

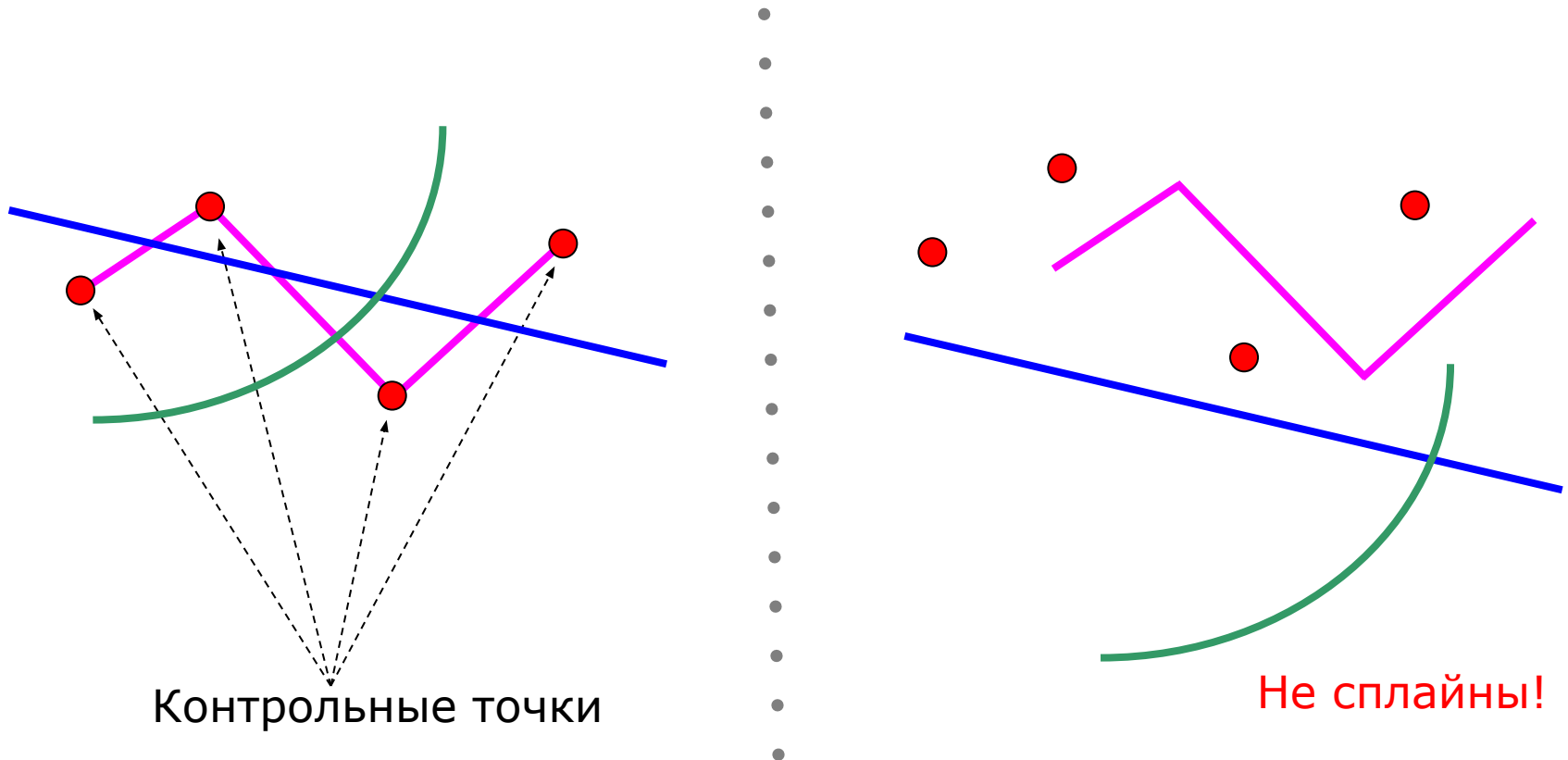
Интерактивная Компьютерная Графика

Часть 6-4

(Сплаины)

Определения (нестрогое определение)

Сплайн – непрерывная функция, проходящая как можно ближе к контрольным точкам



Определения (математические определение)

Сплайн – функция,
область определения которой разбита на *подобласти*,
на каждой из которых сплайн *совпадает*
с некоторым алгебраическим многочленом (*полиномом*)

Степень сплайна – максимальная *степень* использованных *полиномов*

Гладкость сплайна – максимальный *порядок* непрерывной
производной

Дефект сплайна – *разность между степенью сплайна*
и его гладкостью

Пример сплайна: *ломаная (кусочно-линейная функция)*

Производная сплайна: *кусочно-постоянная функция*

Степень сплайна: *1*

Гладкость сплайна: *0*

Дефект сплайна: *1*

Виды сплайнов

- ✓ По близости к контрольным точкам (КТ):
 - **Интерполяционные** (*обязаны* проходить через КТ)
 - **Сглаживающие** (*не обязаны* проходить через КТ)
- ✓ По учету КТ при расчете коэффициентов сплайна:
 - **Локальные** (коэффициенты рассчитываются *через соседние* КТ)
 - **Глобальные** (коэффициенты рассчитываются *через все* КТ)
- ✓ По типу производной:
 - **Рациональные** (с разрывной производной, не полиномиальные)
 - **Нерациональные** (с непрерывной 1ой, 2ой,... производной)
- ✓ По типу используемых базисных функций (полиномов):
 - **Полиномиальные** (лагранжевые, эрмитовые,...)
 - **Неполиномиальные** (логарифмические, тригонометрические,...)
- ✓ По мерности пространства:
 - **Одномерные** (кривые)
 - **Двумерные** (поверхности)

Виды сплайнов

Контрольные точки:

(f – неизвестная функция)

$$f(\bar{x}_i) = f_i, \quad \overline{i=1, n}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \\ \overline{i=1, n-1}$$

Общий вид сплайна:
$$P(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m q_i \cdot \psi_i(\bar{x})$$

Условие для интерполяционного сплайна:
$$P(\bar{x}_i) = f_i$$

Условие для сглаживающего сплайна:
$$\sum_{i=1}^n (P(\bar{x}_i) - f_i)^2 \rightarrow \min$$

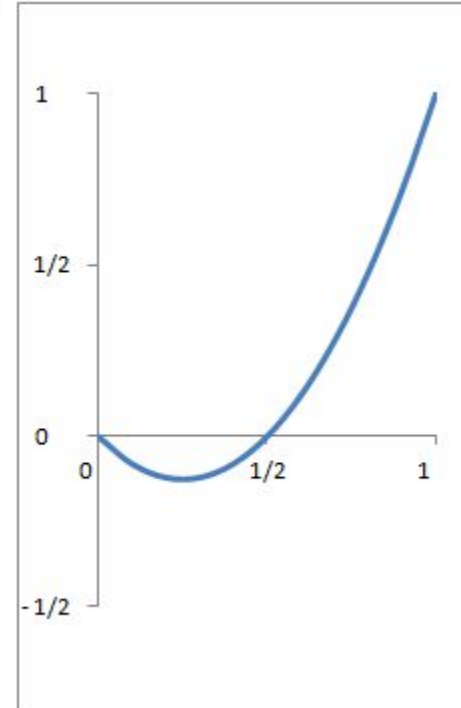
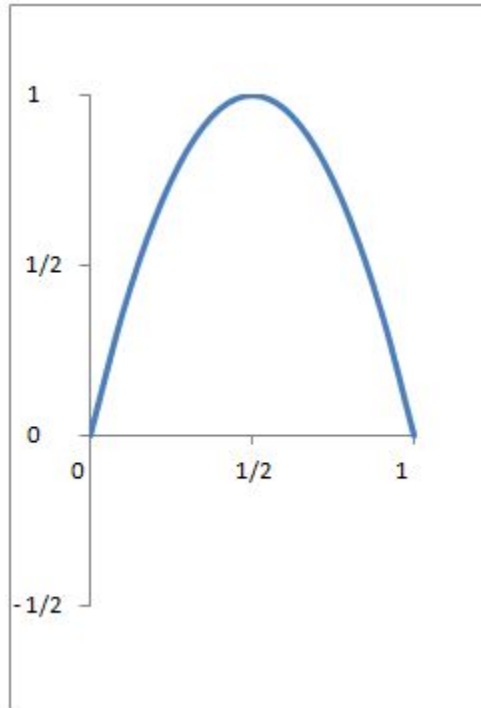
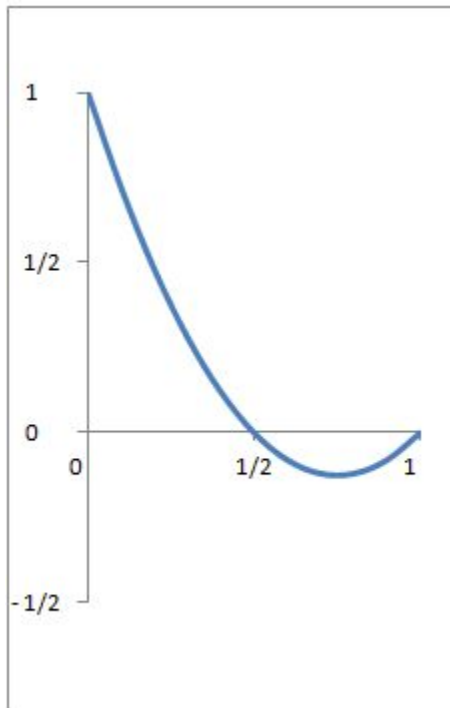
(методом Наименьших квадратов)

