Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

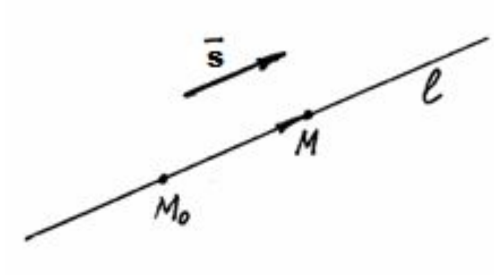
Прямая в пространстве

Электронный курс лекций «Линейная алгебра»,
часть 12

Оренбург 2016

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{s}=\{m;n;p\}$, $m^2+n^2+p^2\neq 0$

Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка пространства, а l - прямая, удовлетворяющая указанным условиям, уравнение которой нам нужно составить.



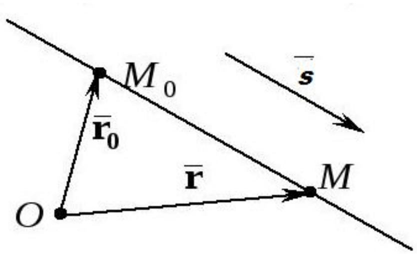
$$M(x;y;z)\in l \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}\in l$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}\ \Leftrightarrow\qquad \boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

каноническое уравнение

$$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{s},t\in R;\qquad \begin{cases}x-x_0=tm,\\ y-y_0=tn,\\ z-z_0=tp,\end{cases}\quad t\in R;\qquad \boxed{\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}}\quad t\in R$$

параметрическое уравнение



$$\vec{r}=\overrightarrow{OM},$$

$$\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0},$$

$$\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0;$$

$$\boxed{\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s},t\in R}$$

в *векторной форме.*

$$\boxed{\left[\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{s}\right]=\vec{0}}$$

Определение 1. Любой ненулевой вектор, параллельный прямой, называется *направляющим* вектором прямой.

Пример 1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;5;-7)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{4;-6;9\}$, в каноническом и параметрическом видах.

Решение.

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{-6}=\frac{z+7}{9}$$

$$\begin{cases} x=2+4t, \\ y=5-6t, \\ z=-7+9t, \quad t\in R. \end{cases}$$

Пример 2. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;6;5)$ параллельно прямой $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{6}=\frac{z}{1}$.

Решение.

$$\vec{s}=\{5;6;1\};$$

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-6}{6}=\frac{z-5}{1}$$

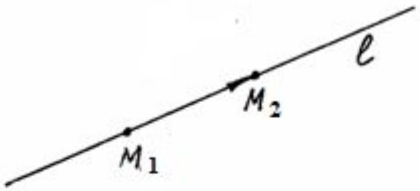
Пример 3. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;6;5)$, параллельно оси OZ.

Решение.

$$\vec{s}=\vec{k}=\{0;0;1\},$$

$$\begin{cases} x=1+0\cdot t, \\ y=6+0\cdot t, \\ z=5+1\cdot t, \quad t\in R. \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$



$$M_0(x_0;y_0;z_0) = M_1(x_1;y_1;z_1),\quad \vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$$

в *канонической форме*

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},}$$

в *параметрической форме*

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + (x_2-x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2-y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2-z_1)t, \end{cases}} \quad t \in R$$

в векторной форме

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_1 = t\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right), t \in R,} \qquad \boxed{\left[\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right] = \vec{0},}$$

$\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радиус-векторы точек M, M_1, M_2.

Пример 4.

$M_1(3;5;4)$,

$M_2(-1;10;15)$

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-5}{10-5} = \frac{z-4}{15-4},$$

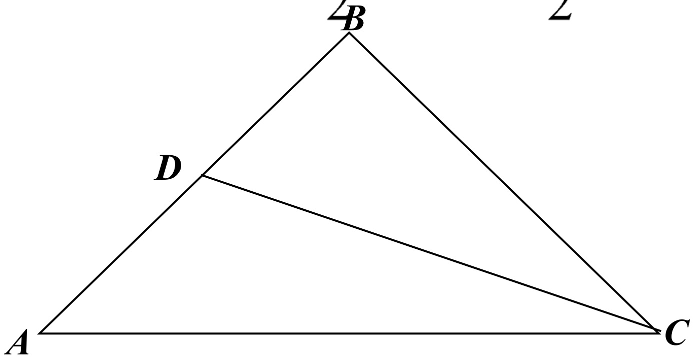
$$\boxed{\frac{x-3}{-4} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-4}{11};}$$

$$\begin{cases} x = 3 + (-1-3)t, \\ y = 5 + (10-5)t, \\ z = 4 + (15-4)t, \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = 5 + 5t, \\ z = 4 + 11t, \end{cases}} \quad t \in R$$

Пример 5. Запишите параметрическое уравнение медианы, проведенной из вершины C треугольника ABC, если $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$ и $C(4;-7;-2)$.

