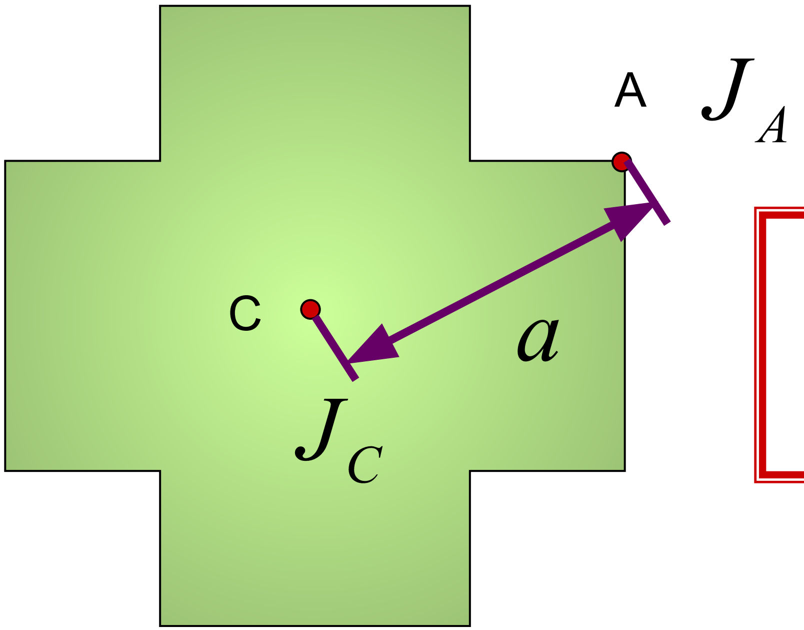
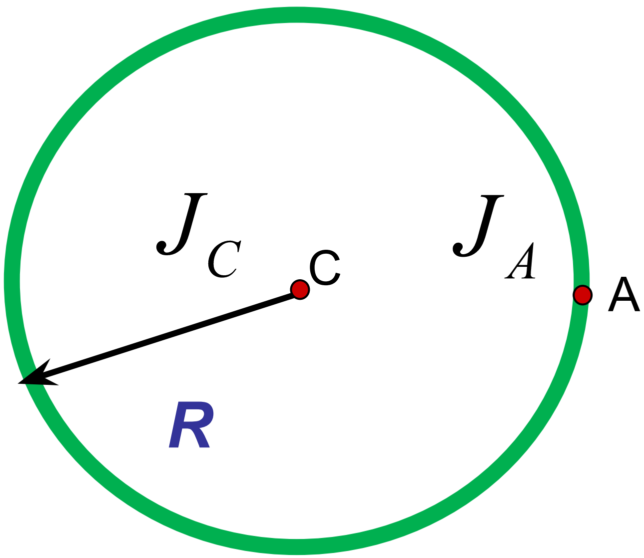
ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

- Позволяет найти момент инерции относительно оси, которая параллельна оси, проходящей через центр масс



$$J_A = J_C + Ma^2$$

Момент инерции тонкого кольца относительно оси, проходящей через точку на ободе, перпендикулярно ему

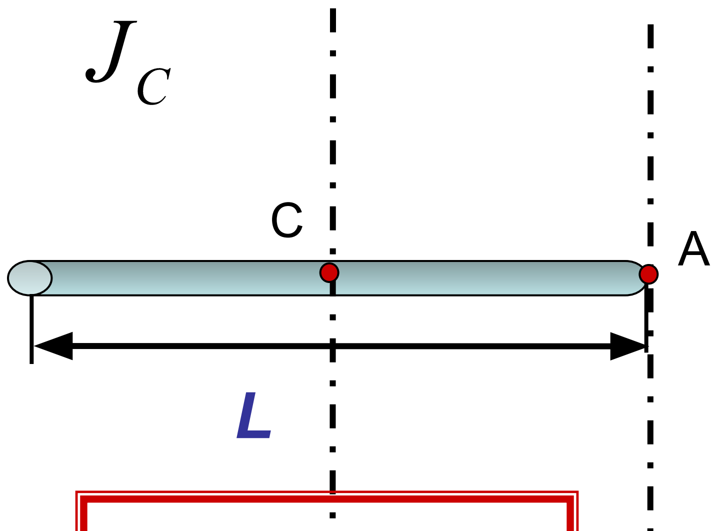


$$J_A = J_C + Ma^2$$

$$J_C = MR^2 \qquad a = R$$

$$J_A = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через край стержня, перпендикулярно ему



