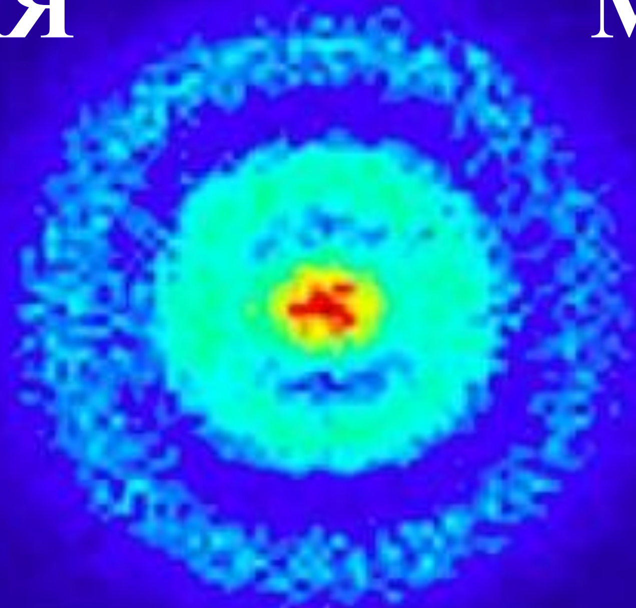
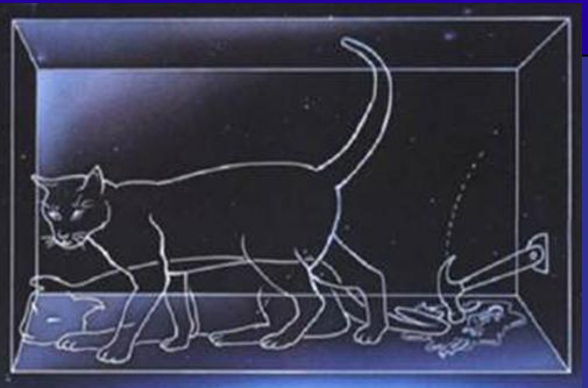
Нерелятивистская

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА





Чужков.Ю.П.

Доцент каф. физики

Канд. Физ. – мат. наук

План занятия

1. Гипотеза де Бройля.

2. Волновая функция. Ее статистический смысл.

3. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.

4. Частица в одномерной потенциальной яме.

5. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект.

6. Линейный гармонический осциллятор. Энергия нулевых колебаний.

Решение задач.

Гипотеза де Бройля

В 1924г де Бройль выдвинул гипотезу, что корпускулярно – волновой дуализм, который присущ свету, распространяется и на вещество.

Любой частице, обладающей импульсом, сопоставляется волновой процесс, длина волны которого определяется по формуле

$$\boxed{\lambda_{\text{Б}} = \frac{h}{p}}$$

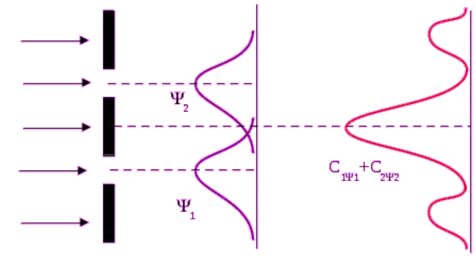
Длина волны де Бройля

Эта гипотеза была блестяще подтверждена опытом Дэвиссона и Джермери при наблюдении дифракции электронов на кристаллической решетке.

Гипотеза де Бройля явилась толчком к созданию в 1926 г Шредингером волнового уравнения квантовой механики.

Волновая функция (Ψ – функция)

Дифракционная картина для микрочастиц является проявлением статистической (вероятностной) закономерности поведения микрочастиц.



Волны вероятности

В 1926 г.немецкий физик Макс Борн предположил, что по волновому закону меняется не сама вероятность, а величина, названная амплитудой вероятности и обозначаемая Ψ(x,y,z,t) – ***волновая функция (Ψ – функция)***

Физический смысл имеет не сама Ψ – функция, а квадрат ее модуля $|\psi|^2$, которым задается интенсивность волн де Бройля.

$$\boxed{|\psi|^2 = \frac{dp}{dV}}$$

Плотность вероятности нахождения частицы в окрестности точки с координатами x,y,z

Уравнение Шредингера

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики сформулировано в 1926 г. Э. Шредингером.

Уравнение Шредингера, как и все основные уравнения физики (уравнения Ньютона, Максвелла) не выводится, а постулируется.

Отличие уравнения Шредингера от волны де Бройля состоит в том, что оно описывает поведение не свободной частицы, а частицы во внешнем силовом поле, например, в кулоновском поле ядра.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

Нестационарное уравнение Шредингера

$$\boxed{\nabla^2 = \Delta}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ - оператор Лапласа;

$$i = \sqrt{-1}$$

Мнимая единица

Уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (1)$$

$U = U(x, y, z, t)$ - функция координат и времени, имеющая смысл *эффективного потенциала* внешнего силового поля

Ψ(x,y,z,t) – функция, характеризующая состояние микрочастицы.

Если силовое поле, в котором движется частица, стационарно, то потенциал не зависит от времени и функция U имеет смысл потенциальной энергии взаимодействия силового поля и частицы.

