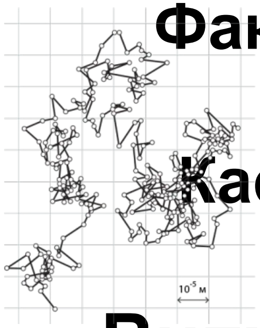
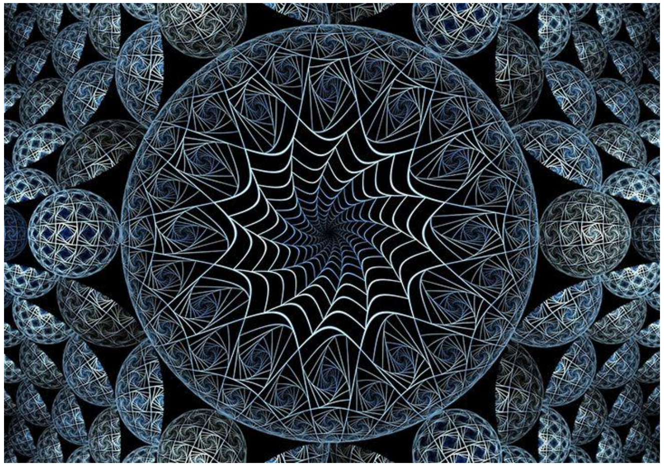
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ
Факультет Комп'ютерних систем, енергетики та автоматизації
Кафедра Інформаційних технологій та систем



Випускна кваліфікаційна робота бакалавра «Програмна реалізація фрактальної моделі броунівського руху»

Виконав студент групи КН01-15 Валєєв В.В.
Керівник професор Дерев'янко О.І.

Дніпро, 2019



«Програмна реалізація фрактальної моделі броунівського руху».

Аналітичний розділ дипломної роботи присвячений огляду класичних моделей броунівського руху, перегляду об'єктів природи, що виявляють фрактальні властивості, наведені найбільш поширені моделі фрактальних структур і їх основні властивості.

У основній частині роботи наведений опис алгоритму і програми моделювання, методи і результати оцінки фрактальної розмірності отриманих реалізацій випадкового процесу.

«Програмна реалізація фрактальної моделі броунівського руху»

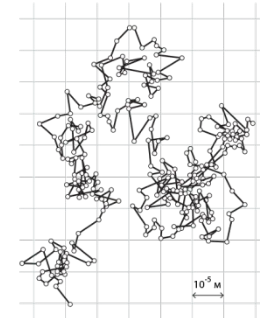
Об’єкт дослідження – фрактальна модель броунівського руху.

Мета роботи – розробити програму моделювання випадкового процесу узагальненого броунівського руху, який має фрактальні властивості.

Результат роботи - програма моделювання, яка написана в середовищі MATLAB та моделює випадковий процес броунівського руху.

Результати роботи можуть бути використані для проведена оцінки значень фрактальної розмірності.

Класичний броунівський рух. Математичні моделі броунівського руху



Явище броунівського руху було відкрите в 1827 р. ботаніком Броуном і являє собою неперервний хаотичний рух малих макроскопічних часток в рідині або газі.
Основи теорії були закладені на початку цього століття в класичних роботах А. Ейнштейна, М. Смолуховського і П. Ланжевена.
Броунівский рух пояснюється наявністю неврівноваженних поштовхів навколишніх атомів, і виявляє атомарну структуру "суцільної" середи, в якій здійснюється рух броунівських часток. Основні результати цієї теорії вперше були підтверджені дослідами Ж. Перрена і Т. Сведберга.
У наш час термін "броунівський рух" має набагато більш широке значення і теорія броунівського руху складає один з основних розділів сучасної статистичної теорії відкритих систем. У статистичній теорії неврівноважених процесів "атоми", як мікроскопічні структурні одиниці використовуються

Фрактали

Слово "фрактал" (fractal) - вигадане Мандельбротом з'єднання двох слів: fraction - дріб і fracture - злам. Фрактал - зламаний об'єкт з дробовою розмірністю.