$$J_A = J_C + Ma^2$$

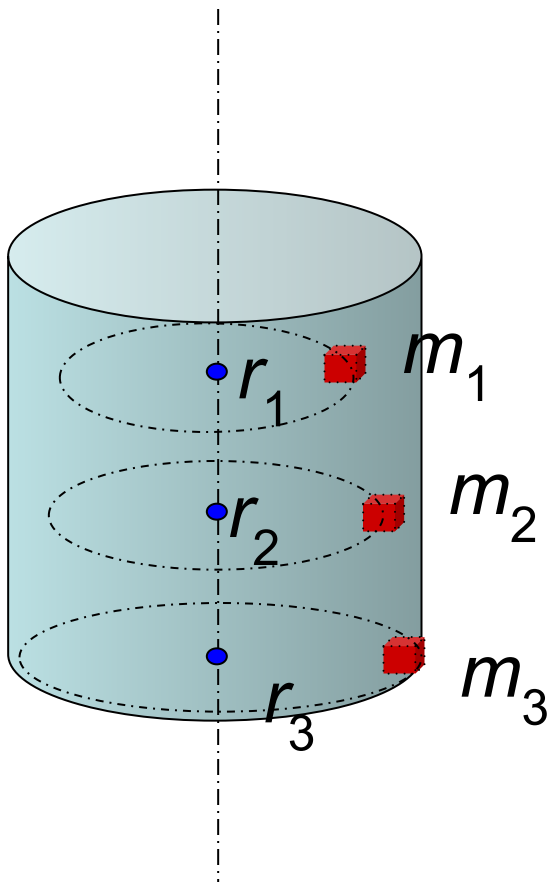
$$J_C = \frac{ML^2}{12} \qquad a = \frac{L}{2}$$

$$J_A = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}$$

$$\boxed{J_A = \frac{ML^2}{3}}$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ

- Разобьем вращающееся тело на маленькие объемы m_i, находящиеся на расстоянии r_i от оси вращения



- Центры окружностей лежат на оси вращения (по определению)
- Угловая скорость вращения этих объемов одинакова, а линейная - различна

$$\omega = \frac{V_1}{r_1} = \frac{V_2}{r_2} = \boxtimes$$

- Кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{вр} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \ldots = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2}$$

$$V_i = \omega r_i$$

$$T_{вр} = \sum_i \frac{m_i r_i^2}{2}\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2 = \boxed{\frac{J\omega^2}{2} = T_{вр}}$$

J – момент инерции тела

- В случае плоского движения твердого тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения

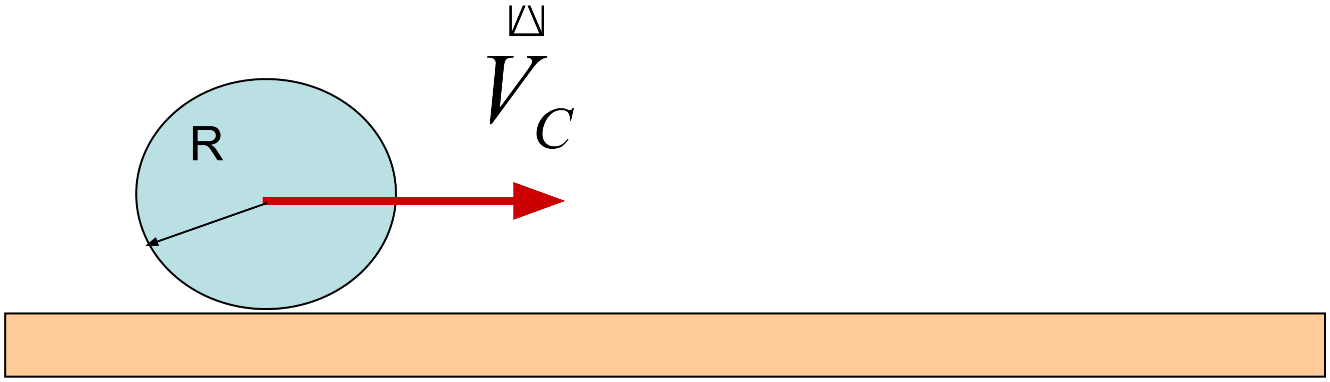
$$\boxed{T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}}$$

V_C- скорость поступательного движения центра масс

J_C- Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс

ПРИМЕР

- Найдем кинетическую энергию катящегося сплошного цилиндра (m)



$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}$$

$$\omega = \frac{V_C}{R} \qquad J_C = \frac{mR^2}{2}$$

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m\cancel{R^2}}{2} \cdot \frac{V_C{}^2}{\cancel{R^2}}$$