В этом случае ψ- функция распадается на два множителя, один из которых зависит только от координат, другой – от времени:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

После подстановки в уравнение (1) получаем стационарное уравнение

Стационарное уравнение Шредингера

$$\boxed{\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0}$$

$U = U(x, y, z)$ - потенциальная энергия;

E – энергия частицы; m – масса частицы

Ψ – функция должна удовлетворять так называемым стандартным условиям: должна быть однозначной, непрерывной, гладкой, конечной и иметь непрерывную и конечную производную.

Кроме стандартных условий есть еще чисто физическое условие – *условие нормировки*

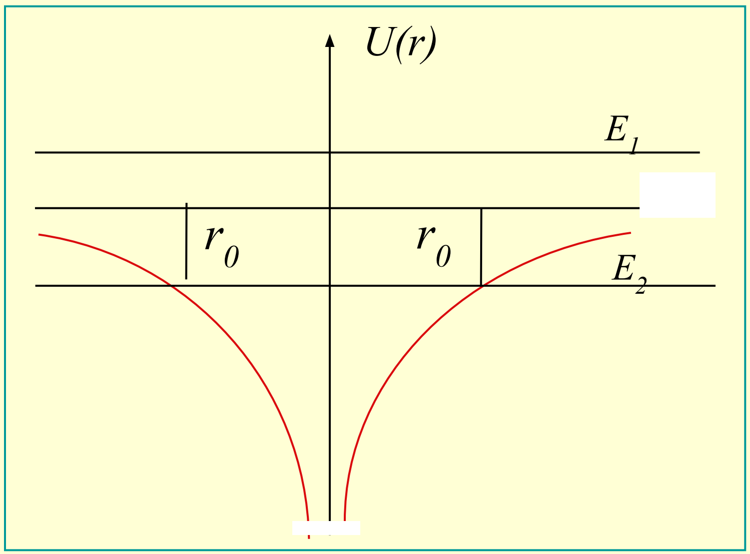
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1}$$

Если частица существует, то вероятность ее нахождения в объеме от -∞ до +∞ должна быть равна единице.

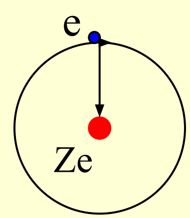
Частица в одномерной потенциальной яме

Потенциальная яма – область пространства, где присутствует локальный минимум потенциальной энергии частицы.

Потенциальная яма - это кулоновская яма.



$$U(r) = -k\frac{Ze \cdot e}{r}$$



Потенциальная энергия электрона в атоме (кулоновское взаимодействие)

$U(r) \sim -1/r$ *гипербола*

Кулоновская яма имеет две особенности:

Во - первых, кулоновская яма – бесконечно глубокая;

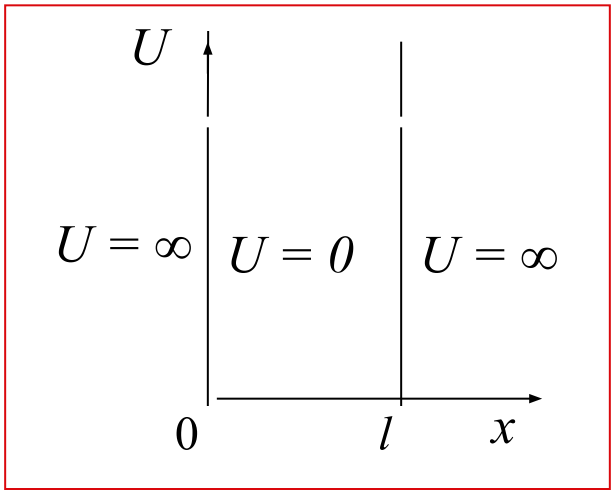
Во - вторых, связанное состояние электрона в этой яме возможно только при отрицательных энергиях.

Частица в одномерной потенциальной яме

Решение уравнения Шредингера позволяет найти собственные значения энергии и соответствующие им собственные функции.

Рассмотрим самый простой случай – частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме.

Частица может двигаться только вдоль оси x. Ширина ямы – l.



При $0 < x < l$ $\quad U = 0$

При $x \leq 0$ и $x \geq l$ $\quad U = \infty$

Поскольку Ψ зависит только от x стационарное уравнение Шредингера имеет вид:

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0}$$

В пределах ямы

$U = 0$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0}$$

Введено обозначение

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$$

Частица в одномерной потенциальной яме

Получили однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0}$$ или $$\boxed{\psi''+k^2\psi=0}$$

Решение этого уравнения имеет вид: $$\boxed{\psi(x)=A\sin(kx+\alpha)}$$

Из условий непрерывности следует, что на границах ямы:

$$\psi(0)=0 \Rightarrow \alpha=0 \qquad \psi(x)=A\sin kx$$

$$\psi(l)=A\sin kl=0$$ Это условие выполняется только при

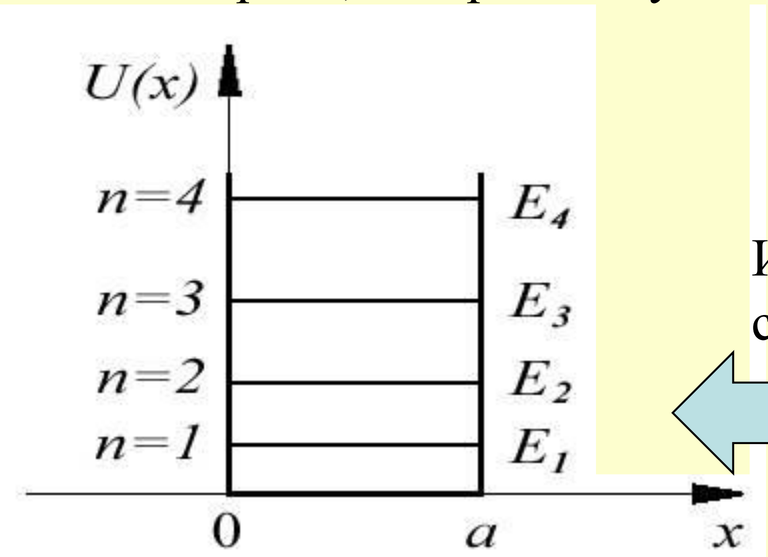
$$kl=\pm n\pi$$

$$\boxed{k=\frac{n\pi}{l}}$$ $n=1,2,3,\ldots$ При $n=0$ решение лишено физического смысла