Задача сглаживания – построение достаточно гладкой функции, значения которой в КТ максимально близки к

f_i

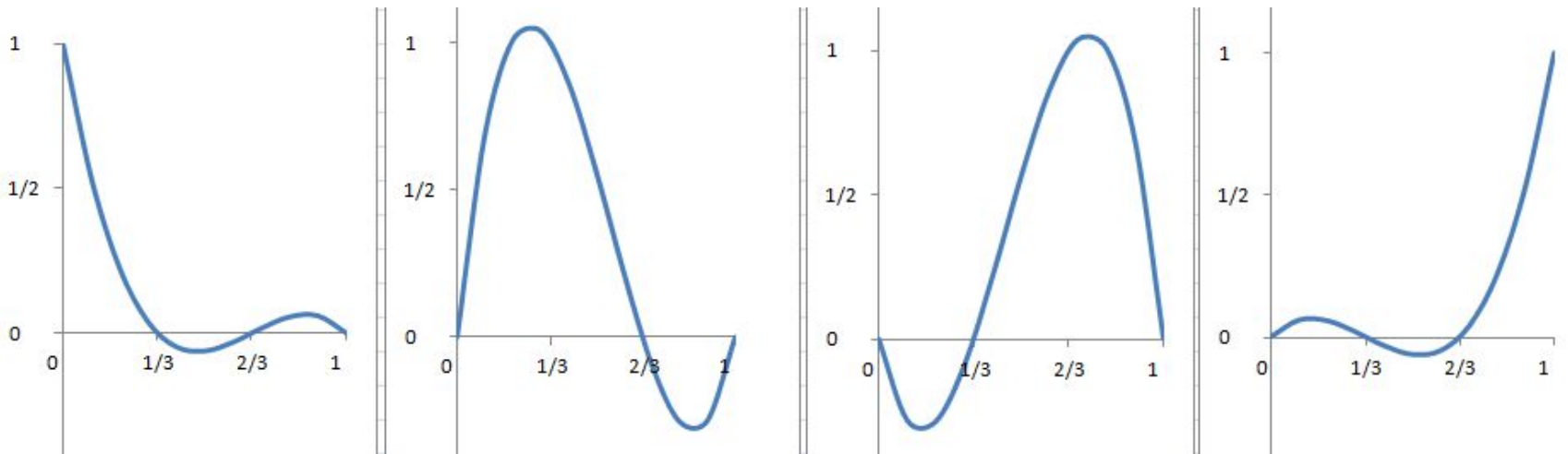
Одномерные квадратичные базисные функции (лагранжевы шаблонные)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= 2(\xi - \alpha)(\xi - 1) \\ \varphi_2(\xi) &= -4\xi(\xi - 1) \\ \varphi_3(\xi) &= 2\xi(\xi - \alpha) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \xi &= \frac{x - x_i}{h_i} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



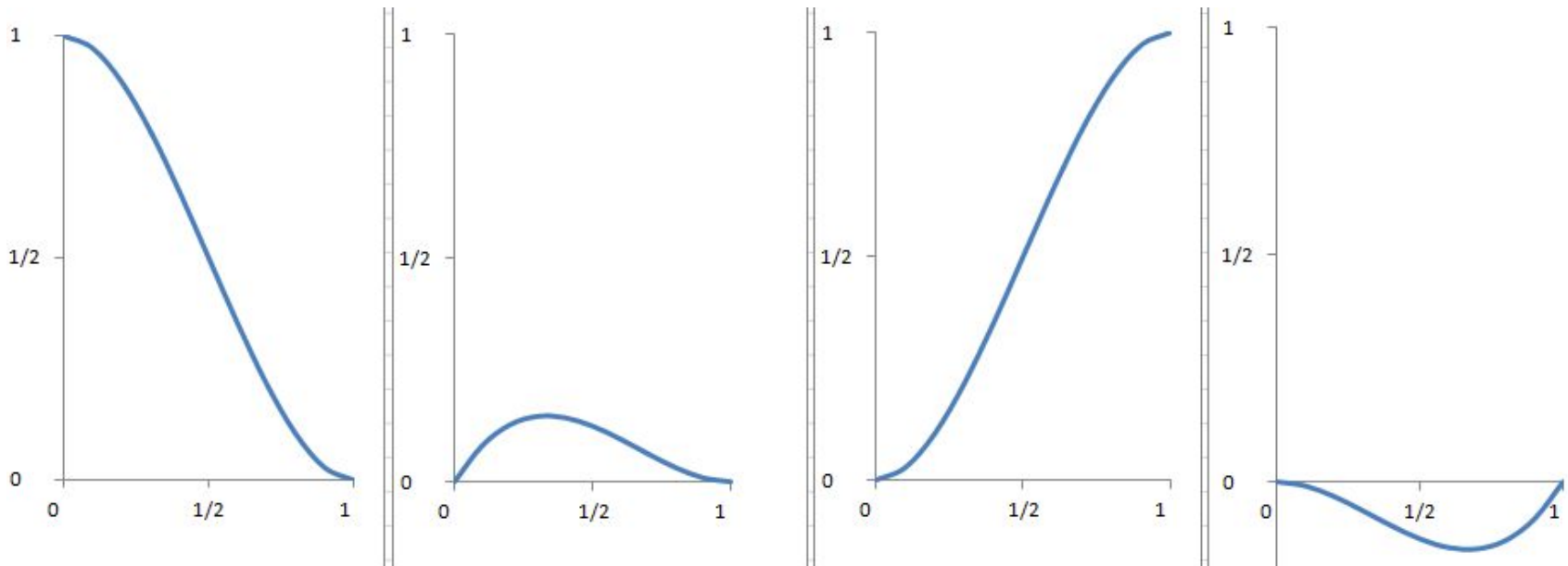
Одномерные кубические базисные функции (лагранжевы шаблонные)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= -\frac{9}{2}(\xi - \gamma)(\xi - \beta)(\xi - 1) \\ \varphi_2(\xi) &= -\frac{27}{2}\xi(\xi - \beta)(\xi - 1) \\ \varphi_3(\xi) &= -\frac{27}{2}\xi(\xi - \gamma)(\xi - 1) \\ \varphi_4(\xi) &= \frac{9}{2}\xi(\xi - \gamma)(\xi - \beta) \end{aligned} \right| \begin{aligned} \xi &= \frac{x - x_i}{h_i} \\ \gamma &= \frac{1}{3} \\ \beta &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



Одномерные кубические базисные функции (эрмитовы шаблонные)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \varphi_2(\xi) &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ \varphi_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \varphi_4(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3 \end{aligned} \right| \xi = \frac{x - x_i}{h_i} \quad \psi_i = \begin{cases} 0, & x < x_{i-1} \\ \varphi_3(\xi), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \varphi_1(\xi), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x > x_{i+1} \end{cases} \quad \psi_{i+1} = \begin{cases} 0, & x < x_{i-1} \\ h \cdot \varphi_4(\xi), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h \cdot \varphi_2(\xi), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x > x_{i+1} \end{cases}$$



Интерполяционный полином Лагранжа

Степени n :
$$L^n(x) = \sum_{i=1}^n \left[f_i \cdot \left(\prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \right]$$

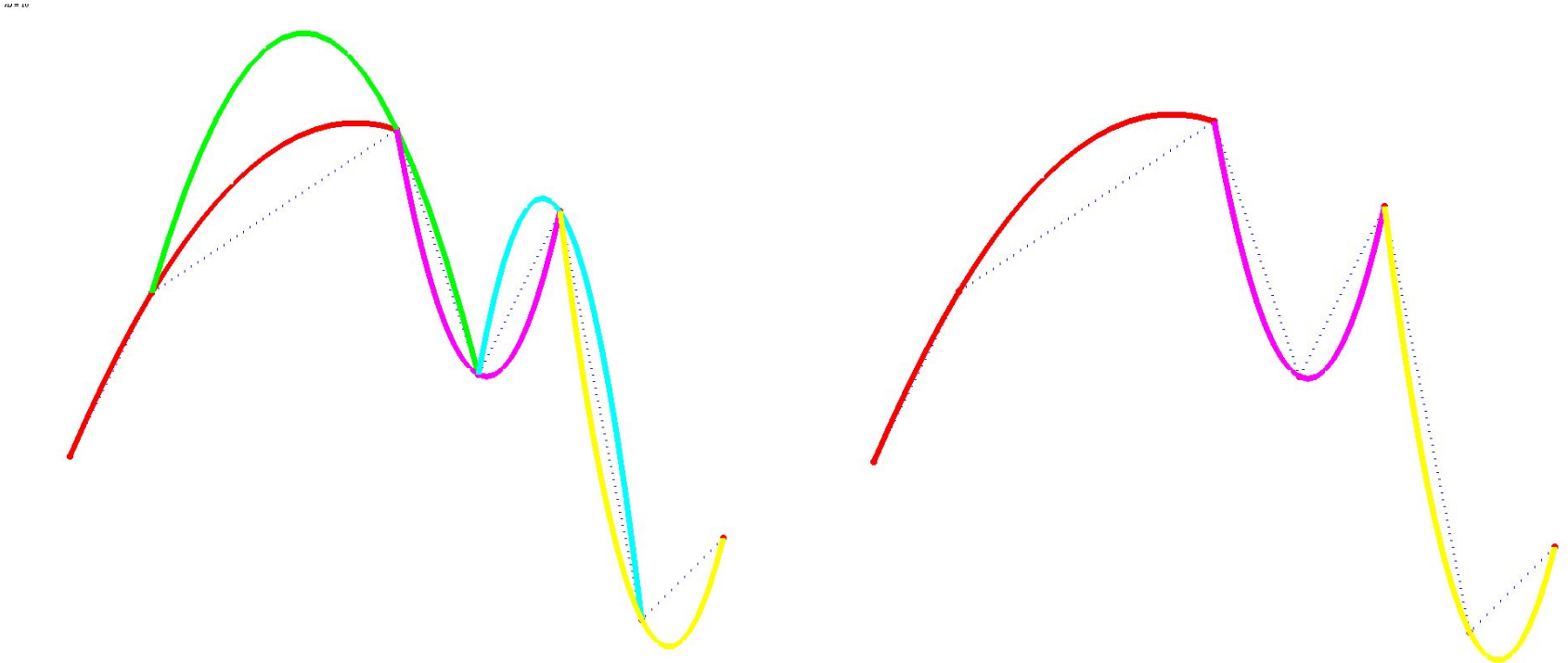
Степени 1:
$$L^1(x) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i^1(x), \quad P_i^1(x) = \begin{cases} (a_i x + b_i), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Степени 2:
$$L^2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2(x), \quad P_i^2(x) = \begin{cases} (a_i x^2 + b_i x + c_i), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Степени 3:
$$L^3(x) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i^3(x), \quad P_i^3(x) = \begin{cases} (a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Проблема согласования полиномов (негладкий сплайн, независимые параболы)

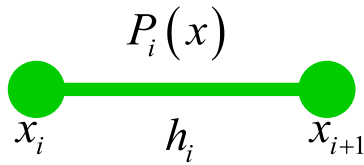
Параболы по трем точкам



Ошибка: производные в КТ не равны (нет гладкости)!