ешение.

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+(-5)}{2}=-1,\ y_D=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6+2}{2}=4,\ z_D=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-7+3}{2}=-2$$



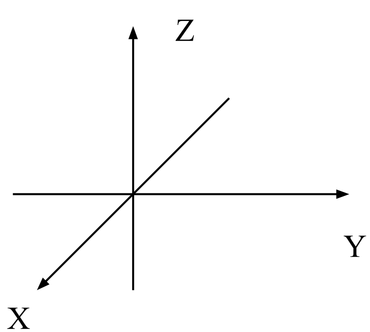
$$\boxed{M_1=C,\ \ M_2=D}$$

$$\begin{cases} x=4+(-1-4)t, \\ y=-7+(4+7)t, \\ z=-2+(-2-(-2))t, t\in R; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4-5t, \\ y=-7+11t, \\ z=-2, t\in R; \end{cases}$$

Пример 6. Определите координаты точек пересечения прямой, проходящей через точки $M_1(-6;6;-5)$ и $M_2(12;-6;1)$, с координатными плоскостями.

Решение.

$$l:\begin{cases} x=-6+(12-(-6))t, \\ y=6+(-6-6)t, \\ z=-5+(1-(-5))t, t\in R; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-6+18t, \\ y=6-12t, \\ z=-5+6t, t\in R; \end{cases}$$

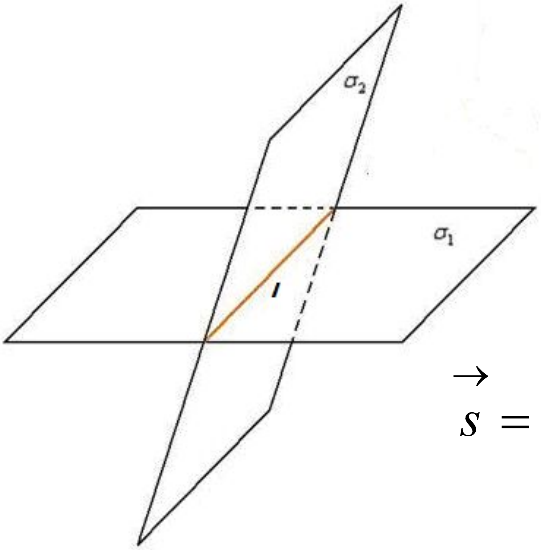


$$P_1=l\cap XOY: z=0 \Leftrightarrow -5+6t=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{6}, \qquad P_1(9;-4;0);$$

$$P_2=l\cap XOZ: y=0 \Leftrightarrow 6-12t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}, \qquad P_2(3;0;-2);$$

$$P_3=l\cap YOZ: x=0 \Leftrightarrow -6+18t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}, \qquad P_3(0;2;-3)$$

Общее уравнение прямой в пространстве

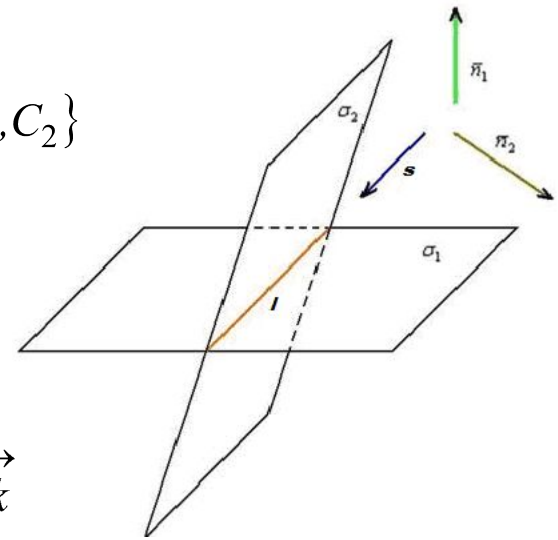


$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

общее уравнение

ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных, у которой, равен 2.

$$\vec{s} = \left[\vec{n}_1, \vec{n}_2\right], \qquad \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \qquad \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$



Пример 3.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0, \end{cases}$$

запишите уравнение в канонической форме.