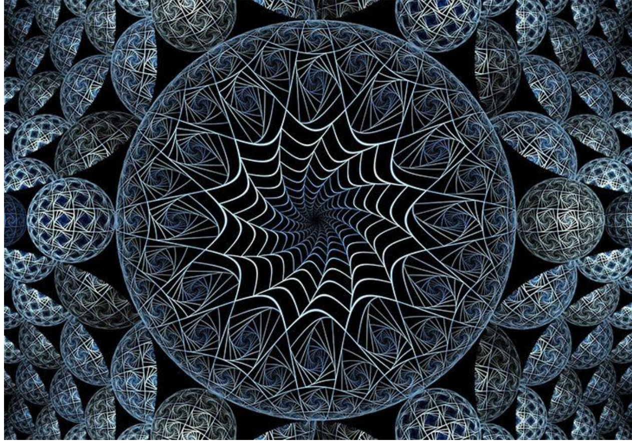
Розвинені Мандельбротом математичне поняття фрактала і його додатки до опису форм різних об'єктів дають можливість побудувати моделі широкого класу нетривіальних випадкових масштабно-інваріантних структур.

Фрактальні моделі не завжди піддаються аналітичному дослідженню, але можуть бути побудовані за простими правилами з можливістю нескладної комп'ютерної реалізації. Закономірності складних неврегульованих процесів вивчають в комп'ютерному експерименті з такими моделями.

За допомогою теорії фракталів вивчають структури речовин та процесів

Фрактальний броунівський рух

Випадкове блукання - математична модель процесу зсуву частки під дією випадкових сил, проста і розвинена модель в статистичній фізиці, що приводить до *фрактальних структур*.
Графіки залежності зсуву частки від часу і її траєкторії є фрактальними кривими, тобто броунівський рух має *фрактальні властивості*..
Основні застосування моделі випадкового блукання відносяться до аналізу фрактальних властивостей випадкових сигналів і хвиль.
Випадковість властива всім природним явищам. Навіть у самих правильних кристалах є безліч випадково розкиданих включень і інших дефектів. Однак, якщо ми хочемо застосувати фрактали до опису природи, потрібно розвинути концепцію випадкових фракталів.
Роберт Браун (Броун) першим зрозумів, що неврегульоване рушення мікроскопічних часток пилки має не біологічну природу, як гадали до нього, а фізичну
За допомогою мікроскопа можна наочно пересвідчитися, що рух «броунівськой частки» являє собою набір кроків у випадково вибраних напрямах, причому довжина кроку має деяку характерну величину. Тому в описах броунівського руху можна часто зустріти термін *«випадкове блукання».*



Алгоритм моделювання фрактального броунівського руху

Алгоритм моделювання фрактального броунівського руху реалізує метод генерації випадкового гаусового процесу з нульовим середнім та заданою коваріаційною функцією. Для гаусових процесів, що мають фрактальні властивості, коваріаційна функція задається у вигляді:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = \frac{1}{2}\left[|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right]$$

$$t_1, t_2 \in [0,1]^d$$

Алгоритм моделювання фрактального броунівського руху

Крок 1. Задамо вигляд коваріаційної матриці процесу $R_{xx}(t_1,t_2)$, що генерується, причому її розмір $M=2^G \geq 2(N-1)$, де N - необхідний розмір вибірки фрактального броунівського процесу.

Крок 2. Отримаємо спектральну щільність, що характеризує шукану систему. Спектральна щільність являє собою перетворення Фурье усередненої за часом кореляційної функції:

$$S_x(w)=F\{R_{xx}(t_1,t_2)\}.$$

Крок 3. Для визначення характеристики фільтра задамо його передаточну функцію у вигляді вектора комплексних значень

$$H(w)=\left[S_x(w)\right]^{-1/2}+j*\left[S_x(w)\right]^{-1/2}.$$

Крок 4. Отримаємо спектр випадкового гаусовського процесу, що являє собою прирости фрактальної броунівської функції.

X(w) = H(w)U(w).

Крок 5. Результат операції згортки у часовій області отримаємо при допомозі БПФ:

$$X(t)=F^{-1}\{X(w)\}.$$

Таким чином *X(t)* - модель 1-вимірного випадкового гаусовського процесу з математичним очікуванням, рівним нулю і заданою коваріаційною матрицею.

Крок 6. Фрактальна броунівська функція виходить з 1-вимірного гаусовського процесу як відмаштабована сума його приростів:

$$Y_{i+1}=Y_i+X_i*N^{-H},$$

де N - розмір отриманої вибірки.

Програмна реалізація фрактального броунівського руху

Середа розробки MATLAB.

Програма моделює одновимірний узагальнений броунівський рух з показником Херста в інтервалі [0, 1].

Процес приростів фрактальної броунівської функції являє собою стаціонарний процес з коваріаційною функцією

$$R_{xx}(t) = \left[|t-1|^{2H} + |t+1|^{2H} - 2|t|^{2H}\right]/\,2$$

Програма main.m у своїй роботі використовує наступні функції:

inccov - задає значення коваріаційної функції для отримання вектора процесу корельованих приростів фрактальної броунівської функції.

inceigen - визначає розмір вибірки M для значень ковариаційної функції. При цьому виконується умова: $2^G \geq 2(N-1)$, де N - розмір реалізації броунівського процесу.

gengp - моделює одновимірний гаусовий процес приростів згідно з методом з [17].

fbfunction - обчислює фрактальну броунівську функцію як масштабоване кумулятивне додавання значень одновимірного гаусовського процесу.