Линейный сплайн с полиномами Лагранжа (формулы)

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i(x), \quad b = x_i^1(x) = x_i + x_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$



Система для определения
коэффициентов сплайна

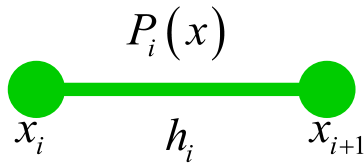
$$a_i = \frac{1}{h_i} (f_{i+1} - f_i)$$

$$b_i = f_i - a_i x_i$$

$$\begin{cases} P_i(x_i) = f_i \\ P_i(x_{i+1}) = f_{i+1} \end{cases}$$

Квадратичный сплайн с полиномами Лагранжа (формулы)

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x P_i^2(x), \quad b(x) = x^2 + c_i + d_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$



$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{h_1^2} (f_2 - f_1) - \frac{1}{h_1} f_1' \\ b_1 &= f_1' - 2a_1 x_1 \\ c_1 &= f_1 - f_1' x_1 + a_1 x_1^2 \end{aligned} \right| f_1' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \approx \frac{f_2 - f_1}{h_1}$$

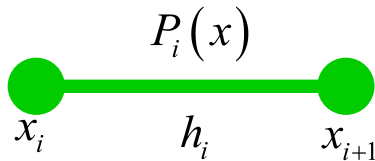
Система для определения коэффициентов сплайна

$$\left\{ \begin{aligned} P_i^2(x_i) &= f_i \\ P_i^2(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ \frac{\partial P_i^2}{\partial x}(x_i) &= \frac{\partial P_{i-1}^2}{\partial x}(x_i) \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{h_i^2} (f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{h_i} \beta_i \\ b_i &= \beta_i - 2a_i x_i \\ c_i &= f_i - \beta_i x_i + a_i x_i^2 \end{aligned} \right| \beta_i = 2a_{i-1} x_i + b_{i-1}$$

Кубический сплайн с полиномами Лагранжа (формулы)

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x P_i^3(x), \quad b x_i^3 d(x) = d_i x^3 + x_i^2 x + c_i x + d_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$



Система для определения
коэффициентов сплайна

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{h_1^3} (f_2 - f_1) - \frac{1}{h_1^2} f_1' - \frac{1}{2h_1} f_1'' \\ b_1 &= \frac{1}{2} f_1'' - 3a_1 x_1 \\ c_1 &= f_1' - 2b_1 x_1 - 3a_1 x_1^2 \\ d_1 &= f_1 - c_1 x_1 - b_1 x_1^2 - a_1 x_1^3 \end{aligned} \right| \begin{aligned} f_1' &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \approx \frac{f_2 - f_1}{h_1} \\ f_1'' &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1) \approx 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_i^3(x_i) &= f_i \\ P_i^3(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ \frac{\partial P_i^3}{\partial x}(x_i) &= \frac{\partial P_{i-1}^3}{\partial x}(x_i) \\ \frac{\partial^2 P_i^3}{\partial x^2}(x_i) &= \frac{\partial^2 P_{i-1}^3}{\partial x^2}(x_i) \end{aligned} \right. \left. \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{h_i^3} (f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{h_i^2} \beta_i - \frac{1}{h_i} \gamma_i \\ b_i &= \gamma_i - 3a_i x_i \\ c_i &= \beta_i - 2b_i x_i - 3a_i x_i^2 \\ d_i &= f_i - c_i x_i - b_i x_i^2 - a_i x_i^3 \end{aligned} \right| \begin{aligned} \beta_i &= 3a_{i-1} x_i^2 + 2b_{i-1} x_i + c_{i-1} \\ \gamma_i &= 3a_{i-1} x_i + b_{i-1} \end{aligned}$$

Кубический сплайн с полиномами Эрмита (интерполяционный сплайн)

$$P(x) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \psi_{2i-1}(x) + \sum_{i=1}^n f'_i \cdot \psi_{2i}(x)$$

f'_i – значения производных квадратичного полинома Лагранжа для x_{i-1}, x_i, x_{i+1}

$$dL_i^2(x) = f_{i-1} \frac{(x - x_i) + (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + f_i \frac{(x - x_{i-1}) - (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + f_{i+1} \frac{(x - x_i) + (x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}$$

$$f'_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \approx dL_i^2(x_i) \quad \left| \quad \begin{array}{l} f'_1(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \approx dL_2^2(x_1) \\ f'_n(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n) \approx dL_{n-1}^2(x_n) \end{array} \right.$$

Кубический сплайн с полиномами Эрмита (сглаживающий сплайн)

$[x_1, x_n] = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$ область разбивается на *конечные элементы*
с *эрмитовыми базисными функциями*

Условие для сглаживающего сплайна: $\sum_{i=1}^n (P(x_i) - f_i)^2 \rightarrow \min$

Функционал минимизации для расчета коэффициентов:

$$F(\bar{q}) = \sum_{j=1}^n \omega_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{2k} q_i \psi_i(x_j) - f_j \right)^2 = \bar{q}^T A \bar{q} - 2 \bar{q}^T b + c$$

}

$$A = \sum_{j=1}^n \omega_j \bar{\psi}(x_j) \bar{\psi}^T(x_j)$$

$$b = \sum_{j=1}^n \omega_j \bar{\psi}(x_j) f_j$$

$$c = \sum_{j=1}^n \omega_j f_j^2$$

Функционал в случае неединственности:

$$F(p) = \sum_{j=1}^k \omega_j \cdot (P(x_j) - f_j)^2 + \int_{x_1}^{x_n} \alpha(x) \cdot \left(\frac{dP(x)}{dx} \right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_n} \beta(x) \cdot \left(\frac{d^2 P(x)}{dx^2} \right)^2 dx$$

Кубический сплайн с полиномами Эрмита (сглаживающий сплайн)

Эквивалентное матричное уравнение:

$$Aq = b$$

Матрица A и вектор b собираются из стандартных локальных матриц $\hat{A}^i$ и векторов $\hat{b}^i$ конечного элемента Ω_i :

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_{lm} &= \sum_{j=1}^n \omega_j \hat{\psi}_l(x_j) \hat{\psi}_m(x_j) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x) \frac{d\hat{\psi}_l}{dx} \frac{d\hat{\psi}_m}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \beta(x) \frac{d^2\hat{\psi}_l}{dx^2} \frac{d^2\hat{\psi}_m}{dx^2} dx \\ \hat{b}_l &= \sum_{j=1}^n \omega_j \hat{\psi}_l(x_j) f_j \end{aligned} \right|_{l, m = \overline{1, 4}}$$

Расчет значения сплайна в любой точке:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{2k} q_i \cdot \psi_i(x)$$

Кривая Безье (Bezier Curve)

Кривая Безье – это параметрическая кривая вида:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \cdot b_{i,n-1}(t), \quad t \in [0, 1]$$

$P_i = (x_i, f_i)$ – вектор i -й контрольной точки

$b_{i,j}$ – базисные функции кривой Безье (полиномы Бернштейна):

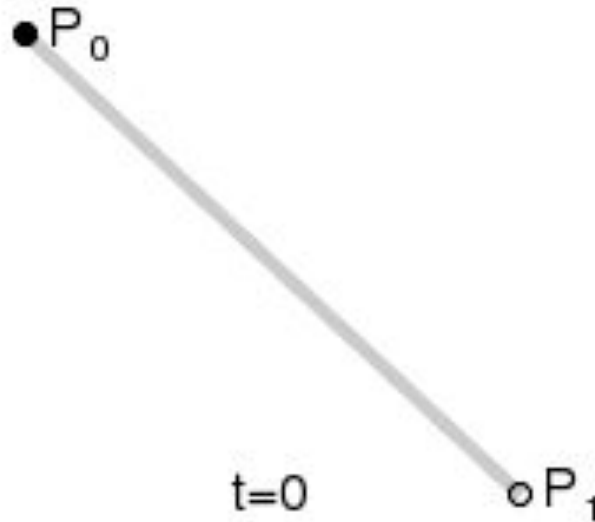
$$b_{i,j}(t) = C_j^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{j-i}$$

$$C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!} \quad - \text{число сочетаний из } j \text{ по } i$$

Расчет значения сплайна для конкретного параметра t :

$$\begin{aligned} x(t) &= B_x(t) \\ y(t) &= B_y(t) \end{aligned}$$

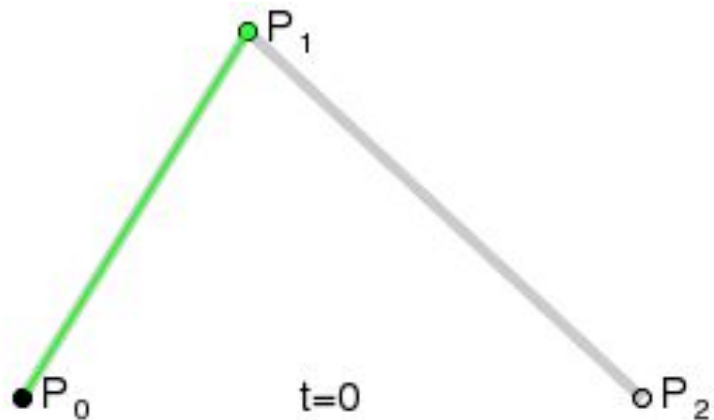
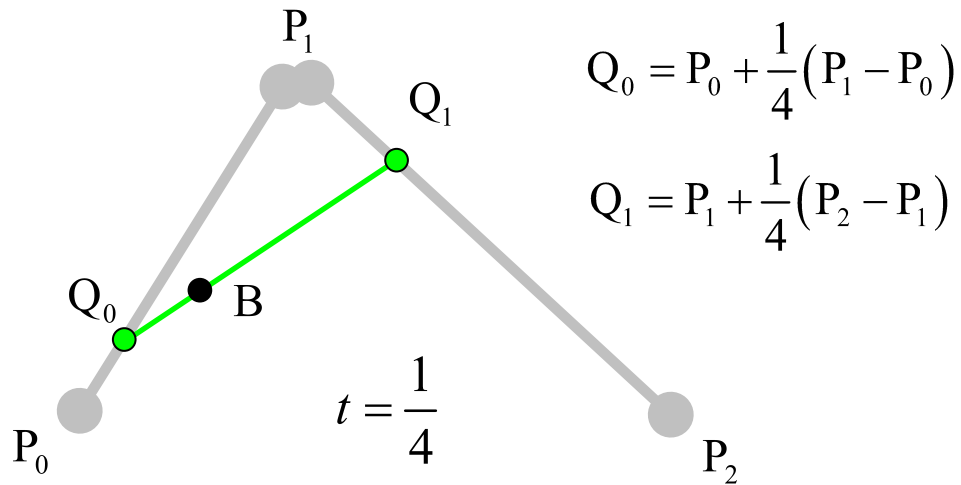
Кривая Безье (2 Контрольных Точки)



