Уральский федеральный университет

23.10.23

Аналитическая геометрия

Математика

Лекция 6

§6. **Линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости**

Линия на плоскости часто задается как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством.

Например, окружность – множество точек плоскости равноудаленных от некоторой фиксированной точки O.

Уравнение линии (кривой) на плоскости: $F(x, y)=0$ (*).

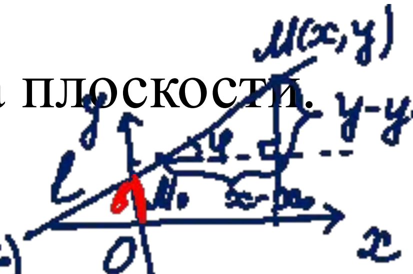
Уравнению (*) удовлетворяют координаты (x, y) каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Простейшей из линий является прямая.

Рассмотрим различные способы задания прямой на плоскости.



$M_0(x_0, y_0)$

$k = \mathrm{tg}\,\varphi,\ \varphi = l \wedge Ox$

$l: \ k = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ (*)

1. ~~Уравнение прямой~~ с угловым коэффициентом (*)

$(y - y_0) = k(x - x_0)$ (1) или $y = kx + b$

где $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой, k=tgα, α - угол между прямой и положительным направлением оси Ox, $b=y_0-kx_0$, $|b|$ - расстояние от точки пересечения прямой и оси Oy до начала координат.

Если прямая проходит через O, то уравнение: $y=kx$.

Уравнение прямой, параллельной оси Ox: $y= y_0$ (k=0).

Уравнение прямой, параллельной оси Oy: $x=x_0$ (α=π/2).

$x - x_0 = \dfrac{1}{k}(y - y_0)$, $\dfrac{1}{k} = \mathrm{ctg}\,\varphi$

$\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{ctg}\,\varphi = 0 \Rightarrow x = x_0$

$y = kx + b \Rightarrow y - kx - b = 0$

2. Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение 1 порядка: $Ax+By+C=0$, (2)
где $A^2+B^2 \neq 0$.

Покажем, что это уравнение прямой.

Если $B=0$, то уравнение (2): $Ax+C=0 \Rightarrow x = -\dfrac{C}{A}\ (A \neq 0)$.

Получили уравнение прямой, параллельной Oy.

$k = \operatorname{tg}\varphi$ $\quad = b$

Если $B \neq 0$, то уравнение (2): $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ – уравнение с угловым коэффициентом.

Уравнение (2) называется общим уравнением прямой (l).

Замечание.

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax = -By - C$$

$$\frac{x}{1/A} = \frac{y + C/B}{-1/B}$$

Любое уравнение первого порядка на плоскости определяет прямую и наоборот, любая прямая на плоскости определяется уравнением первого порядка.

$\overline{M_1M_2}$ - направляющий вектор

$\bar{l} = \{l_1, l_2\}$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть $M_1(x_1, y_1) \in l,\ M_2(x_2, y_2) \in l.$

Возьмем произвольную точку на прямой $M(x, y)$ и найдем векторы $\overline{M_1M} = \{x - x_1,\ y - y_1\}$, $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$.

$l: M(x,y) \in l \Leftrightarrow \overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2} \Rightarrow$

Так как $\overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}$, то

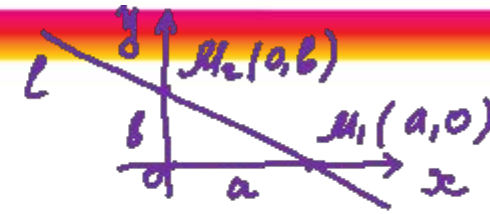
$$(3)\quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2}$$ — каноническое ур. прямой

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = t$$ — шаговой параметр

$$\Rightarrow (3')\ \begin{cases} x = l_1 t + x_1 \\ y = l_2 t + y_1 \end{cases}$$ — параметрическое ур-е прямой

4. Уравнение прямой в отрезках

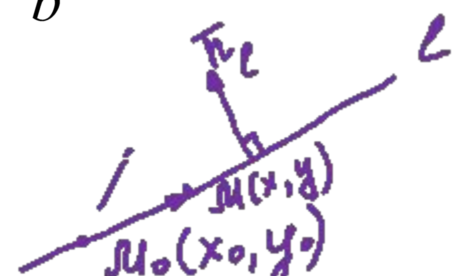


Пусть прямая (l) отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно. Тогда $M_1(a,0)\in l$, $M_2(0,b)\in l$.