Квантование энергии частицы в одномерной потенциальной яме

В уравнение Шредингера входит в качестве параметра полная энергия частицы Е. Уравнение Шредингера имеет решения, удовлетворяющие стандартным условиям, не при любых значениях параметра (энергии), а лишь при некоторых избранных значениях (собственных значениях).

Ниже будут рассмотрены дискретные спектры собственных значений энергии, которые могут быть пронумерованы $E_1, E_2, E_3 \ldots$



$$\boxed{k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$\boxed{k = \frac{n\pi}{l}}$$

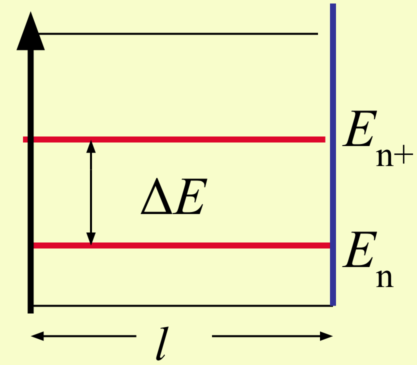
Из этих соотношений находятся собственные значения энергии E_n

$$\boxed{E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Квантование энергии частицы в одномерной потенциальной яме

Расстояние между соседними уровнями

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1) \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{ml^2}n$$



Расстояние между соседними уровнями сильно зависит от массы частицы ***m*** *и размеров потенциальной ямы* ***l****.*

Два важных обстоятельства:

1. Частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками не может иметь энергию меньше минимальной, равной

$$\boxed{E_{\min} = \frac{\pi^2\hbar}{2ml^2}\cdot}$$

2. На ширине ямы укладывается целое число полуволн

$$\boxed{l = n\frac{\lambda}{2}}$$

(Не зависит от ширины ямы!)

Задача № 1

Частица массой $0{,}67\cdot10^{-26}$ кг находится в одномерном потенциальном ящике шириной 7 нм с бесконечно высокими стенками. Найти в эВ энергию частицы, если она находится в третьем возбужденном состоянии.

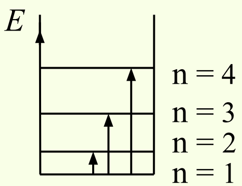
Дано: $m = 0{,}67\cdot10^{-26}$ кг; $l = 7\cdot10^{-9}$ м; $n = 4$.

Найти: E.

Решение

1. Энергия частицы в потенциальном ящике на n-ом уровне:

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$$



2. Третье возбужденное состояние соответствует четвертому энергетическому уровню $n = 4$

3. Подставляем числовые данные

$$E = \frac{\left(3{,}14\cdot1{,}05\cdot10^{-34}\cdot4\right)^2}{2\cdot0{,}67\cdot10^{-26}\left(7\cdot10^{-9}\right)^2} = 2{,}65\cdot10^{-24}\ \text{Дж} = \frac{2{,}65\cdot10^{-24}}{1.6\cdot10^{-19}} = 1{,}66\cdot10^{-5}\ \text{эВ}$$

Ответ: $E = 1{,}66\cdot10^{-5}$ эВ

Задача № 2

Вычислить энергию, которая необходима , чтобы перевести микрочастицу массой $0{,}2.10^{-25}$ кг, заключенную в одномерном потенциальном ящике шириной 948 нм со второго энергетического уровня на третий. Ответ а эВ.

Дано: $m = 0{,}2 \cdot 10^{-25}$ кг; $l = 95 \cdot 10^{-9}$ м; $n_1 = 2$; $n_2 = 3$.

Найти: ΔE

Решение

1. *Расстояние между соседними уровнями:*

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(2n+1)$$

2. Подставим числовые данные

$$\Delta E = \frac{\left(3.14 \cdot 1.05 \cdot 10^{-34}\right)^2 (2 \cdot 2 + 1)}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-25} \left(95 \cdot 10^{-9}\right)^2 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}94 \cdot 10^{-6}\ эВ$$

Ответ: $\boxed{\Delta E = 0{,}94 \cdot 10^{-6}\ эВ}$

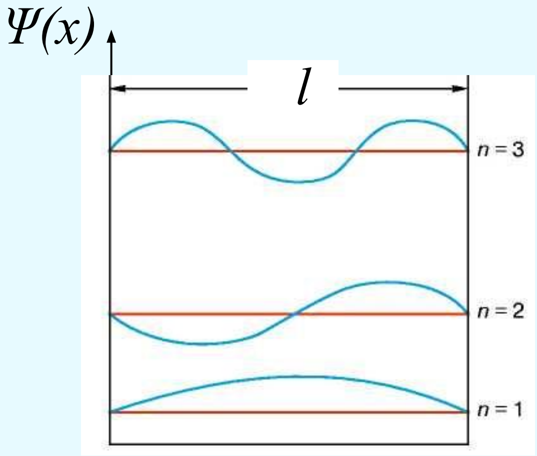
Собственные значения Ψ – функции частицы в потенциальной яме