Кривая представляет собою отрезок $[P_0, P_1]$

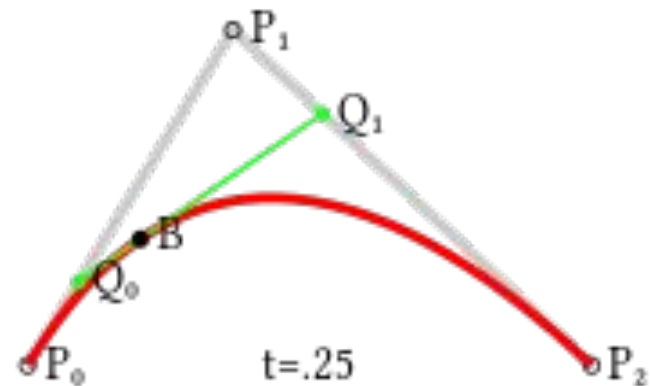
$Q = B(t_i)$ – точка на отрезке $[P_0, P_1]$

Кривая Безье (3 Контрольных Точки)

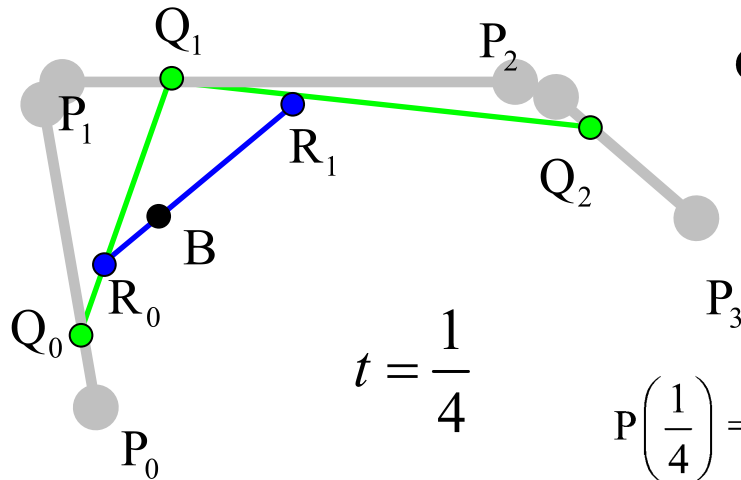


точка кривой Безье:

$$P\left(\frac{1}{4}\right) = B = Q_0 + \frac{1}{4}(Q_1 - Q_0)$$
$$P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$



Кривая Безье (4 Контрольных Точки)



$t = \frac{1}{4}$

$$Q_0 = P_0 + \frac{1}{4}(P_1 - P_0) \quad Q_1 = P_1 + \frac{1}{4}(P_2 - P_1)$$

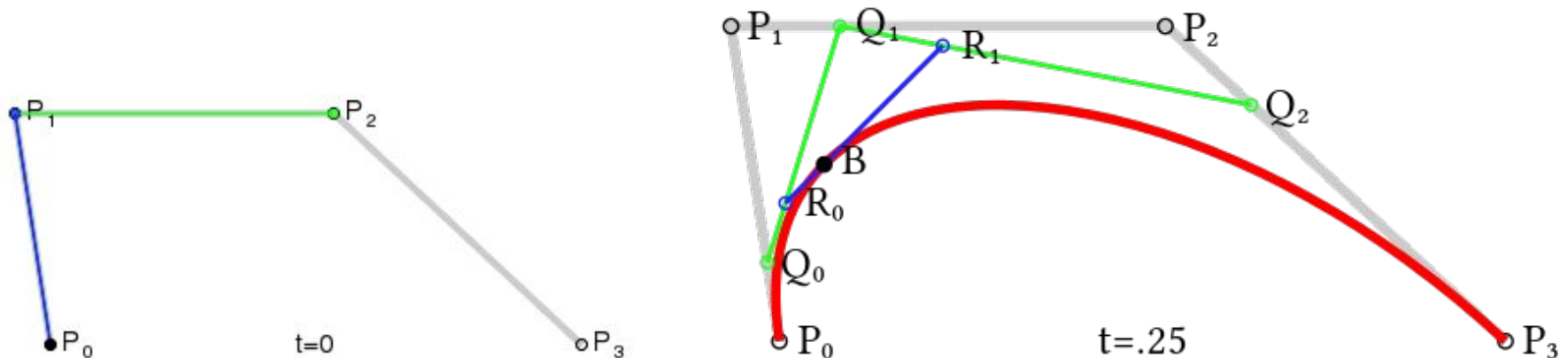
$$Q_2 = P_2 + \frac{1}{4}(P_3 - P_2)$$

$$R_0 = Q_0 + \frac{1}{4}(Q_1 - Q_0)$$

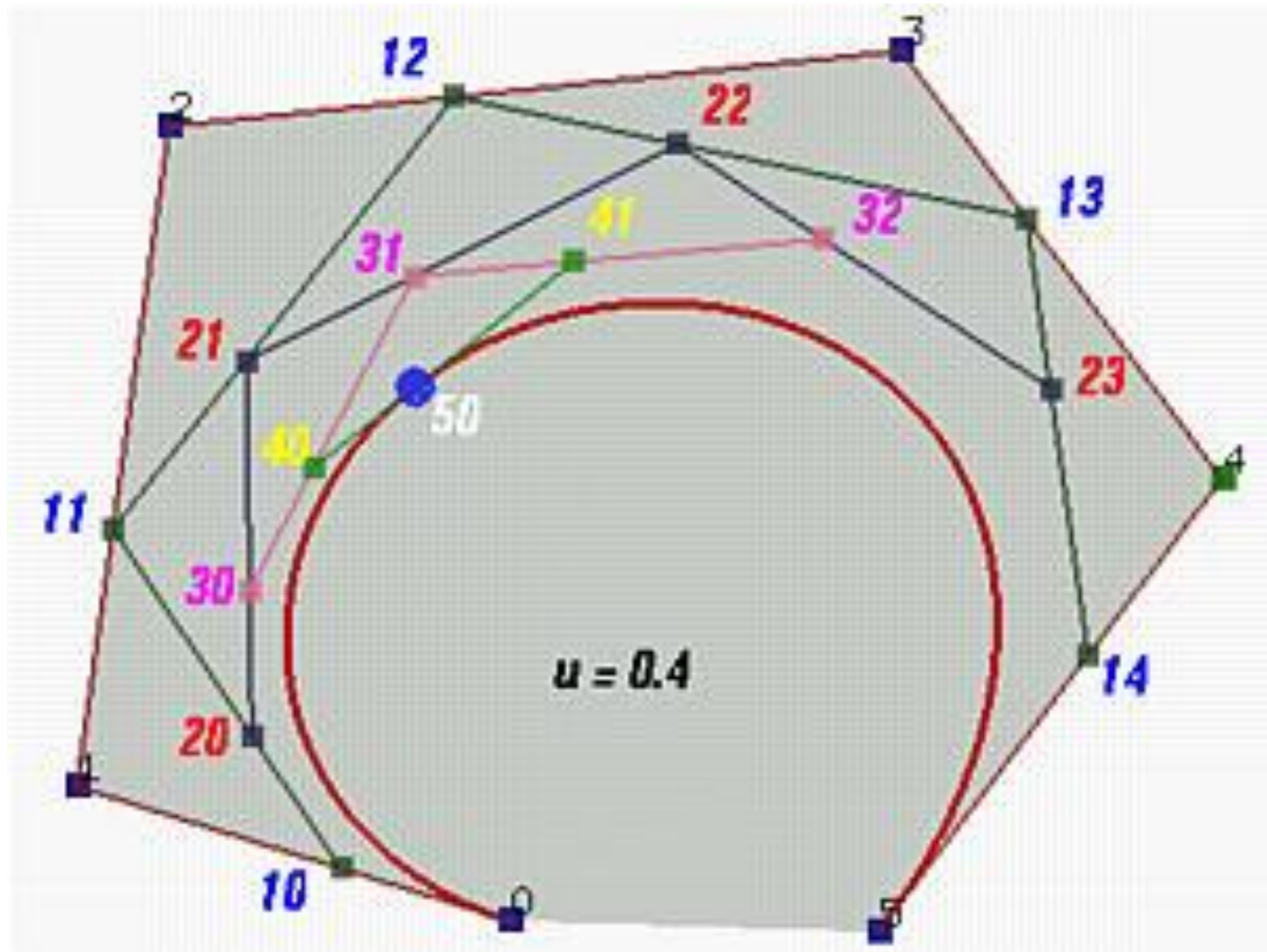
$$R_1 = Q_1 + \frac{1}{4}(Q_2 - Q_1)$$

$$P\left(\frac{1}{4}\right) = B = R_0 + \frac{1}{4}(R_1 - R_0)$$

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$



Кривая Безье (6 Контрольных Точки)



Кривая Безье

(некоторые свойства)

- ✓ соединяет начальную и конечную КТ, но нельзя получить окружность
- ✓ изменение координат хотя бы одной из точек ведет к изменению формы всей кривой (глобальность)
- ✓ всегда располагается внутри фигуры (выпуклой оболочки), образованной линиями, соединяющими контрольные точки
- ✓ симметрична, то есть обмен местами между начальной и конечной КТ (изменение направления траектории) не влияет на форму кривой
- ✓ степень кривой всегда на одну ступень ниже числа КТ (например, при трех контрольных точках форма кривой – парабола)

В-сплайн (определение)

В-сплайн – это *сплайн-функция*,
имеющая *наименьший носитель* для заданных:

- степени
- гладкости
- разбиения области определения

В-сплайн – это «*базисный сплайн*»

Теорема: любой сплайн с заданной степенью, гладкостью и областью может быть представлен как линейная комбинация *В-сплайнов* той же степени и гладкости на той же области определения

В-сплайн (определение)

В-сплайн – это параметрическая кривая, задаваемая выражением:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \cdot B_{i,p}(t),$$

~~вектор~~ P – ~~узлы~~ специальный (d) не KT

$p \in [2, n-1]$ – ~~степень полинома~~ $(1 +)$

Базисные функции рассчитываются
по рекуррентным формулам Кокса-де Бура:

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i) B_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t) B_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}}$$

В-сплайн

(задание вектора узлов)