Модуль inceigen.m

- function [M,Rxx,Sxx,G,rho,iFault]=inceigen(H,N,G,maxG);
- %Если значение G не было задано, то оно задается так, чтобы % 2^{A}G>=2(N-1)
- if G==0
- rho=log(2*(N-l))/log(2);
- GTemp=round(rho);
- if Gtemp<rho
- GTemp=GTemp+1;
- end;
- else
- GTemp=G;
- end;
- %Проверка GTemp перед началом цикла
- if GTemp>maxG
- iFault=2;
- return;
- end;
- iFault=0;
- rho=l;
- eig=0;
- sum=0;
- M=2^GTemp;
- MHalf=M/2;
- Rxx=zeros(1,M);
- for i=l:MHalf
- Rxx(i)=inccov(i—1,H);
- end;
- Rxx(MHalf+1:end)=Rxx(MHalf:-1:1);
- %Вычисление ДПФ
- Sxx=fft(Rxx);
- %Проверка на отрицательность собственных значений
- for i=l:M
- sum=sum+real(Sxx(i));
- if real(Sxx(i))<0
- Sxx(i)=0;
- eig=eig+abs(real(Sxx)) iFault=l;
- else
- Sxx(i)=sqrt(M)*real(Sxx (i));
- end;
- end;
- if iFault==l
- %Получена аппроксимация rho=sum/(sum+eig);
- end;
- gengp. m
- function X=gengp(N, M, H j w,rho)
- MHalf=round(M/2);
- %Генерация неповторяющихся случайных чисел, распределенных по нормальному закону
- U=zeros(1,M);
- U=randn(1,M);
- %U=fft(U);
- A(l)=sqrt(Hjw(1))*U(1)/sqrt(M);
- j=MHalf+l;
- A(j)=sqrt(Hjw(j))*U(2)/sqrt(M);
- index=3;
- for i=2:MHalf
- A(i)=sqrt(Hjw(i))*U(index)/sqrt(2*M)+...
- sqrt(-1)*sqrt(Hjw(i))*U(index+1)/sqrt(2*M);
- A(M-i+2)=A(i)+sqrt(-1)*(-A(i)) ; index=index+2;
- end;
- %Вычисление ДПФ
- AS=ifft(A);
- %Получение 1-мерного гауссовского процесса
- for i=l:N
- X(i)=rho*sqrt(M)*real(AS (i));
- end;

Робота програми

- *Запуск* програми здійснюється шляхом набору у командному рядку MATLAB імені програми.
- *Файл* з текстом програми повинен знаходитись у поточному каталозі системи MATLAB.
- *Вхідними параметрами програми* є: показник Херста (H [0,1]) та розмір реалізації процесу, що моделюється.

Розглянуті 3 випадки моделювання для різних значень показника Херсту: H<0.5 (кореляція негативна), H=0.5 (кореляція відсутня) та H>0.5 (кореляція позитивна).

- *Рисунок 1* - вигляд коваріаційної функції та спектральної щільності процесу
- *Рисунок 2* містить реалізацію фрактальної броунівської функції та фрактального шуму.
- *Рисунки 3* (додаток Б) ілюструє властивості масштабної інваріантності узагальненого броунівського руху:а) відображує процес, де елементарний крок часу дорівнює 4t, б) містить реалізацію вихідного процесу.
- *Рисунок 4* (додаток Б) - приведений процес приростів фрактальної броунівської функції для реєстрації на кожному кроці t і 4t відповідно

Випадок 1: H<0.5
Моделювання фрактального броунівського руху
Введіть показник Херста H: 0.1
Введіть необхідну кількість відліків процесу N:2400
Встановлене значення G: 13.