Решение уравнения Шредингера:

$$\boxed{\psi(x) = A\sin(kx + \alpha)}$$

С учетом граничных условий $\psi(x) = A\sin kx$ $(\alpha = 0)$

После подстановки значения k *собственное значение функции*



$$\boxed{l = n\frac{\lambda}{2}}$$

$$\boxed{\psi(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}}$$

$$\boxed{\int_0^l |\psi(x)|^2 dx = 1}$$

Условие нормировки

$$A^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$$\boxed{\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}}$$

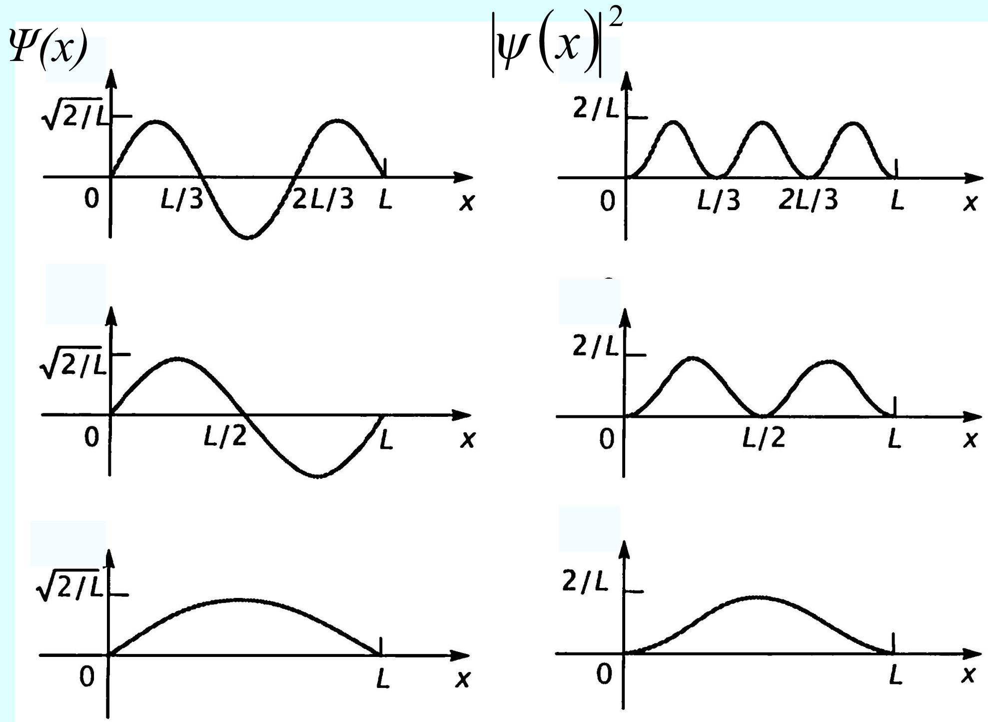
Плотность вероятности нахождения частицы в одномерной яме

Собственное значение Ψ – функции частицы в одномерной потенциальной яме (решение уравнения Шредингера)

$$\boxed{\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}}$$

$$\boxed{|\psi(x)|^2=\frac{2}{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}}$$

Плотность вероятности нахождения частицы в одномерной потенциальной яме



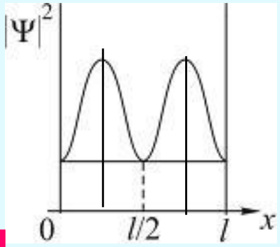
На ширине ямы – целое число волн

$$\boxed{l = n\cdot\lambda/2}$$

Вероятность обнаружения частицы в потенциальной яме

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\left|\psi(x)\right|^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l}$$



$$\left|\psi(x)\right|^2 = \frac{dp}{dx}$$

Для одномерной ямы

$$p = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi(x)\right|^2 dx$$

$$p = \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx$$

Тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

$$p = \frac{2}{2l} \left(\int_0^l dx - \int_0^l \cos \frac{2n\pi x}{l} dx\right)$$

$$p = \frac{1}{l}\left[l - \frac{l}{2n\pi}\left(\sin \frac{2n\pi}{l} \cdot l - \sin \frac{2n\pi}{l} \cdot 0 \right)\right]$$

$$p = 1 - \frac{\sin n\pi}{2n\pi} = 1$$

Вероятность нахождения частицы в яме равна 1

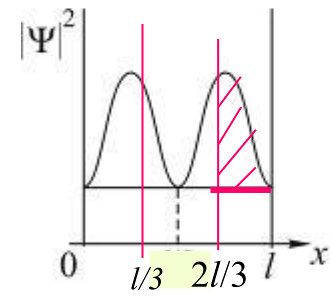
*На практике ищут вероятность на **n**-ом уровне в определенной области ширины ямы*

Задача № 3

Частица массой $0{,}91.10^{-30}$кг находится в потенциальном ящике шириной *l*. Определить вероятность обнаружения частицы в первом возбужденном состоянии в третьей *l* /3 ящика

Дано: $m = 0{,}91\cdot10^{-30}$ кг; $2/3l < x < l$; $n = 2$.