Открытый В-сплайн: $T = [0, 1, 2, \dots, n-p-1]$

Закрытый В-сплайн:

$$T = T^1 \cup T^2 \cup T^3$$

$$T_{1 \times (p)}^1 = [0, 0, \dots, 0]$$

$$T_{1 \times (n-p)}^2 = [1, 2, \dots, n-p]$$

$$T_{1 \times (p)}^3 = [n-p+1, \dots, n-p+1]$$

Замкнутый В-сплайн:

$$T = [1, 2, 3, \dots, n+2p-1]$$

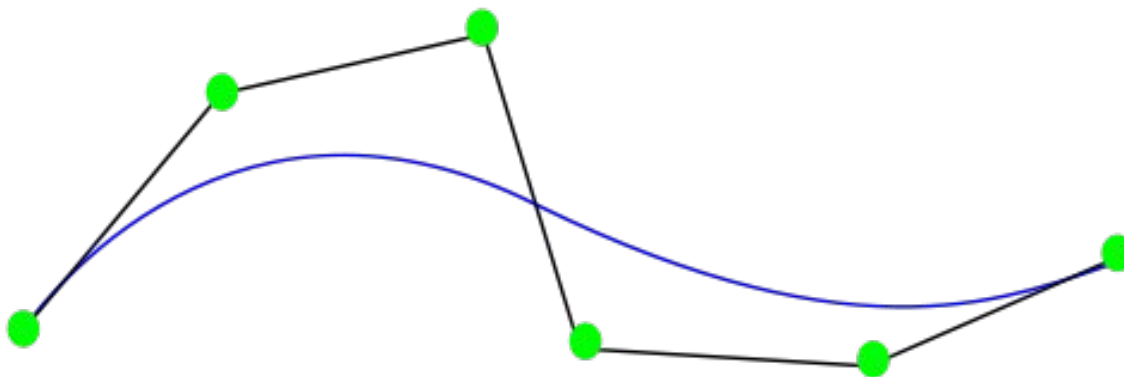
$$f = [f_1, f_2, \dots, f_n] \cup [f_1, f_2, \dots, f_{p-1}]$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \cdot B_{i,p-1}(t) + \sum_{i=0}^{p-1} P_i \cdot B_{i+n,p-1}(t)$$

В-сплайн (некоторые свойства)

Некоторые свойства:

- если $p = n - 1$, то *Закрытый В-сплайн* вырождается в *Кривую Безье*
- масштабирование и параллельный перенос КТ не влияет на $B_{i,p}(t)$
- содержится в выпуклой оболочке его КТ
- в общем случае является локальным
- степень гладкости равна $p - 1$
- кривая проходит вблизи средней точки каждой стороны выпуклой оболочки, за исключением первой и последней



NURBS-сплайн

(Non-Uniform Rational B-Spline)

NURBS – неоднородный рациональный В-сплайн

Рациональный В-сплайн – это проекция (обобщение) *нерационального* (полиномиального) В-сплайна, определенного в четырехмерном (4D) однородном координатном пространстве, на трехмерное (3D) физическое пространство

$$[x, y, z, \omega] \leftrightarrow \left[\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}, \frac{z}{\omega} \right] = [x', y', z']$$

Если КТ равноудалены друг от друга,
то **В-сплайн** является **однородным**,
в противном случае - **неоднородный**

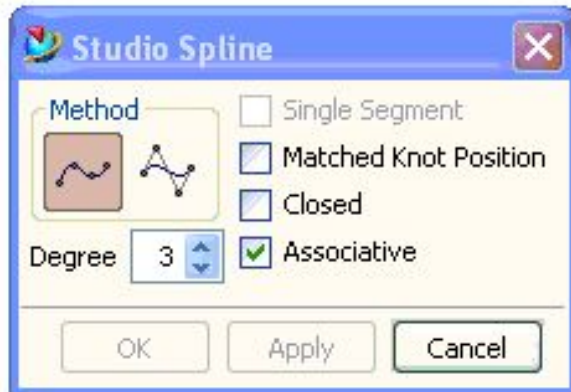
NURBS-сплайн (Non-Uniform Rational B-Spline)

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot P'_i \cdot B_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot B_{i,p}(t)} = \sum_{i=0}^{n-1} P'_i \cdot R_{i,p}(t)$$