$\overline{M_1M_2}=\{-a;b\}$

По уравнению (3): $\dfrac{x-a}{0-a}=\dfrac{y-0}{b-0} \Rightarrow -\dfrac{x}{a}+1=\dfrac{y}{b}$

или $\dfrac{x}{\boxed{a}}+\dfrac{y}{\boxed{b}}=1.$ (4)



5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

$\vec n_l$ - норм. вектор для l

Пусть $M(x_0,y_0)\in l$, $\vec n=(A,B)\perp l.$

$M(x,y)\in l \Leftrightarrow \overline{M_0M}\perp \vec n_l$

Возьмем произвольную точку на прямой $M(x,y)$ и найдем вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0\}.$$

$\{x-x_0, y-y_0\}\cdot\{A, B\}=0$

Так как $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l}$, то $\vec{n} \perp \vec{l}$, $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0.$

Тогда $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$ (5)

$Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0$

$\vec{n}$

Уравнение (5) можно записать в виде $Ax+By+C=0$,

где $C=-Ax_0-By_0$, т.е. уравнение (5) приводится к виду (2) .

Вектор $\vec{n}=(A,B)\perp l$ – нормальный вектор прямой.

$3x-2y+5=0$

$\vec{n}=\{3;-2\}$

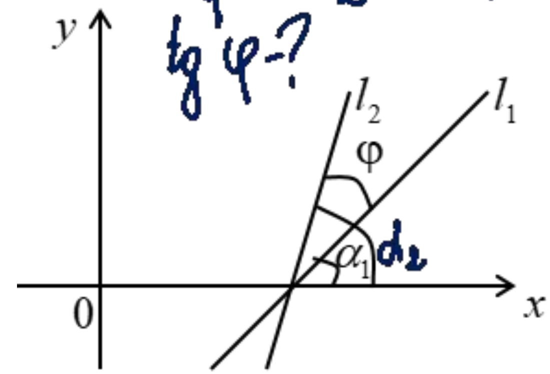
Вектор $\vec{l}=(-B,A)\parallel l$ – направляющий вектор прямой.

§7. Метрические задачи аналитической геометрии на плоскости

Задача 1. Угол между прямыми

$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$

$\operatorname{tg}\varphi - ?$



Пусть $(l_1): y = k_1 x + b_1,\ k_1 = \underline{\operatorname{tg}\alpha_1}$;

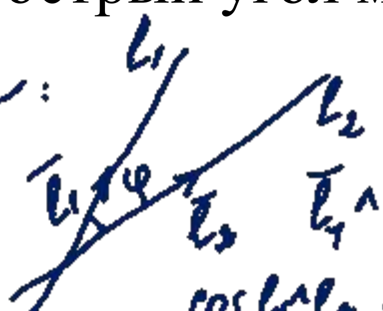
$(l_2): y = k_2 x + b_2,\ k_2 = \underline{\operatorname{tg}\alpha_2}$.

Найдем $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}$,

т.е. $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|}$ (1)

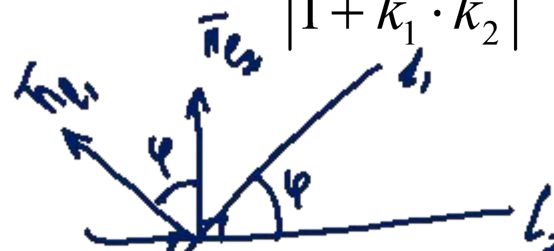
Если нужен острый угол между прямыми, то $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Замечание:



$\bar l_1 \wedge \bar l_2$ π/2

$\cos l_1 \wedge l_2 = \dfrac{\bar l_1 \cdot \bar l_2}{|\bar l_1||\bar l_2|}$



$\bar n_{l_1} \wedge \bar n_{l_2}$ π/2 $\cos(\bar n_{l_1} \wedge \bar n_{l_2})$

Следствия

1. Если $l_1 \| l_2$, то ϕ=0 и tgϕ=0.