Рисунок 1
а) Коваріаційна функція
б) Спектральна щільність

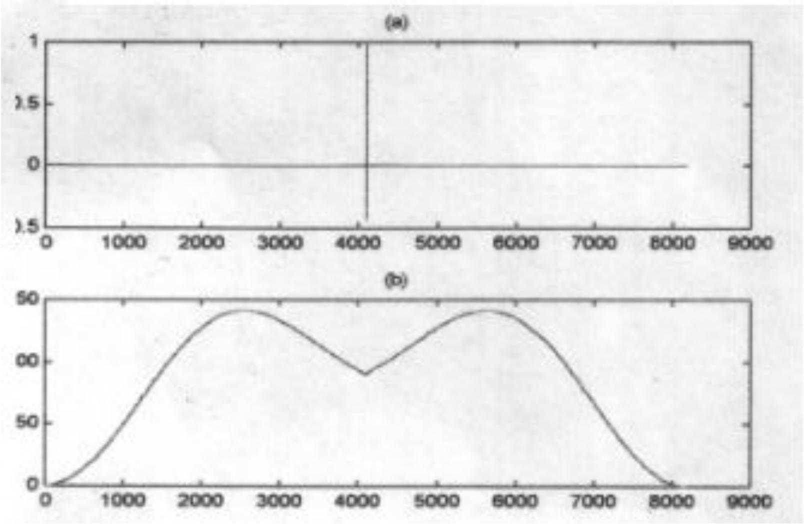
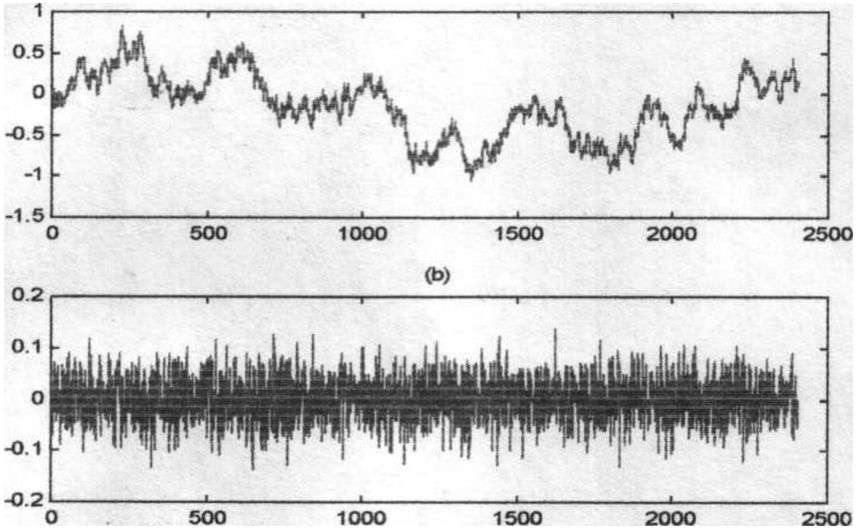


Рисунок 2 - Реалізація процесу фрактального броунівського руху:
а)Фрактальна броунівська функція
б)Прирости фрактальної броунівської функції



Випадковий процес має негативну кореляцію

Випадок 2: Н=0.5

» main

Моделювання фрактального броунівського руху

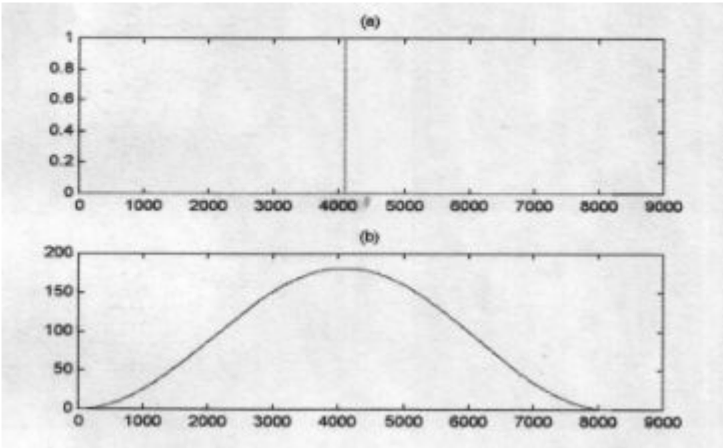
Введіть показник Херста Н: 0.5

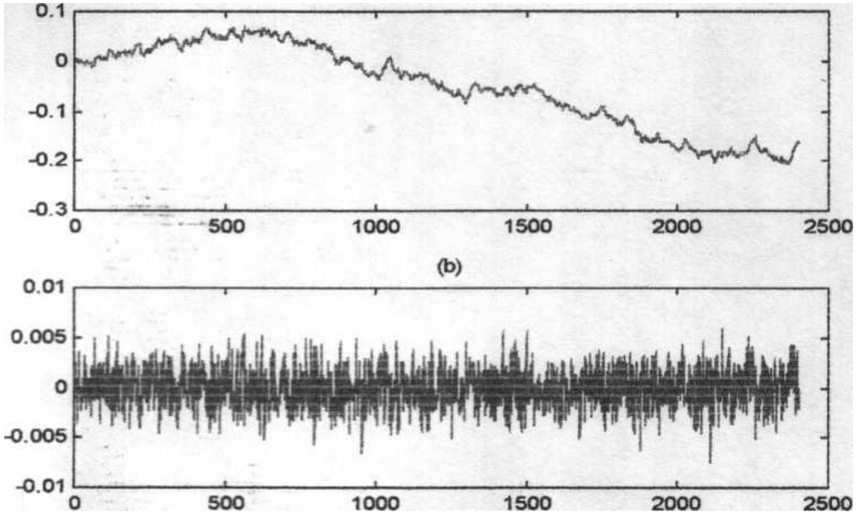
Введіть необхідну кількість відліків процесу N:10000