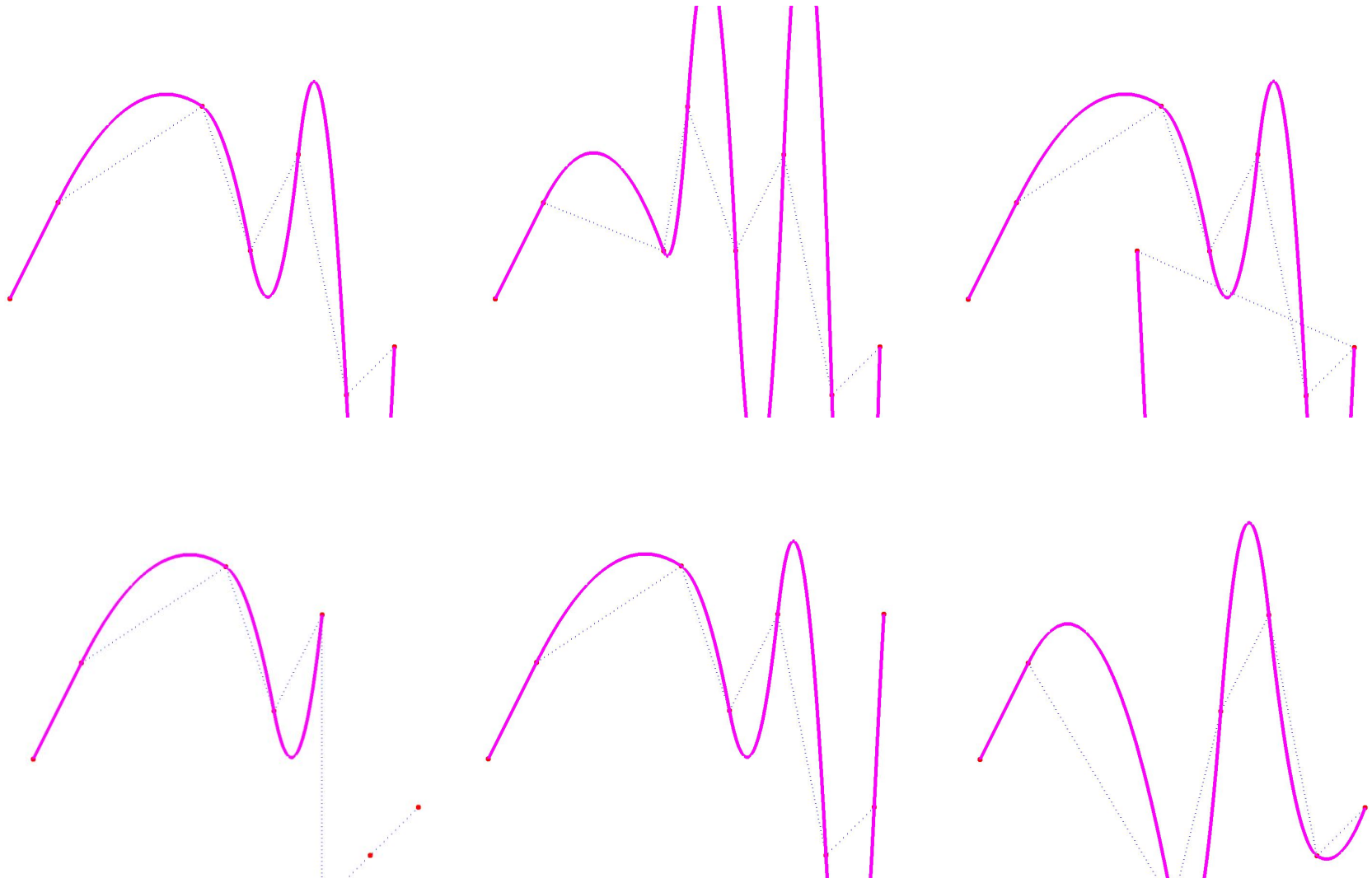
P'_i – вершины полигона в 3D

$R_{i,p}(t)$ – базисные функции, $\sum_{i=0}^{n-1} R_{i,p}(t) \equiv 1$

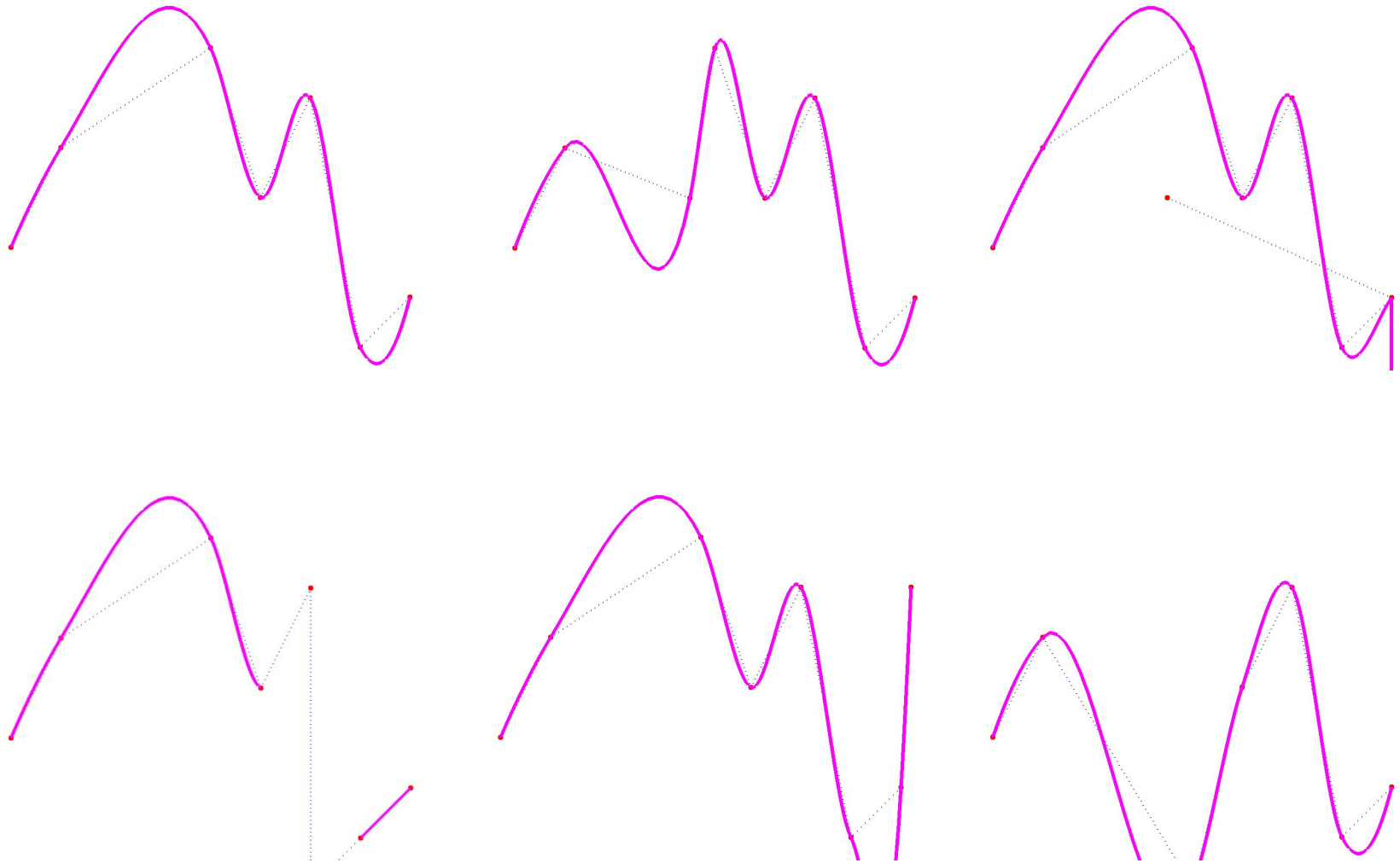
ω_i – веса контрольных точек



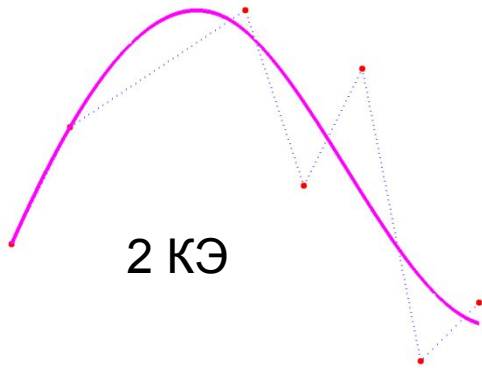
Лагранжев квадратичный интерполяционный (различные наборы КТ)



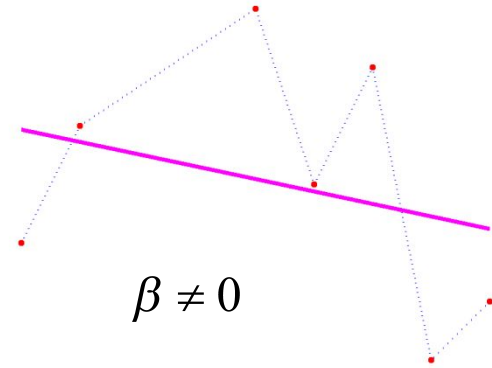
Эрмитов кубический интерполяционный сплайн (различные наборы КТ)



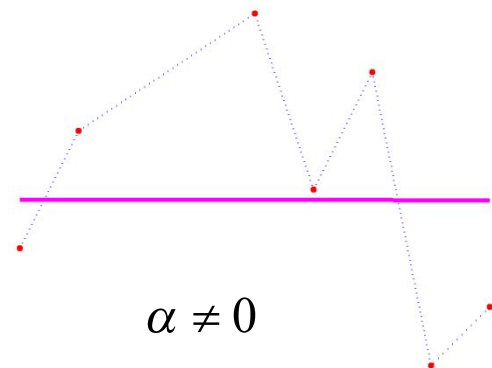
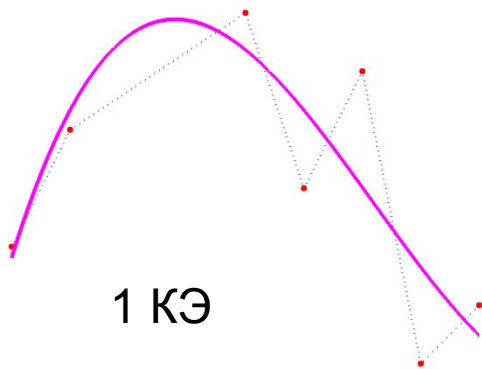
Эрмитов кубический сглаживающий сплайн (различные наборы КТ)



$$\alpha = 0, \beta = 0$$

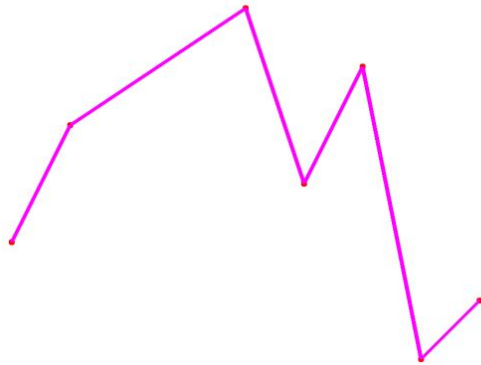


1 КЭ,

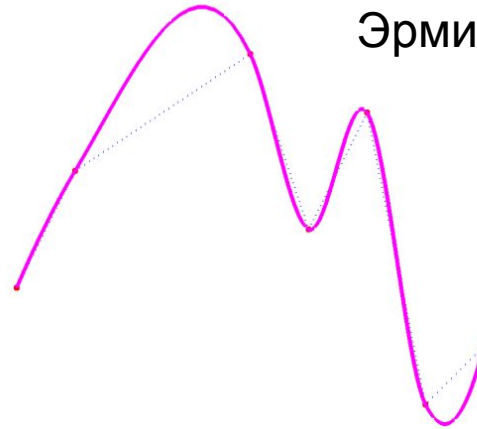


Сравнение интерполяционных сплайнов (эрмитового и лагранжевых)

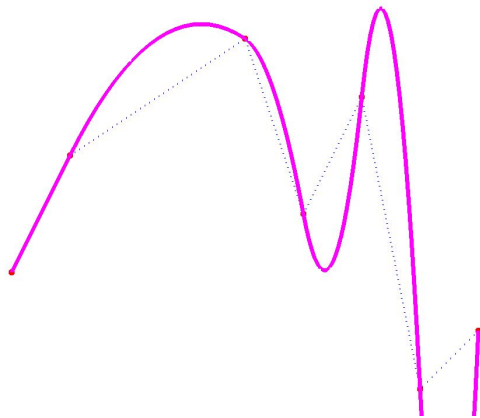
Линейный сплайн



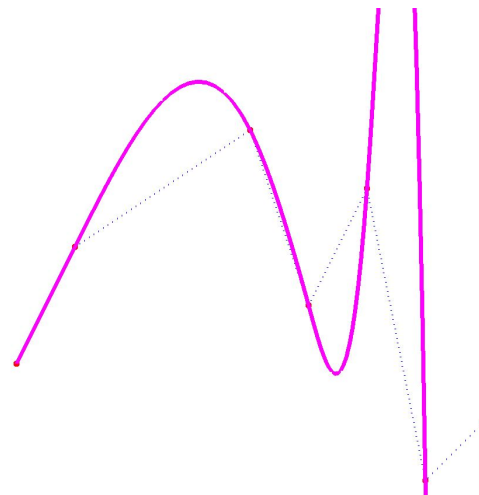
Эрмитов кубический



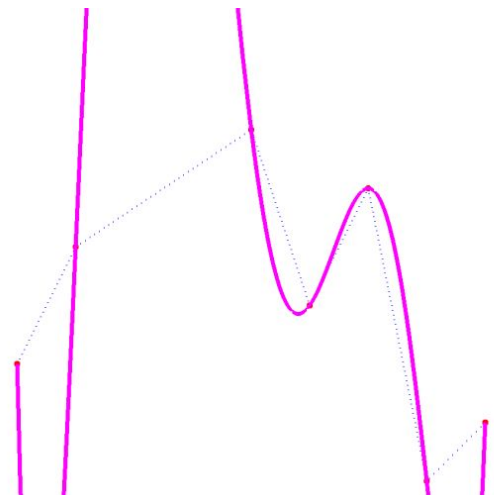
Лагранжев квадратичный



Лагранжев кубический

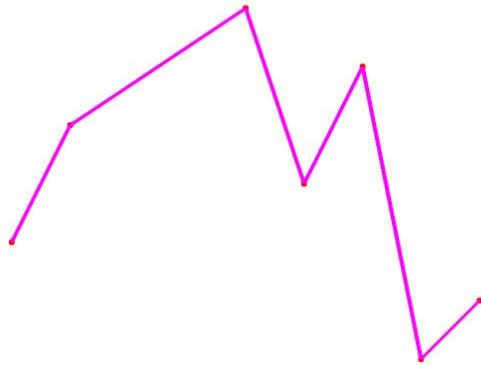


Лагранжев степени n

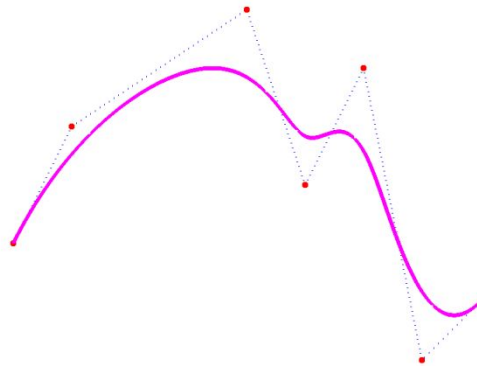
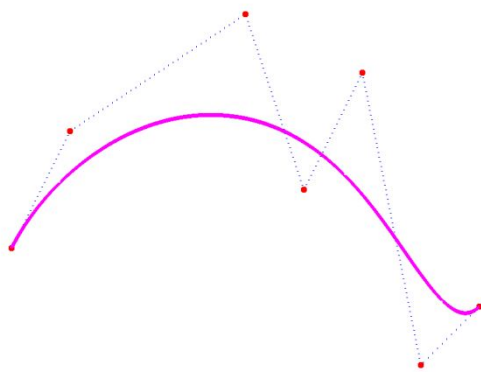
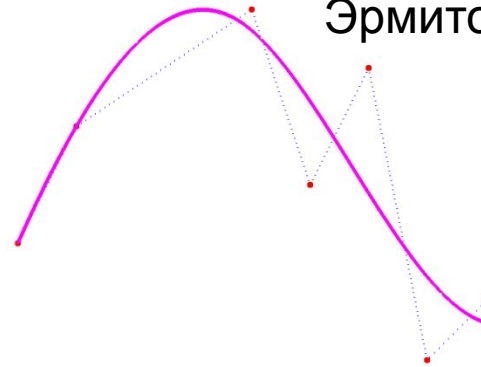


