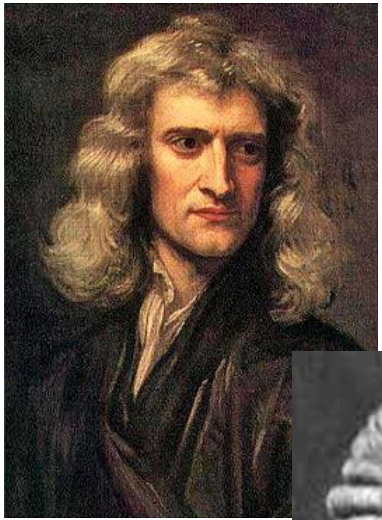
Первый замечательный предел

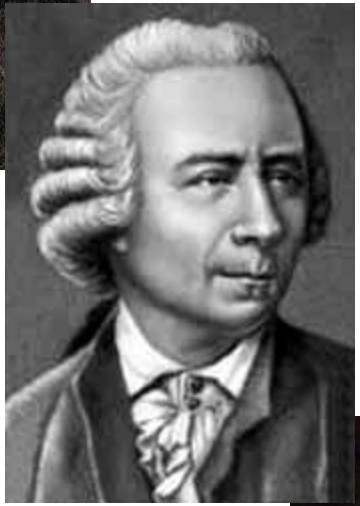
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Презентация Поляковой Валерии, группа 15-60, ИПП
Преподаватель: доц. Светлаков Алексей Николаевич

История развития

- Это понятие на интуитивном уровне использовалось ещё во второй половине 17 века английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном (1642 - 1727), а также математиками 18 века - швейцарским, немецким и русским математиком Леонардом Эйлером (1707 - 1783) и французским математиком, астрономом и механиком Жозефом Луи Лагранжем (1736 - 1813).

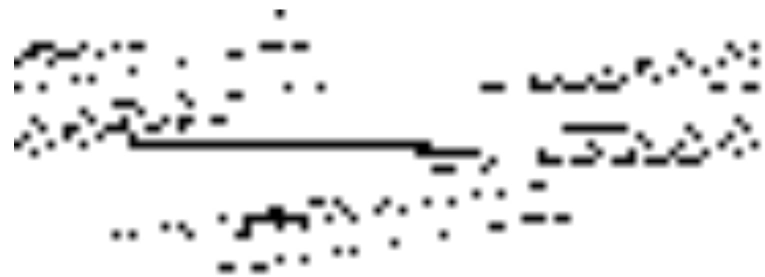




- Это было связано с тем, что ученые того времени не ставили перед собой задачу построения теории пределов. Первые строгие определения предела последовательности дали в 1816 году чешский математик, философ, теолог Бернард Больцано (1781 - 1848) и французский математик Огустен Луи Коши (1789 - 1857) в 1821 году.

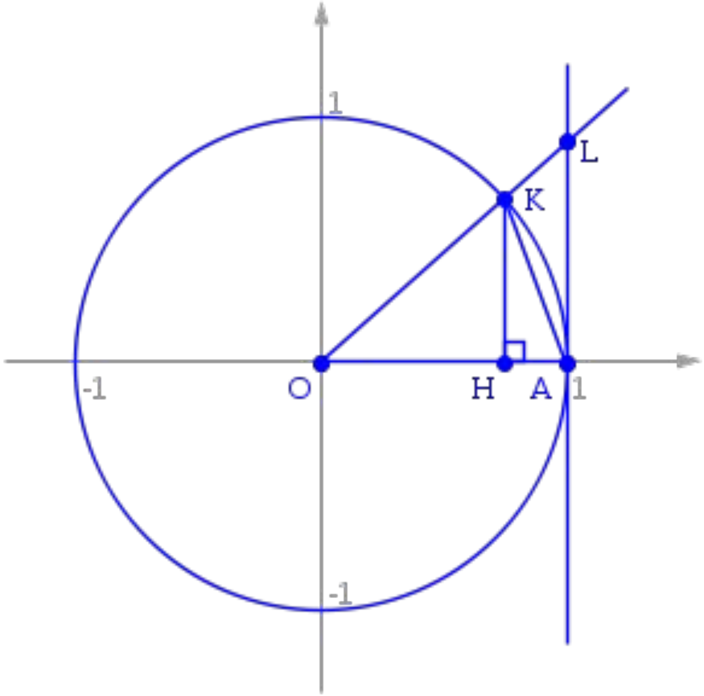
Первый замечательный предел

- Первым замечательным пределом называется предел отношения синуса бесконечно малой дуги к той же дуге, выраженной в радианной мере



Доказательство

- Рассмотрим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}$ и докажем, что они равны 1:
  - Пусть x ϵ (0; π/2) . Отложим этот угол на единичной окружности (R=1).
  - Точка *K* — точка пересечения луча с окружностью, а точка *L* — с касательной к единичной окружности в точке (1; 0). Точка *H* — проекция точки *K* на ось *OX*.