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4, \\ 3x + 2y - 5z = 4; \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & -14 & -8 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-0}{8}}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4, \\ 8y - 14z = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 4 - 3z, \\ 8y = -8 + 14z. \end{cases}$$

$z = 0,$
$y = -1,$
$x = 2$

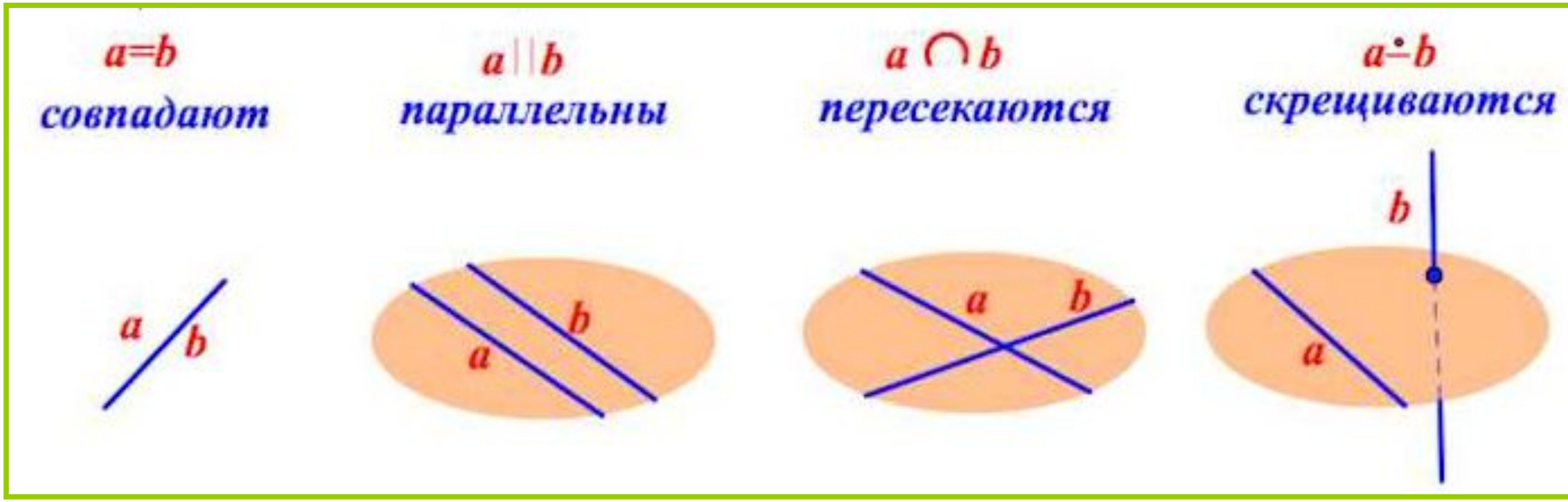
<u>*2 способ.*</u>

$z = 8,$
$y = 13,$
$x = 6$

$M_1(2;-1;0);$

$M_2(6;13;8)$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве



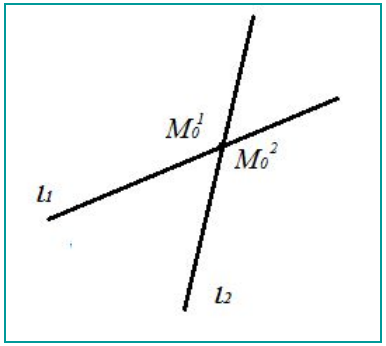
$$l_1 : \frac{x - x_0^1}{m_1} = \frac{y - y_0^1}{n_1} = \frac{z - z_0^1}{p_1}, \qquad M_0^1\left(x_0^1; y_0^1; z_0^1\right) \in l_1, \qquad \vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\} \,||\, l_1,$$

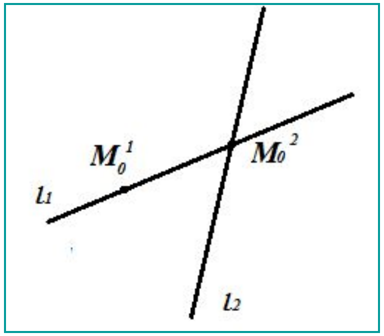
$$l_2 : \frac{x - x_0^2}{m_2} = \frac{y - y_0^2}{n_2} = \frac{z - z_0^2}{p_2}, \qquad M_0^2\left(x_0^2; y_0^2; z_0^2\right) \in l_2, \qquad \vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\} \,||\, l_2,$$