Сравнение сглаживающих сплайнов (эрмитов и закрытые В-сплайны)

Линейный сплайн



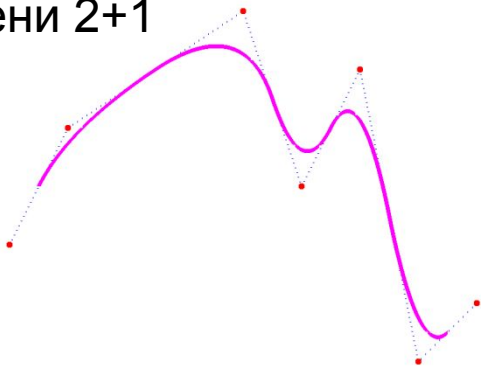
Эрмитов кубический



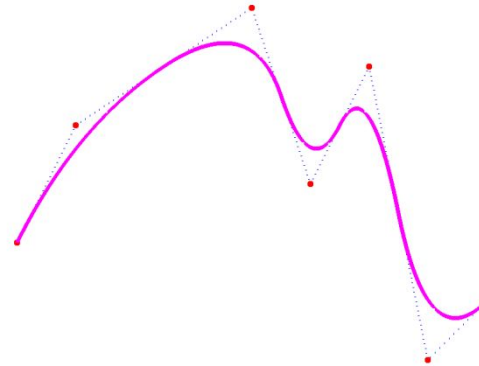
В-сплайн степени 6+1 (Безье) В-сплайн степени 3+1 В-сплайн степени 1+1

Сравнение видов В-сплайнов

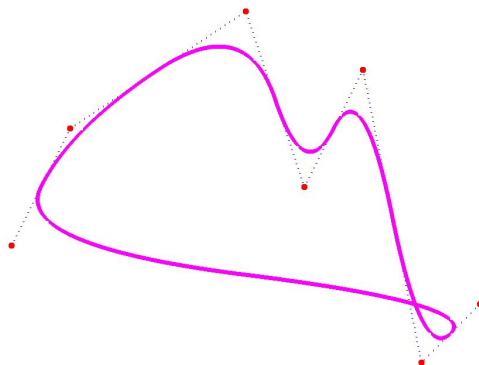
Открытый
степени 2+1



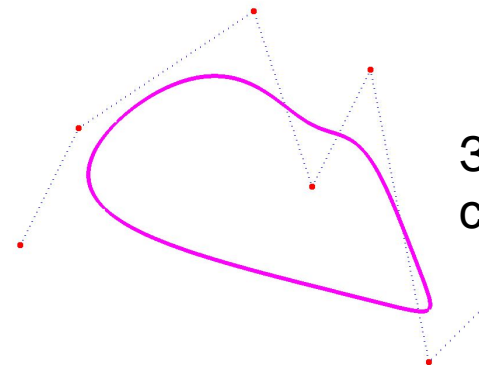
Закрытый
степени 2+1



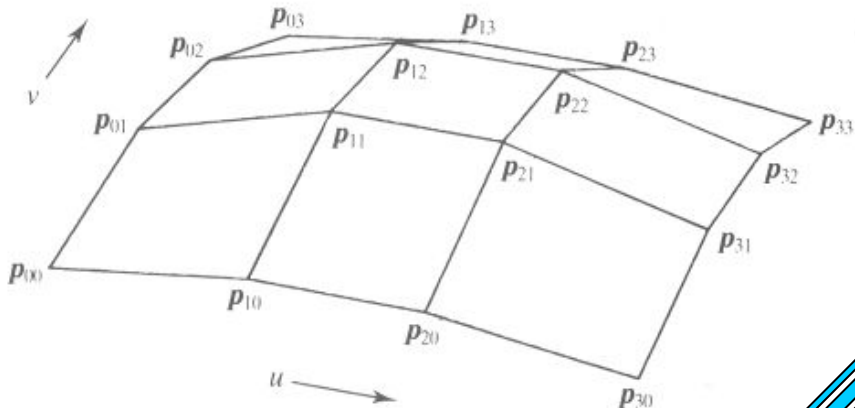
Замкнутый
степени 2+1



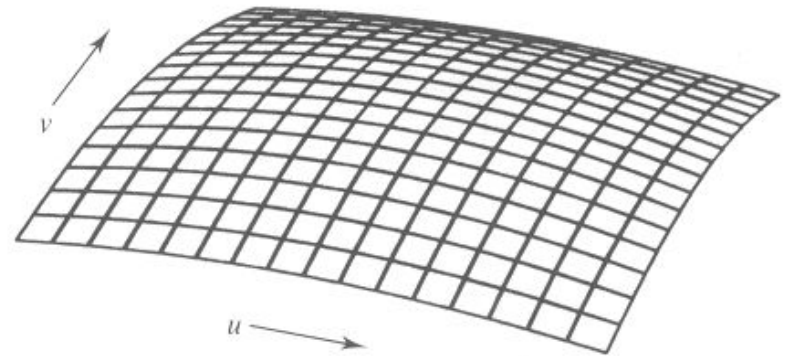
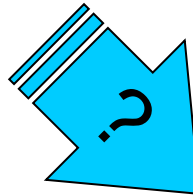
Замкнутый
степени 6+1



Сплайн-поверхности



$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i,j} \cdot b_i(u) \cdot b_j(v)$$



Сплайн-поверхности (Безье и В-сплайн)

$P_{i,j}$ – $(n \times m)$ контрольных точек (вершин сетки)

Поверхность Безье

порядка $(n-1, m-1)$

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} P_{i,j} \cdot B_{i,n-1}(u) \cdot B_{j,m-1}(v)$$

Поверхность В-сплайна

порядка (p, q) :

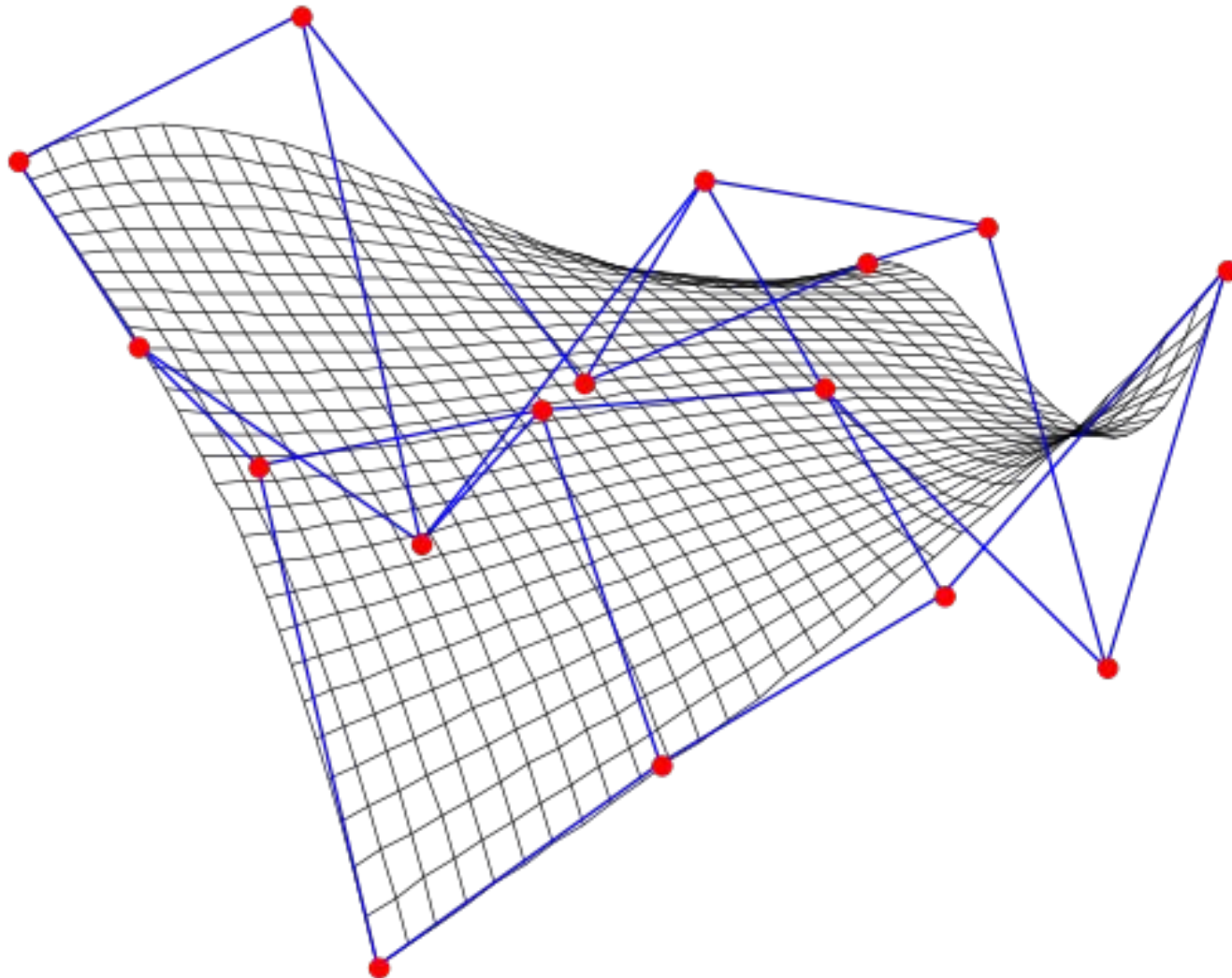
$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} P_{i,j} \cdot B_{i,p}(u) \cdot B_{j,q}(v)$$