Встановлене значення G: 15.

Рисунок 1 - Характеристики процесу:
а) Коваріаційна функція
б) Спектральна щільність

Рисунок 2 - Реалізація процесу броунівського руху з некорельвоними приростами:
а) Траєкторія броунівська частки
б) Незалежні випадкові зсуви частки





Випадковий процес некорельований

Випадок 3: H>0.5

» main

Моделювання фрактального броунівського руху

Введіть показник Херста H: 0.9

Введіть необхідну кількість відліків процесу N:4000

Встановлене значення G: 13.

Рисунок 1 - Характеристики процесу:

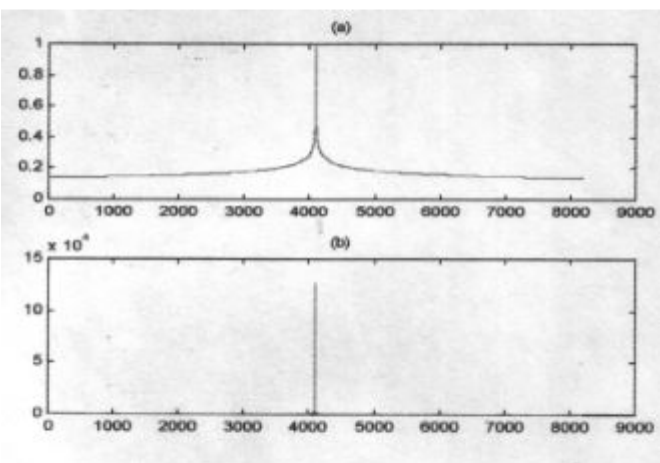
а) Коваріаційна функція

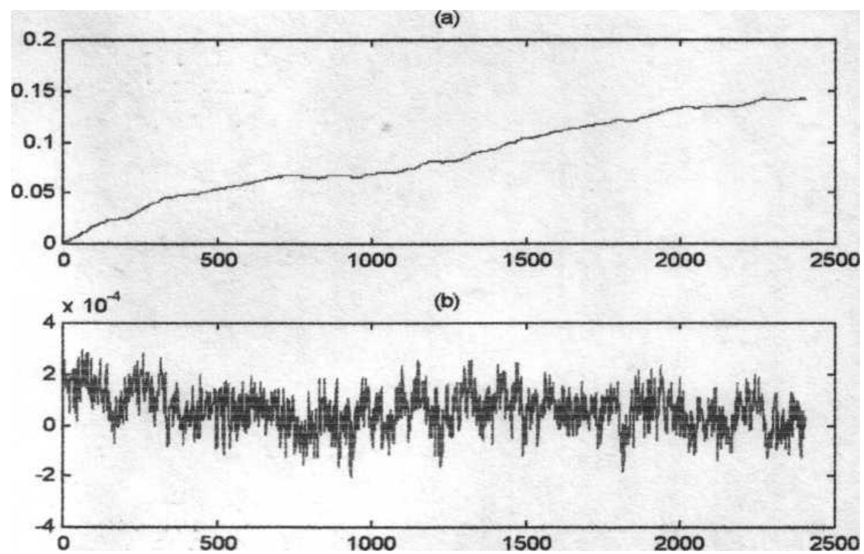
б) Спектральна щільність

Рисунок 2 - Реалізація процесу фрактального броунівського руху:

а)Фрактальна броунівська функція

б)Прирости фрактальної броунівської функції





Випадковий процес має позитивну кореляцію

ВИСНОВКИ

В результаті виконання випускної роботи бакалавра
 - розроблена програма, яка реалізує моделювання фрактального броунівського руху в системі інженерних і наукових розрахунків MATLAB ;
- виконана перевірка працездатності і проведене тестування програми;
- проведене дослідження властивостей класичного і фрактального броунівсього руху;
-підготовлена інструкція користувача для розробленої програми.