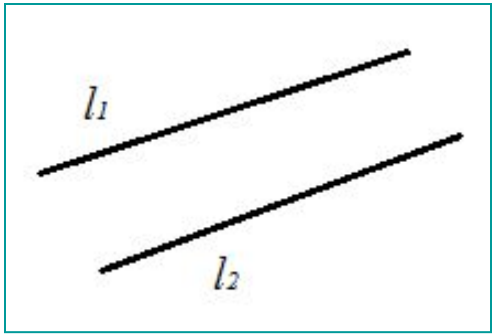
$$m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 \neq 0, \qquad m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 \neq 0$$

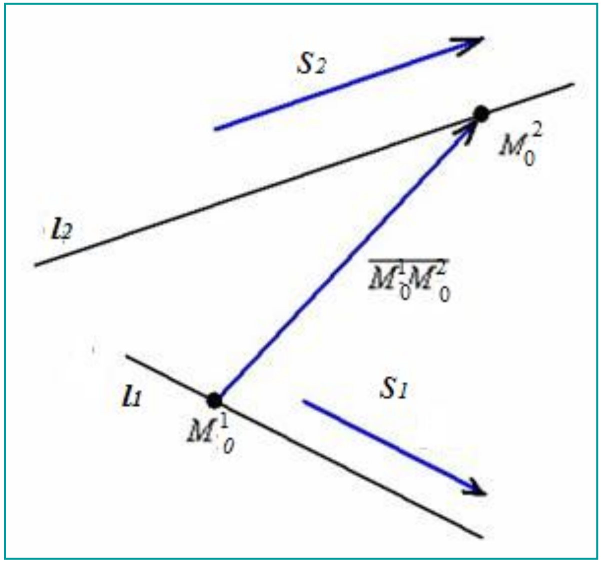
Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

$$l_1: \frac{x-x_0^1}{m_1}=\frac{y-y_0^1}{n_1}=\frac{z-z_0^1}{p_1} \qquad l_2: \frac{x-x_0^2}{m_2}=\frac{y-y_0^2}{n_2}=\frac{z-z_0^2}{p_2}$$









$$\exists\alpha: \begin{cases} l_1\in\alpha, \\ l_2\in\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0^1M_0^2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2 - \text{компланарны},$$

$$\overrightarrow{M_0^1M_0^2}\,\vec{s}_1\,\vec{s}_2=0,$$

$$\exists\alpha: \begin{cases} l_1\in\alpha, \\ l_2\in\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0^2-x_0^1 & y_0^2-y_0^1 & z_0^2-z_o^1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

Пример 4

Докажите, что прямые, заданные параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 6 - 4t, \quad t \in R \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -4 + t, \quad t \in R \end{cases}$$

пересекаются.

Решение.

$$l_1: \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{-4}, \qquad l_2: \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+4}{1}$$

$$M_0^1(-3;-2;6), \quad \vec{s_1} = \{2;3;-4\}, \quad M_0^2(5;-1;-4), \quad \vec{s_2} = \{1;-4;1\}, \quad \overrightarrow{M_0^1 M_0^2} = \{8;1;-10\}$$

$$\begin{vmatrix} x_0^2 - x_0^1 & y_0^2 - y_0^1 & z_0^2 - z_o^1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 80 - 4 + 30 - 2 - 128 = 134 - 134 = 0$$

данные прямые принадлежат одной плоскости.

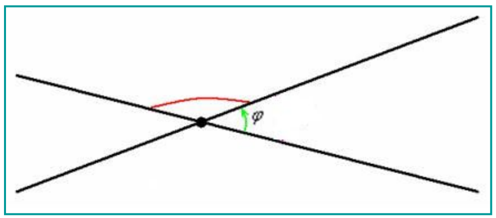
$\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$ - неколлинеарные, прямые пересекаются.