Поверхность NURBS

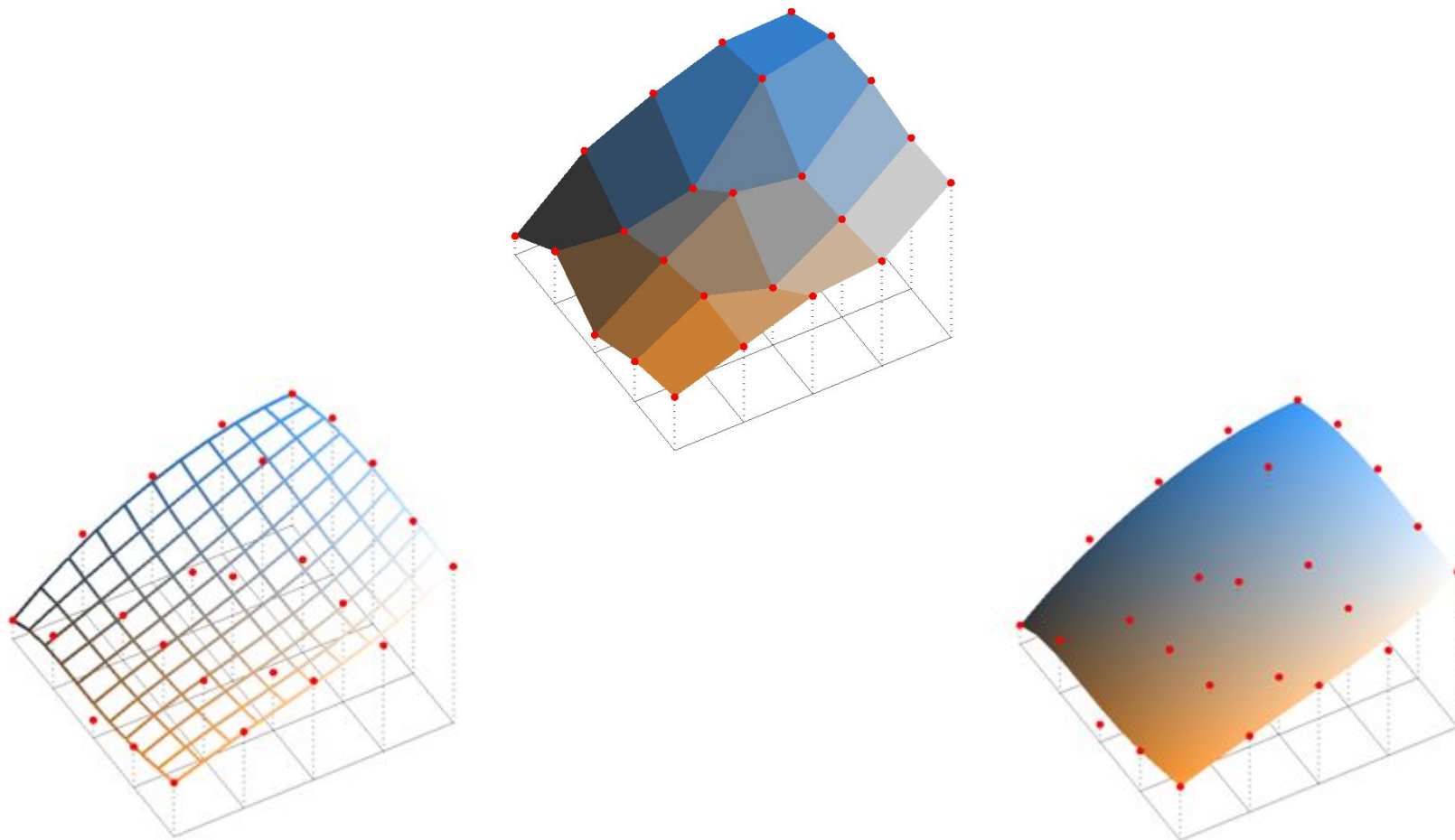
порядка (p, q) :

$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} w_{i,j} P_{i,j} \cdot B_{i,p}(u) \cdot B_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} w_{i,j} B_{i,p}(u) \cdot B_{j,q}(v)}$$

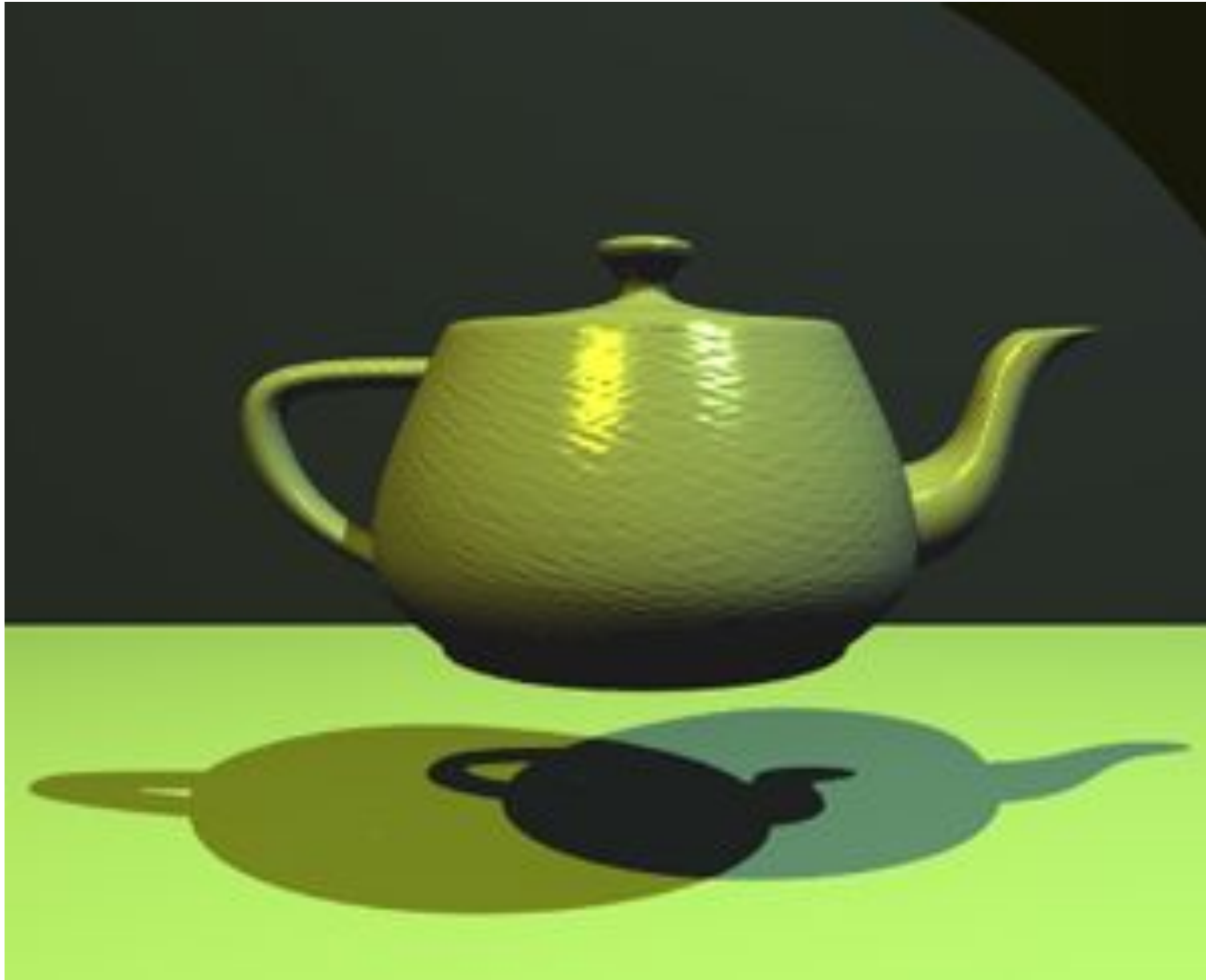
Сплайн-поверхности (Безье)



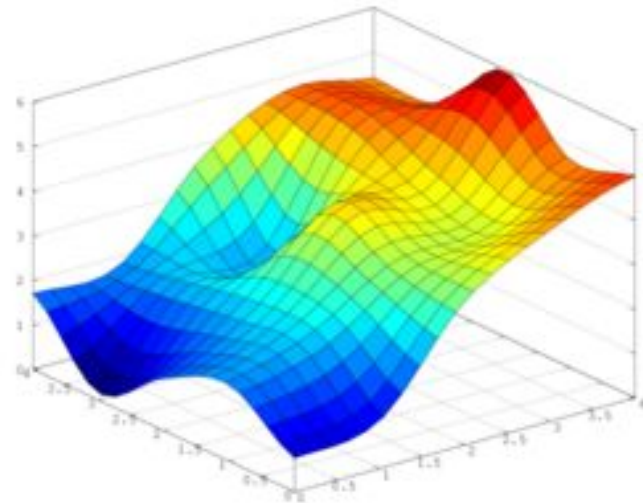
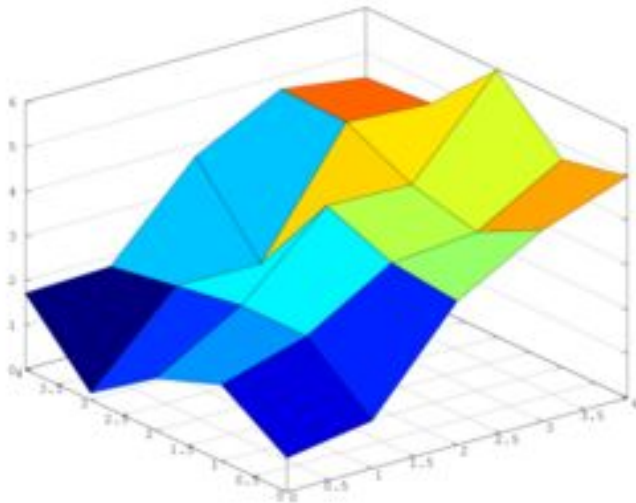
Сплайн-поверхности (Безье)



Сплайн-поверхности (сплайн Безье, чайник Юта)



Сплайн-поверхности (бикубический интерполяционный)



Поддержка в OpenGL

(библиотека GLU)

gluNewNurbsRenderer () // создание объекта типа NURBS

gluDeleteNurbsRenderer (*) // создание объекта типа NURBS

gluNurbsProperty (*) // задание свойств

gluNurbsCallback() // проверка на ошибки и возврат значений

gluBeginSurface (*) // начало рисование поверхности

gluNurbsSurface (*) // передача контрольных точек, нормалей,....

gluEndSurface (*) // завершение рисования поверхности

gluBeginCurve (*) // начало рисование кривой

gluNurbsCurve (*) // передача контрольных точек, нормалей,....

gluEndCurve (*) // завершение рисования кривой

Поддержка в OpenGL

(пример построения Безье с равномерным шагом)

```
parts = 20 * n;
```

```
gl.Map1(OpenGL.GL_MAP1_VERTEX_3, 0f, 1f, 3, n, ver3);
```

```
gl.Enable(OpenGL.GL_MAP1_VERTEX_3);
```

```
gl.MapGrid1(parts, 0f, 1f);
```

```
gl.EvalMesh1(OpenGL.GL_LINE, 0, parts);
```

```
gl.Disable(OpenGL.GL_MAP1_VERTEX_3);
```