Из формулы (1) $\Rightarrow k_2 - k_1 = 0$, т.е.

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow k_2 = k_1 \qquad (2)$$

условие параллельности прямых.

2. Если $l_1 \perp l_2$, то ϕ=π/2 и $\mathrm{ctg}\,\varphi = \dfrac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0 \Rightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$,

т.е. $$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \qquad (3)$$

условие перпендикулярности прямых.

Пусть $(l_1): Ax_1 + By_1 + C_1 = 0, \quad n_1 = \{A_1, B_1\} \perp l_1;$

$(l_2): Ax_2 + By_2 + C_2 = 0, \; n_2 = \{A_2, B_2\} \perp l_2.$

Тогда $\cos\varphi = \left|\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})\right| = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (4)$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых:

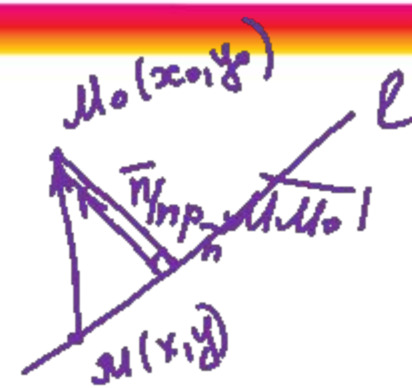
$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \quad (5)$$

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то $l_1 = l_2$ (прямые совпадают).

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (6)$$

Замечание. Если $(l): Ax + By + C = 0$ и $l \perp m$,
то $(m): -Bx + Ay + C_1 = 0.$

Задача 2. Расстояние от точки до прямой



Пусть $(l): \underbrace{Ax+By}_{-c}+C=0;\quad M_0(x_0,\,y_0)\notin l.$

Расстояние $d(M_0,l)=\left|\text{пр}_{\vec n}\overrightarrow{MM_0}\right|$, где $M(x,y)$ − произвольная точка прямой (l), $\vec n=(A,B)$ − нормальный вектор прямой.

Тогда $$d(M_0,l)=\left|\frac{\overrightarrow{MM_0}\cdot\vec n}{|\vec n|}\right|=\frac{\left|(x_0-x)A+(y_0-y)B\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

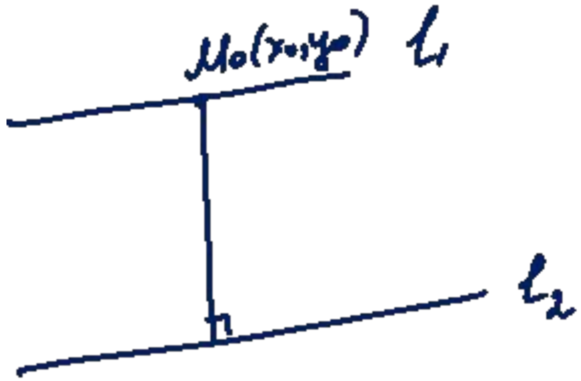
$$=\frac{\left|Ax_0+By_0-(\overbrace{Ax+By}^{-c})\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\left[M\in l\ \Rightarrow\ Ax+By=-C\right]=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Таким образом, $$\boxed{d(M_0,l)=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}\qquad(7)$$

Задача 3. l_1, l_2 $d(l_1, l_2) = ?$

взаимное расположение

$l_1 \parallel l_2$



$d(l_1, l_2) = d(M_0 \in l_1, l_2)$

см. задачу 2.

$l_1 \cap l_2 = \{A\}$

пересек-ся в т. A

$d(l_1, l_2) = 0$

$l_1 = l_2$

совпадают

$d(l_1, l_2) = 0$

Пример. Точка $A(2, -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Вычислить площадь этого квадрата. Найти уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны квадрата.