Найти: p



Решение

1. Вероятность обнаружения частицы:

$$p = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \qquad p = \frac{2}{l}\int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx$$

2. Воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\boxed{\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)}$$

$$\boxed{p = \frac{2}{l}\left[\int_{2l/3}^{l} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx\right]}$$

$$\boxed{p = \frac{2}{2l}\left[\int_{2l/3}^{l} dx - \int_{2l/3}^{l} \cos\frac{2n\pi x}{l} dx\right]}$$

Задача № 3

3. Произведем интегрирование

$$p = \frac{1}{l}\left[\left(l - 2l/3\right) - \frac{l}{2\pi n}\left(\sin\frac{2n\pi}{l}\cdot l - \sin\frac{2n\pi}{l}\cdot 2l/3\right)\right]$$

4. Проведем вычисления

$$p = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin 4\pi - \sin\frac{8\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} = 0.4$$

Ответ: Вероятность обнаружить частицу в последней трети ширины ящика равна 0,4 (40%)

Тест 1

Ширину потенциальной ямы увеличили в 2 раза.

Сколько полуволн будет на 7 энергетическом уровне?

Тест 2

Какова размерность волновой Ψ – функции?

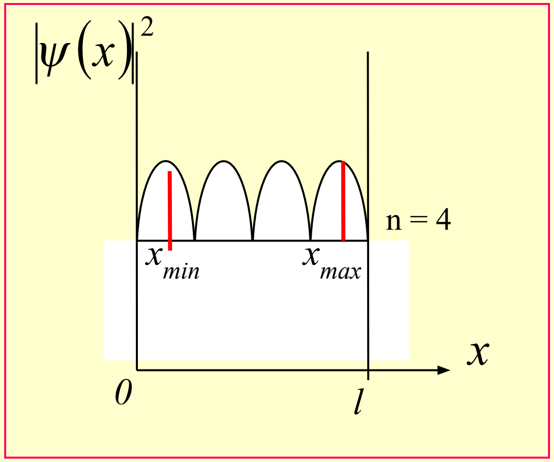
Задача № 4

Частица помещена в одномерной потенциальной яме шириной *l*. Определить максимальную координату точки, плотность вероятности нахождения частицы в которой максимальна. Частица находится в третьем возбужденном состоянии Ответ дать в долях *l*.

Дано: n = 4; $\left|\psi(x)\right|^2 = \max$

Найти: x_{max}/l

Решение.



1. $$\boxed{\left|\psi(x)\right|^2 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}}$$

Плотность вероятности нахождения частицы

2. Максимальное значение : $$\sin^2\frac{n\pi x}{l} = 1$$

3. $$\sin\frac{n\pi x}{l} = 1 \Rightarrow \frac{n\pi x}{l} = N\frac{\pi}{2}$$ N = 7 – соответствует $x_{\max}$

4. Приравнивая, находим максимальную координату точки, где $\left|\psi(x)\right|^2 = \max$

$$x_{\max} = \frac{7}{8}l = 0{,}875l$$

Второй способ: находится x_{min} (для первого *max)*

$$\frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{\min} = \frac{l}{2n} = \frac{1}{8}l \qquad x_{\max} = l - x_{\min} = 0{,}875l$$

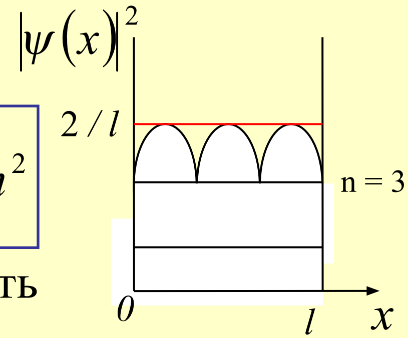
Ответ: $x_{\max} = 0{,}875l$

Задача № 5

Частица массой $0{,}1 \cdot 10^{-29}$ кг находится во втором возбужденном состоянии в одномерной потенциальной яме с вертикальными стенками. Максимальное значение плотности вероятности нахождения частицы равна $0{,}15 \cdot 10^{11}$ м$^{-1}$. Найти энергию частицы в данном состоянии. Ответ дать в эВ.

Дано: $m = 0{,}1 \cdot 10^{-29}$ кг; $n = 3$; $\left|\psi(x)\right|^2_{\max} = 0{,}15 \cdot 10^{11}$ м$^{-1}$

Найти: E



Решение **1**. Энергия частицы в потенциальной яме

$$\boxed{E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2}$$

2. Ширина ямы l не задана. Она может быть выражена через плотность вероятности, максимальное значение которой дано

$$\boxed{\left|\psi(x)\right|^2 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}} \qquad \boxed{\left|\psi(x)\right|^2_{\max} = \frac{2}{l}} \qquad \left(\sin\frac{n\pi x}{l} = 1\right) \qquad \boxed{l = \frac{2}{\left|\psi(x)\right|^2_{\max}}}$$

3. После подстановки получим формулу для расчета энергии

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2 \left(\left|\psi(x)\right|^2\right)^2}{8m}$$

4. Расчет

$$E = \frac{\left(3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} 3 \cdot 0{,}15 \cdot 10^{11}\right)^2}{8 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-29} 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 172\,эВ$$

