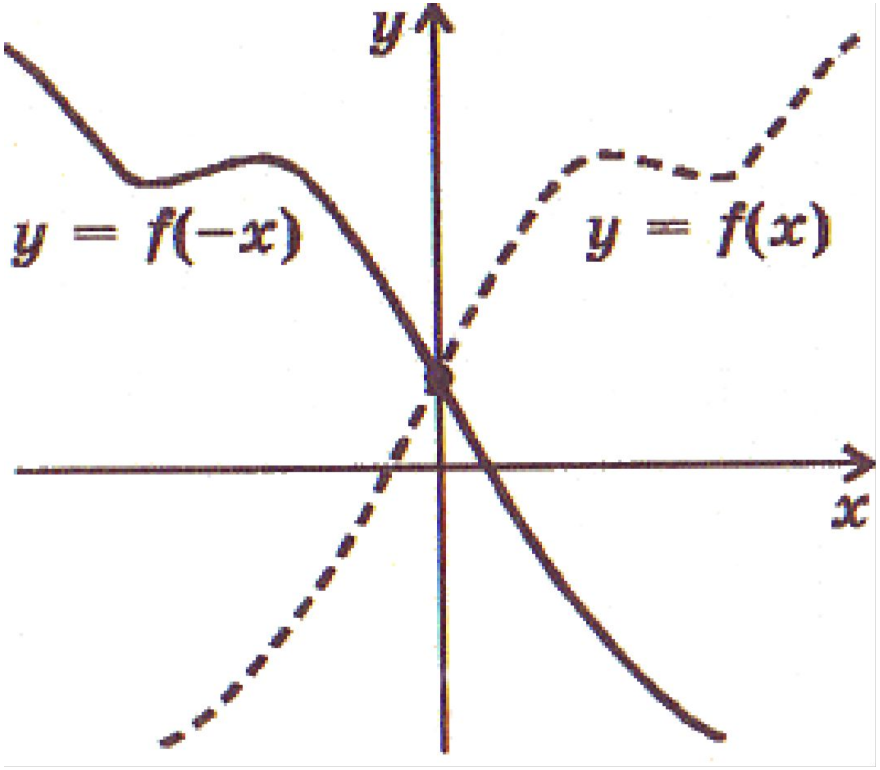
Симметрия относительно ОХ для y=f(x)

Примеры:



2) $y=f(-x)$

Симметрия относительно OY для $y=f(x)$



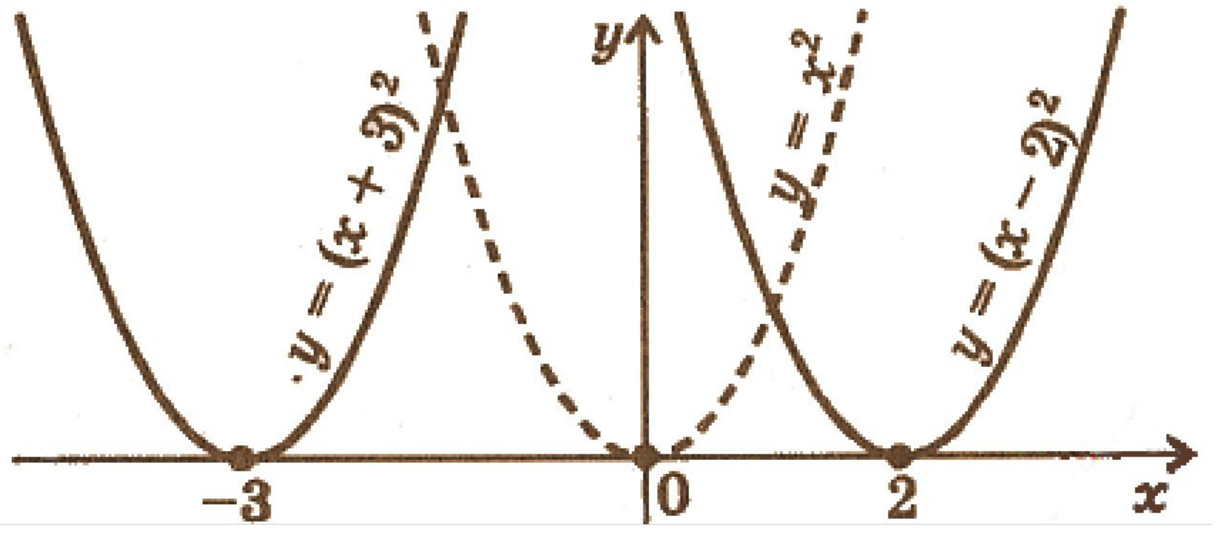
3) $y=f(x-a)$

Параллельный перенос вдоль ОХ
$y=f(x)$

влево при $a<0$ **вправо при $a>0$**

Примеры:

1



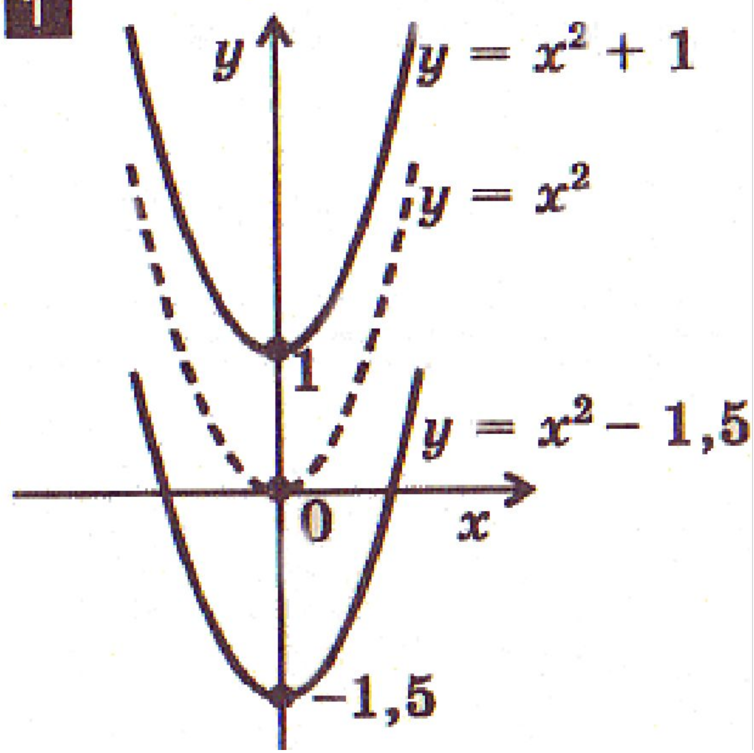
4) y=f(x)+b

Параллельный перенос вдоль OY
y=f(x)

вверх при b>0 **вниз при b<0.**

Примеры:

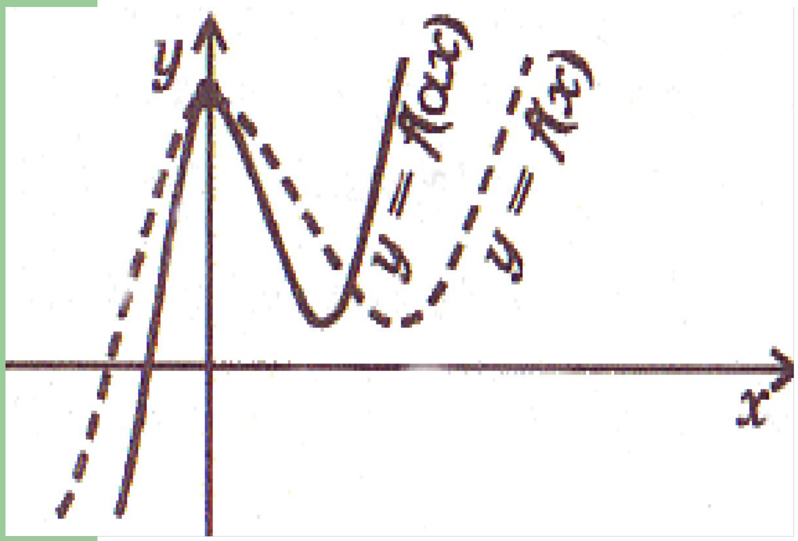
1



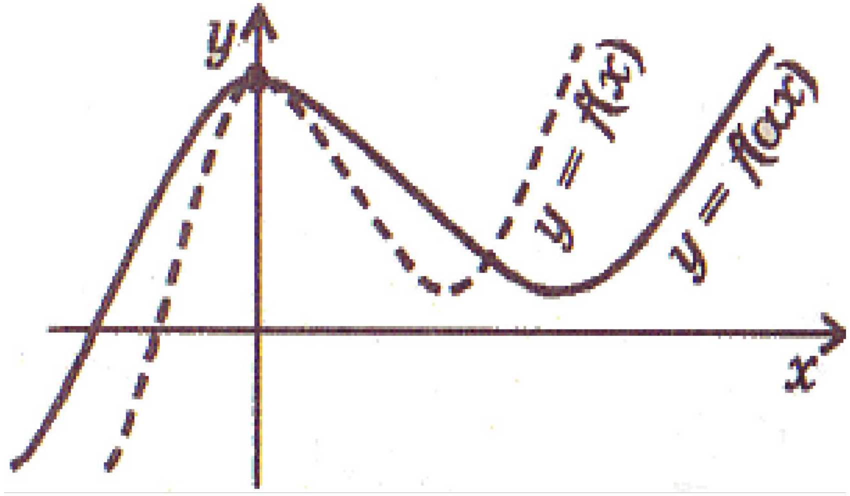
5) y=f(кx)

Сжатие или растяжение вдоль OX y=f(x)

k>1 сжатие



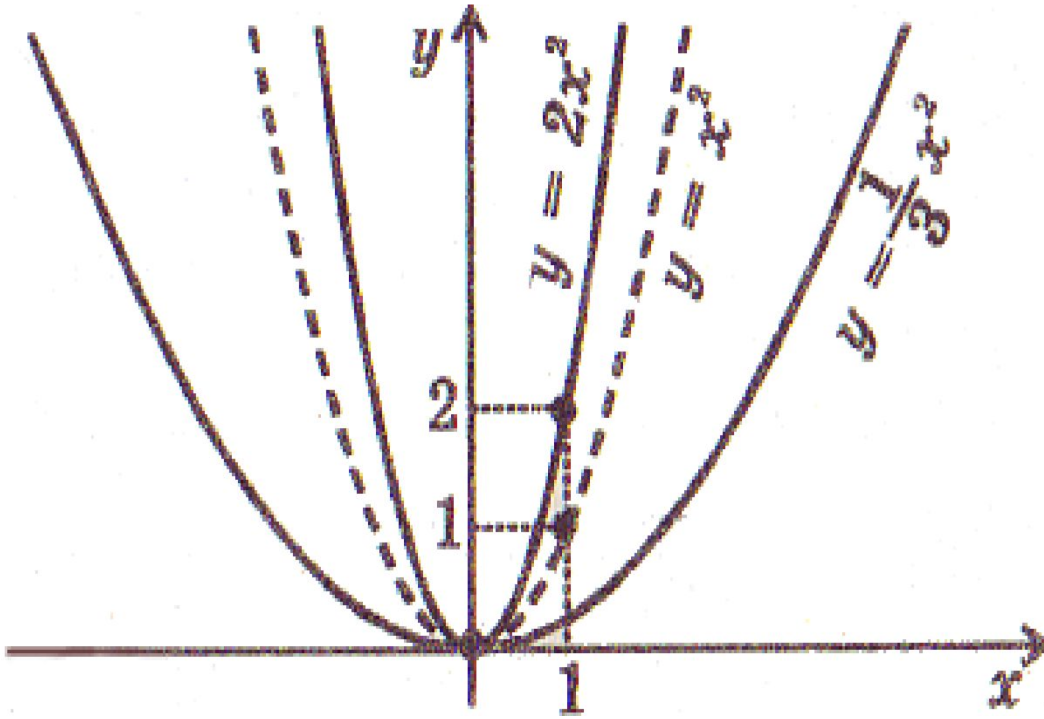
0<k<1 растяжение



6) y=kf(x)