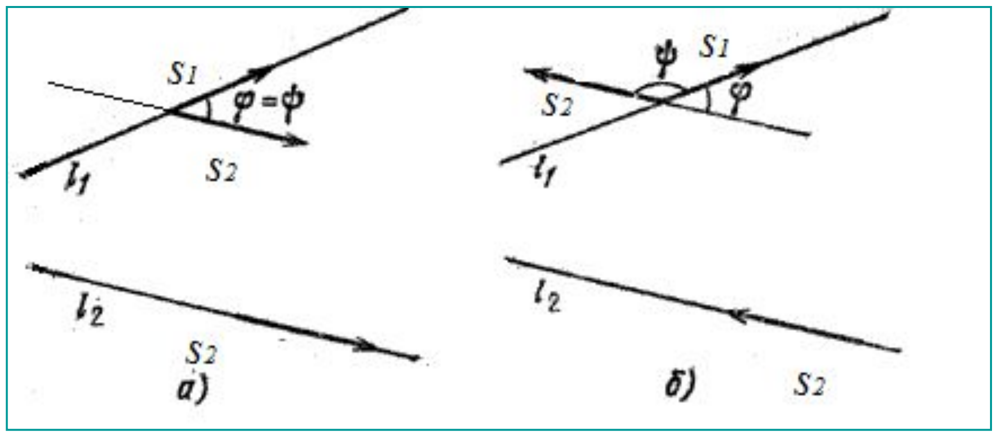
Угол между прямыми в пространстве

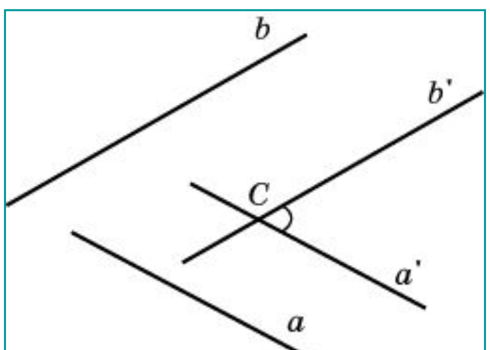
$$l_1: \frac{x-x_0^1}{m_1}=\frac{y-y_0^1}{n_1}=\frac{z-z_0^1}{p_1}, \qquad l_2: \frac{x-x_0^2}{m_2}=\frac{y-y_0^2}{n_2}=\frac{z-z_0^2}{p_2},$$

$$\boxed{l_1 \,||\, l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s}_1 \,||\, \vec{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}}$$

$$\boxed{l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}$$







$$\boxed{а)\quad \cos\psi = \cos\varphi,}$$

$$\boxed{б)\quad \cos\psi = -\cos\varphi,}$$

$$\boxed{\cos\varphi = |\cos\psi| = \frac{\left|\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right)\right|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}.}$$

Пример 9

Определите острый угол между прямыми $l_1: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$ и $l_2: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

Решение. $\vec{s}_1 = \{1; -1; \sqrt{2}\}$; $\vec{s}_2 = \{1; 1; \sqrt{2}\}$; $\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$;

$\left|\vec{s}_1\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$; $\left|\vec{s}_2\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$; $\cos\varphi = \dfrac{2}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

Пример 10

Докажите перпендикулярность прямых

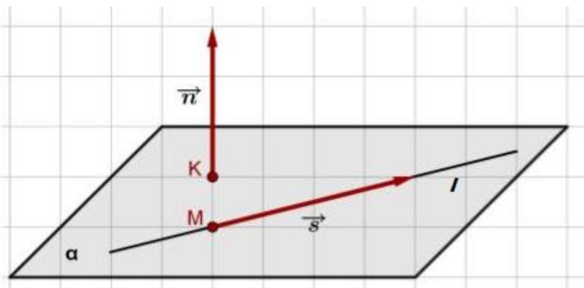
$l_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ и $l_2: \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

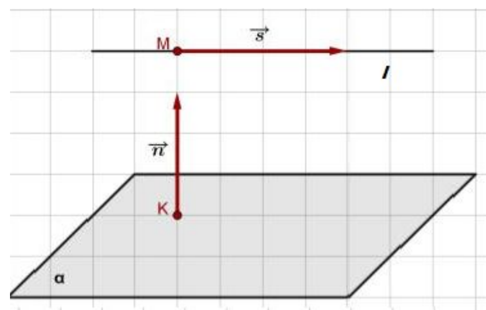
Пусть в пространстве задана некоторая прямоугольная система координат $Oxyz$, прямая l и плоскость α.

$$l: \quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \quad m^2+n^2+p^2\neq 0; \quad M_0(x_0,y_0,z_0)\in l, \vec{s}=\{m,n,p\}\,||\,l;$$