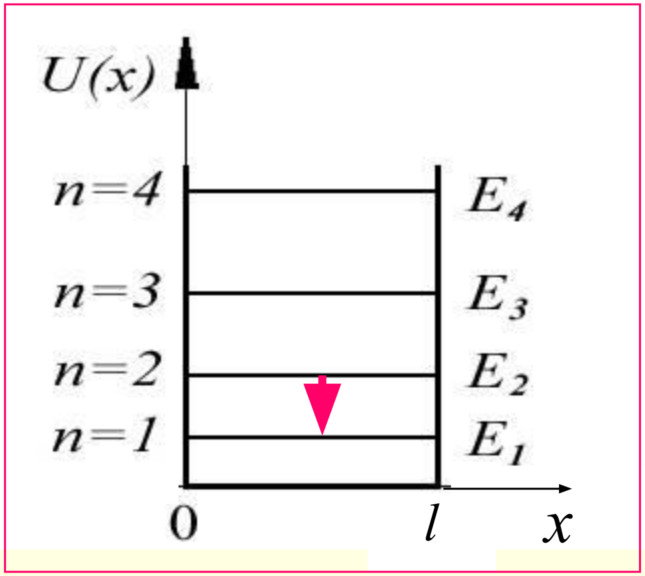
Ответ: E = 172 эВ

Задача № 6

Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной 1 нм с бесконечно высокими стенками. Определить минимальную разность энергетических уровней электрона, выразив ее в электронвольтах.

Дано: $m = 0{,}91 \cdot 10^{-30}$ кг; l = 1нм = 10^{-9} м; ΔE - min

Найти: ΔE



Решение: **1.** Расстояние между соседними энергетическими уровнями

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(2n+1)$$

2. Минимальная разность энергетических уровней соответствует переходу между первым и вторым уровнями (n = 1)

$$\Delta E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot 3$$

3. Расчет:

$$\Delta E_n = \frac{(3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 0{,}91 \cdot 10^{-30} (10^{-9})^2} \frac{(2+1)}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}12 эВ$$

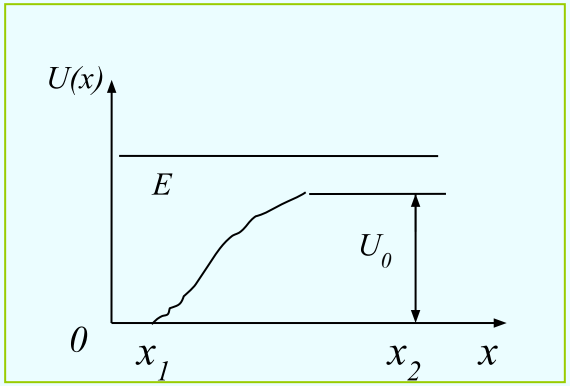
Ответ: ΔE = 1,12 эВ

Потенциальный барьер

В области пространства, где нет потенциальных ям, связанные стационарные состояния невозможны, в этом случае состояния частиц являются нелокализованными, а их энергия – не дискретна и может быть любой.

Односторонний потенциальный барьер

Если моноэнергетический пучок частиц попадает в тормозящее силовое поле, то кинетическая энергия частиц по мере их торможения уменьшается, а потенциальная – возрастает. Такое силовое поле называется потенциальным барьером.



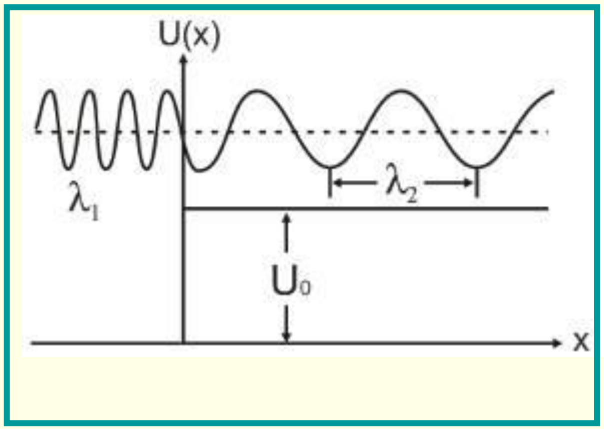
В области потенциального барьера микрочастицы проявляют свои волновые свойства.

Во-первых, при замедлении частиц уменьшается их скорость, что приводит к увеличению дебройлевской длины волны пучка.

До барьера $\lambda_1 = \dfrac{h}{\sqrt{2mE}}$ За барьером $\lambda_2 = \dfrac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$

Прямоугольный потенциальный барьер

*Уменьшение скорости волны означает в оптике увеличение показателя преломления среды. Поэтому **потенциальный барьер можно также рассматривать как границу между двумя средами с разными показателями преломления.***



Можно определить показатель преломления волн де бройля в области потенциального барьера как отношение скорости частиц де Бройля к скорости частицы за барьером

$$n = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Во-вторых, пучок частиц в области потенциального барьера частично ***отражается*** от барьера. *Для классической частицы с энергией $E > U_0$ этого не может быть, каждая частицы просто затормозится в поле барьера, а за барьером будет двигаться с меньшей скоростью.*

Коэффициент отражения

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

Коэффициент прохождения

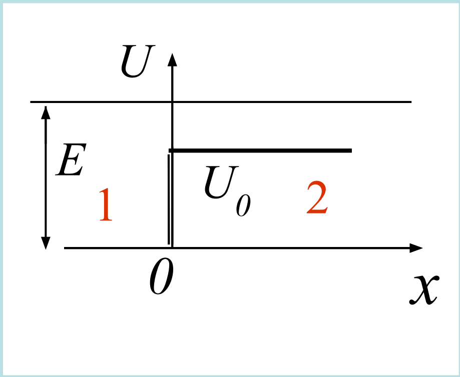
$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U)}}{\hbar}$$

Задача № 7

Электрон с энергией 2,5 кэВ движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный барьер высотой 0,9 кэВ. Определить, во сколько раз изменится длина волны де Бройля при прохождении через этот потенциальный барьер.