Сжатие и растяжение вдоль OY
y=f(x)

k>1



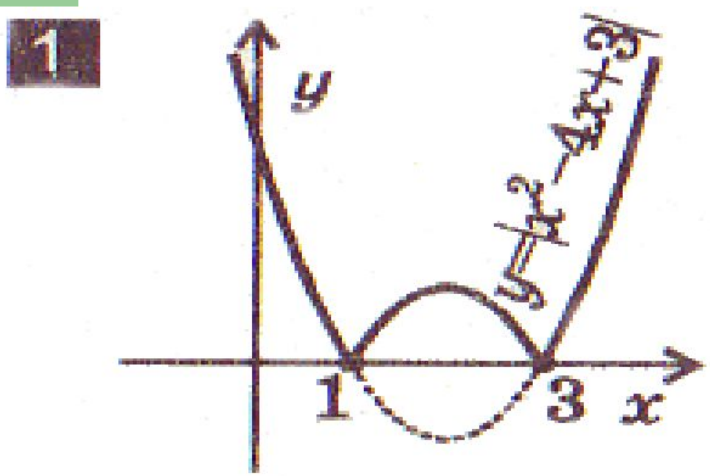
0<k<1

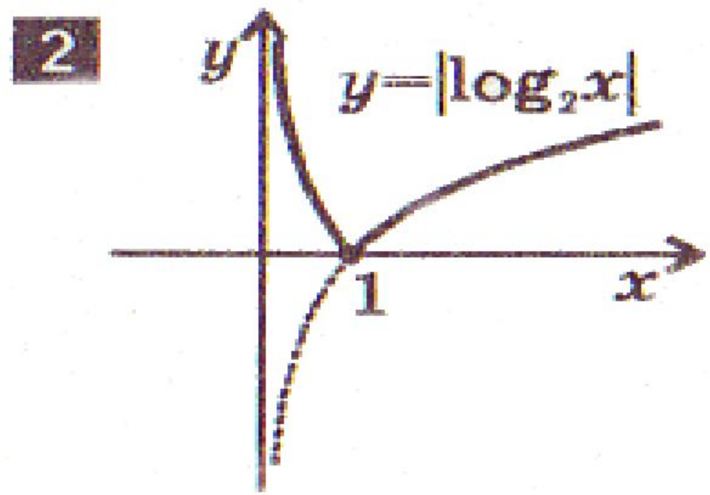
7) y=|f(x)|

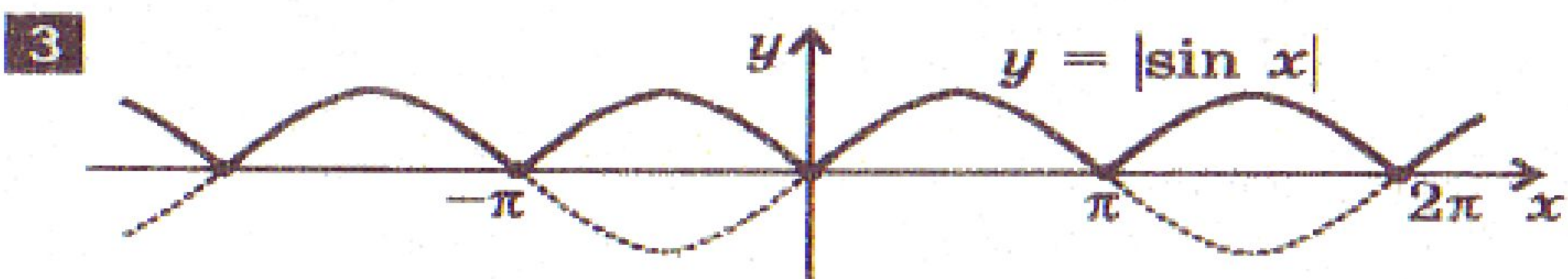
Части графика y=f(x),

лежащие ниже OX – симметрично

(вверх).







8) y=f(|x|)

Часть графика y=f(x), симметрично отображается относительно OY (влево).