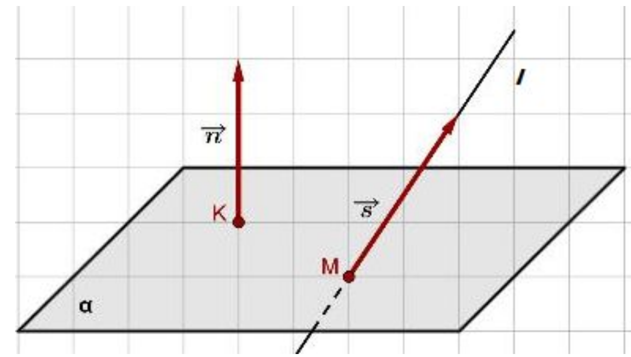
$$\alpha: \ Ax+By+Cz+D=0, \quad A^2+B^2+C^2\neq 0; \quad \vec{n}=\{A;B;C\}\perp\alpha$$



$l\in\alpha$



$l\,||\,\alpha$ и $l\notin\alpha$



Прямая пересекает плоскость

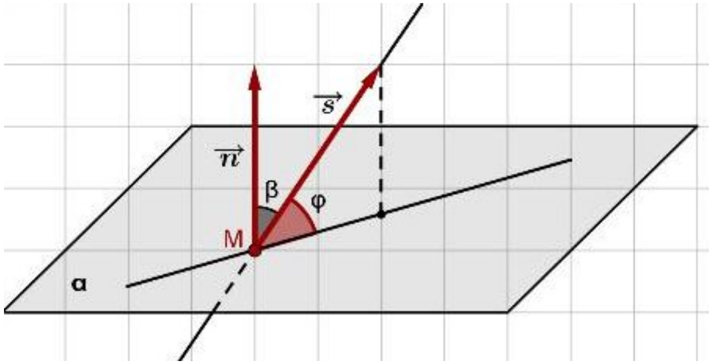
$$\begin{cases} M_0(x_0;y_0;z_0)\in\alpha, \\ \vec{s}\perp\vec{n}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \\ mA+nB+pC=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0(x_0;y_0;z_0)\notin\alpha, \\ \vec{s}\perp\vec{n}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0, \\ mA+nB+pC=0. \end{cases}$$

$$mA+nB+pC\neq 0$$

$$l\perp\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s}\,||\,\vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

Определение угла между прямой и плоскостью



$$\sin\varphi = \frac{\left|\left(\vec{s}, \vec{n}\right)\right|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|} \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Пример 1

Определите угол между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{1}$ и плоскостью $4x + 2y - 2z + 5 = 0$.

Решение. $\vec{s} = \{1;2;1\}$; $\vec{n} = \{4;2;-2\}$; $\left(\vec{s}, \vec{n}\right) = 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 1\cdot(-2) = 6$;

$|\vec{s}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$; $|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$; $\sin\varphi = \frac{|6|}{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{6}$

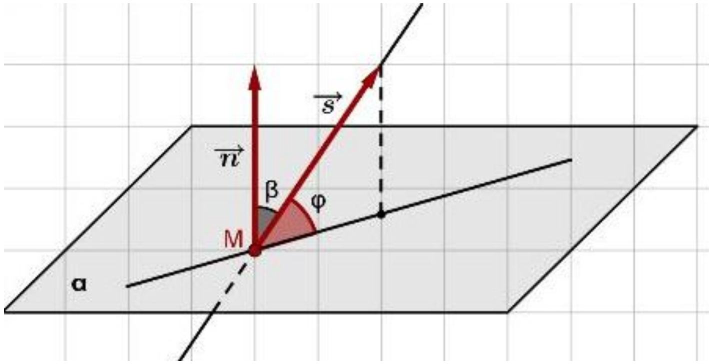
$$l \perp \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s} \parallel \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

Пример 2

Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;3;4)$ перпендикулярно плоскости $3x - 2y + 5z - 6 = 0$.

Решение. $\vec{s} = \vec{n} = \{3;-2;5\}$; $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{5}$

Определение координат точки пересечения прямой и плоскости



$$l: \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \qquad t \in R$$

$$\alpha: \; Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0;$$

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0,$$

$$Ax_0 + Amt + By_0 + Bnt + Cz_0 + Cpt + D = 0 \; ,$$

$$(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + t \cdot (mA + nB + pC) = 0,$$

$$\boxed{t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{mA + nB + pC} = t_M,}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_M = x_0 + mt_M, \\ y_M = y_0 + nt_M, \\ z_M = z_0 + pt_M. \end{cases}}$$