Дано: $E = 2{,}5\cdot 10^3$ эВ; $U_0 = 0{,}9$ эВ$\cdot 10^3$

Найти :λ_2 / λ_1

Решение 1. Длины волн де Бройля для области 1 и 2

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{h}{m\upsilon_1},} \quad \boxed{\lambda_2 = \frac{h}{m\upsilon_2},} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$$

2. Скорости частиц для области $\quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2(E-U_0)}{m}}$

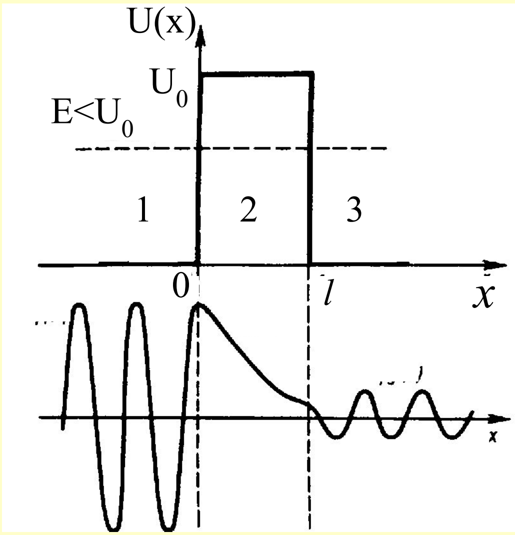
3. Окончательно имеем

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{E}{E-U_0}}$$

4. Расчет: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{2{,}5\cdot 10^3}{1.6\cdot 10^3}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Ответ: :λ2 / λ1 = 1,25

Двусторонний потенциальный барьер



По классическим представлениям частица с энергией $E > U_0$ беспрепятственно проходит над барьером. Если $E < U_0$, то частица отражается от барьера, **сквозь барьер частица проникнуть не может.**

Согласно квантовой механике даже при энергии $E > U_0$ имеется отличная от нуля вероятность того, что частица отразится от барьера и полетит в обратную сторону.

Если $E < U_0$, согласно квантовой механике имеется отличная от нуля вероятность того, что частица проникнет “сквозь” барьер.

Поведение микрочастицы вытекает непосредственно из уравнения Шредингера

Для областей 1 и 3 $$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_1^2\psi = 0}$$ $$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

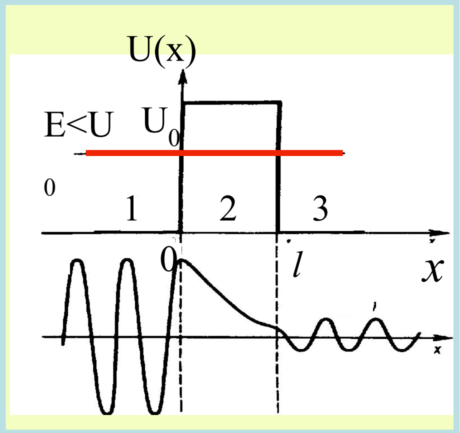
Для области 2 $$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_2^2\psi = 0}$$ $$k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Туннельный эффект

Решение уравнения Шредингера показывает, что в области 2 функция уже не соответствует плоским волнам, распространяющимся в обе стороны. Качественный характер функций в 1, 2 и 3 областях показан на рисунке, откуда следует, что волновая функция не равна нулю и внутри барьера. В области 3 (если барьер не очень широк) функция будет опять иметь вид волн де Бройля с той же частотой, но с меньшей амплитудой.

Квантовая механика приводит к принципиально новому специфическому квантовому явлению, получившему название туннельного эффекта

Для описания туннельного эффекта используют понятие ***коэффициента прозрачности D***



$$\boxed{D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\cdot l}}$$

Прозрачность потенциального барьера можно рассматривать как вероятность прохождения волн де Бройля сквозь потенциальный барьер.

Туннельный эффект

С классической точки зрения туннельный эффект представляется абсурдным, т.к. частица “находящаяся в туннеле”, должна была бы обладать ***отрицательной кинетической энергией*** ($E < U$). Однако, туннельный эффект – явление специфически квантовое, не имеющее аналога в классической физике.

В квантовой механике деление полной энергии на кинетическую и потенциальную не имеет смысла, т.к. противоречит принципу неопределенности

Вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер сильно зависит от ширины барьера l и его превышения над E $(U_0 - E)$.

Туннельный эффект имеет большое значение в практических приложения квантовой механики. Он объясняет явление α– распада, явление автоэлектронной эмиссии (вырывание электронов из металла при напряженности электрического поля в сотни раз меньших). В термоядерных реакциях при температурах сотни миллионов градусов преодолевается кулоновское отталкивание и обеспечивается сближение ядер.

Использование туннельного эффекта при контактных явлениях в металлах и полупроводниках и многое другое.

Задача № 8

Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину l = 0,15 нм. Определить в электронвольтах разность энергий (U_0 - E), при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,4.