- Очевидно, что:

$S_{\triangle OKA} < S_{sectKOA} < S_{\triangle OAL}$ (1)

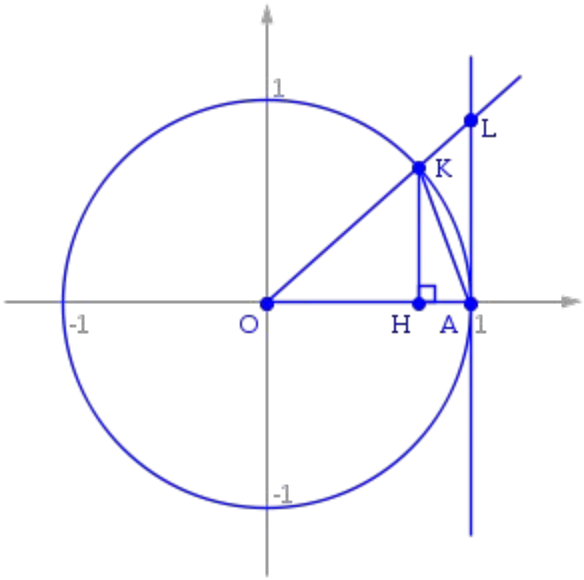
(где — $S_{sectKOA}$ площадь сектора КОА)

$$S_{\triangle KOA} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OK| \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{sectKOA} = \frac{1}{2} R^2 x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |LA| = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

(из $\triangle OAL$:|LA|=tgX



- Подставляя в (1), получим:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Так как при x□0+SinX>0,x>0,tgX>0

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Умножаем на SinX:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

- Перейдём к пределу:

$$\lim_{x\to 0+} \cos x \leqslant \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

$$1 \leqslant \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x}$$

- Найдём левый односторонний предел (так как функция четна, в этом нет необходимости, достаточно доказать это для правого предела):

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=\begin{bmatrix} u=-x \\ x=-u \\ u\to 0+ \\ x\to 0- \end{bmatrix}=\lim_{u\to 0+}\frac{\sin(-u)}{-u}=\lim_{u\to 0+}\frac{-\sin(u)}{-u}=\lim_{u\to 0+}\frac{\sin(u)}{u}=1$$

- Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, а значит и сам предел равен 1.

Следствия

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

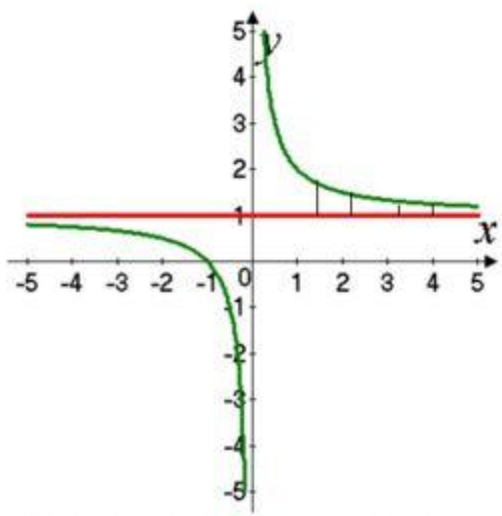
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\begin{bmatrix} u=\arcsin x\\ x=\sin u\\ u\to 0\\ x\to 0\end{bmatrix}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg} x\\ x=\operatorname{tg} u\\ u\to 0\\ x\to 0\end{bmatrix}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg} u}=1$$

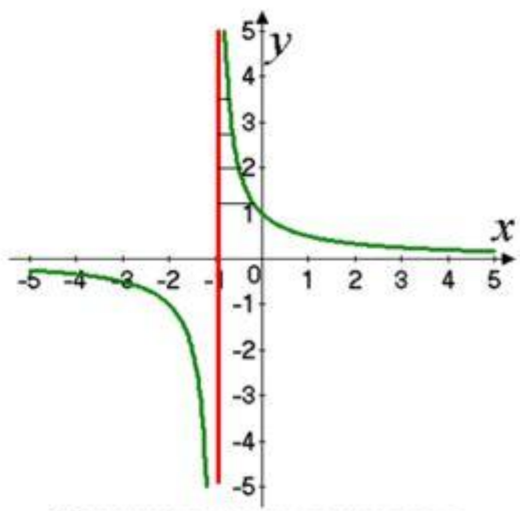
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=1^2=1$$

Применение пределов на практике

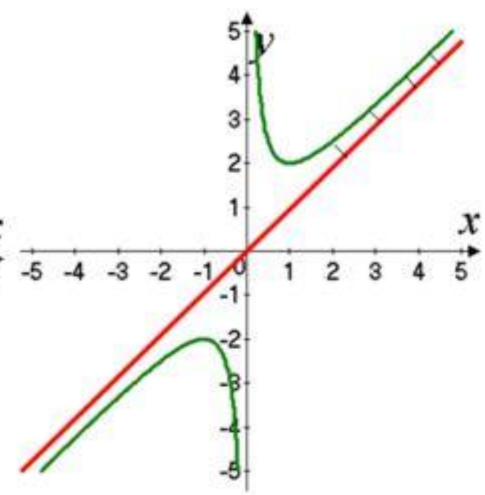
- Теория пределов очень активно применяется в экономических расчетах, например, в доказательствах и расчетах, которые связаны с непрерывными процессами; в финансовых рентах.
- Пределы функции применяются для нахождения асимптот графика функции при ее исследовании.



Горизонтальная асимптота



Вертикальная асимптота



Наклонная асимптота

Список литературы

- Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. (В 3-х томах) - М.: Дрофа, 2004.
- Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа (в двух частях). — М.: Физматлит, 2005.
- Кричевец А.Н., Шикин Е.В., Дьячков А.Г. Математика для психологов. – М.: ФЛИНТА, 2013
- Светлаков А.Н. – видеолекции с сайта http://mathdialogue.livejournal.com/

Спасибо за внимание!