Дано: $l = 0{,}15$ нм $= 0{,}15\cdot 10^{-9}$м; $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$; D = 0,4.

Найти: (U_0 - E)

Решение

1. Вероятность p прохождения электрона сквозь потенциальный барьер по физическому содержа нию равна коэффициенту прозрачности, т.е. $P =$ D. Следовательно, вероятность того, что электрон пройдет сквозь потенциальный барьер, определяется выражением

$$p = D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right)\cdot l$$

2. Логарифмируя выражение, получим

$$\ln p = \left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right)\cdot l$$

3. Тогда искомая разность энергий

$$(U_0 - E) = \hbar^2 \frac{(\ln p)^2}{8ml^2}$$

4. Расчет:

$$(U_0 - E) = \left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2 \frac{(\ln 0{,}4)^2}{8\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\left(0{,}15\cdot 10^{-9}\right)^2} = 5{,}7\cdot 10^{-20}\ Дж = 0{,}356 эВ$$

Ответ: $(U_0 - E) = 0{,}356 эВ$

Задача № 9

Частица массой m = 10^{-19} кг, двигаясь в положительном направлении оси *x* со скоростью 20 м/с, встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой U_0 = 100 эВ. Определить коэффициенты отражения R и прозрачности D волн де Бройля для данного порога.

Дано: m = 10^{-19} кг; $\upsilon = 20$м/с ; U_0 =100 эВ;

Найти: R; D

Решение

1. Частица движется как свободная, поэтому ее полная энергия равна кинетической

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

2. Выразим энергию в эВ, чтобы сравнить энергию частицы с высотой барьера

$$E = \frac{\cdot 10^{-19} 400 \cdot}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 125 эВ$$

Т.е. энергия частицы больше высоты барьера E > U_0

3. Коэффициент отражения

$$\boxed{R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2}$$

$$\boxed{k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}} \qquad \boxed{k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}}$$

Волновые числа

$$R = \left[\frac{\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E - U_0)}}{\sqrt{2mE} + \sqrt{2m(E - U_0)}}\right]^2 = \left[\frac{1 - \sqrt{1 - U_0/E}}{1 + \sqrt{1 - U_0/E}}\right]^2$$

$\boxed{R = 0{,}146}$ R + D = 1

D = 1 – R = 0.854

$\boxed{\text{Ответы: R = 0,146; D = 0.854}}$

Гармонический осциллятор

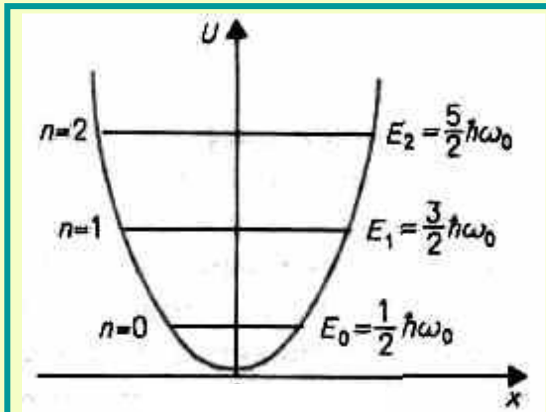
Гармоническим осциллятором называют частицу, совершающую одномерные колебания под действием квазиупругой силы $F = -kx$

Потенциальная энергия такой частицы $U = \dfrac{kx^2}{2}$

Собственная частота $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\Rightarrow$ $U = \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2}{m}\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0$$

Решение уравнения Шредингера $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$



Потенциальная яма

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Минимальное значение энергии

Энергия нулевых колебаний

При абсолютном нуле колебания атомов кристаллической решетки не прекращаются

Гелий – квантовая жидкость

$$\Delta n = \pm 1$$

Правило отбора

Кот Шредингера

Мысленный эксперимент Шредингера

Ученый хотел показать неполноту квантовой механики при переходе от субатомных систем к макроскопическим системам.

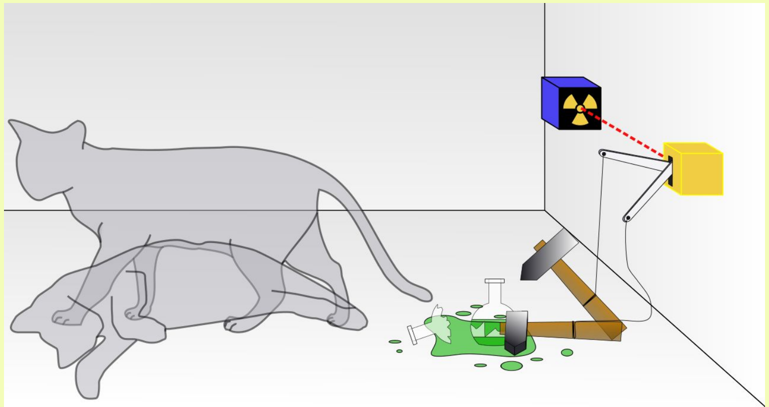
Суть эксперимента:

Исходное состояние. Кот – в ящике. Имеется источник радиоактивного излучения. Распад одного атома произойдет через 1 час. После этого включается устройство, разбивающее колбу с синильной кислотой

Вариан1 С вероятностью 50% происходит радиоактивный распад, включается устройство, разбивается колба с кислотой - кот погибает.

Вариант 2. С вероятностью 50% распад не происходит - кот остается живой,

Согласно квантовой механике кот одновременно и жив и мертв, пока не открыли ящик.



Спасибо за внимание !