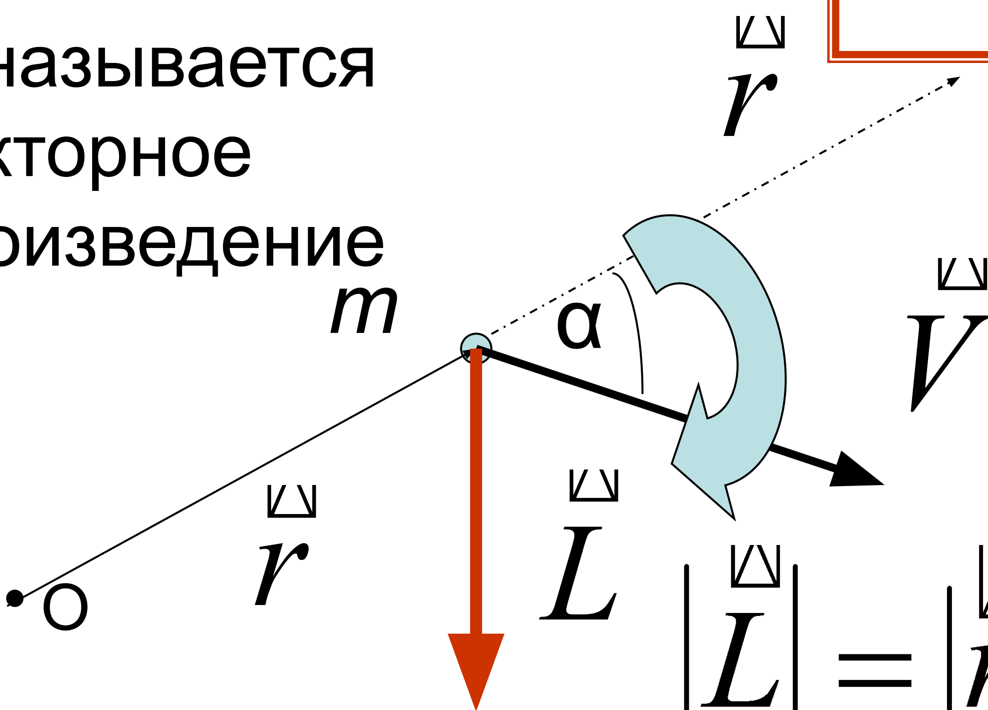
$$= \frac{mV_C^2}{2} + \frac{mV_C^2}{4} = \frac{3mV_C^2}{4}$$

Момент импульса

- Моментом импульса материальной точки относительно точки О называется векторное произведение

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}]}$$

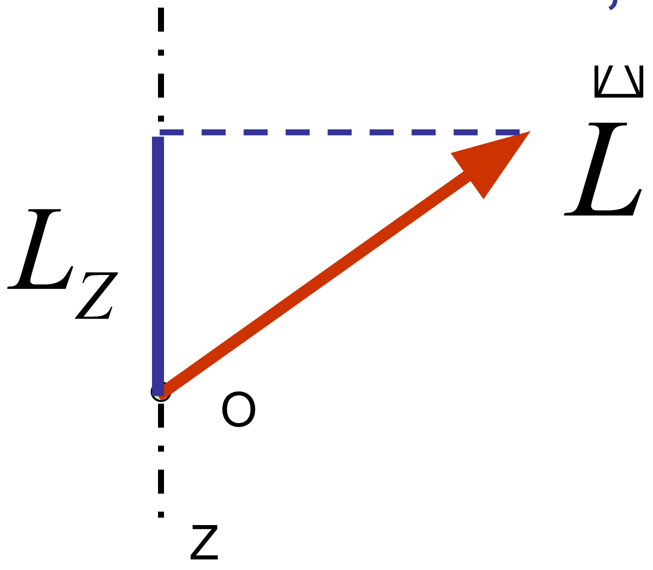
$$\vec{P} = m\vec{V}$$



$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{P}| \cdot \sin\alpha$$

Момент импульса относительно неподвижной оси Z

- \- скалярная величина, равная проекции на ось момента импульса, определенного относительно произвольной точки О , лежащей на оси

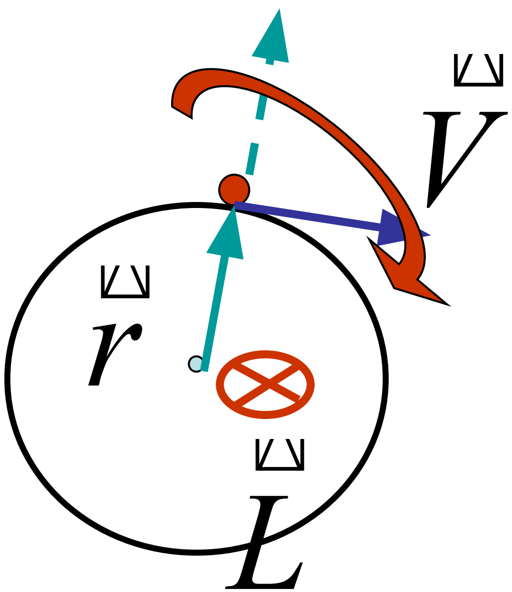


Момент импульса системы материальных точек

- Моментом импульса системы материальных точек называется векторная сумма моментов импульса всех материальных точек системы

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{P}_i]$$

- Рассмотрим движение материальной точки по окружности



$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{P}\right| \cdot \sin\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \left|\vec{P}\right| = m\left|\vec{V}\right|$$

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot m\left|\vec{V}\right|$$

Проекция момента импульса на ось Z $\boxed{L_Z = mVr}$

Момент импульса твердого тела относительно оси вращения

$$L_{Zi} = m_i V_i r_i$$

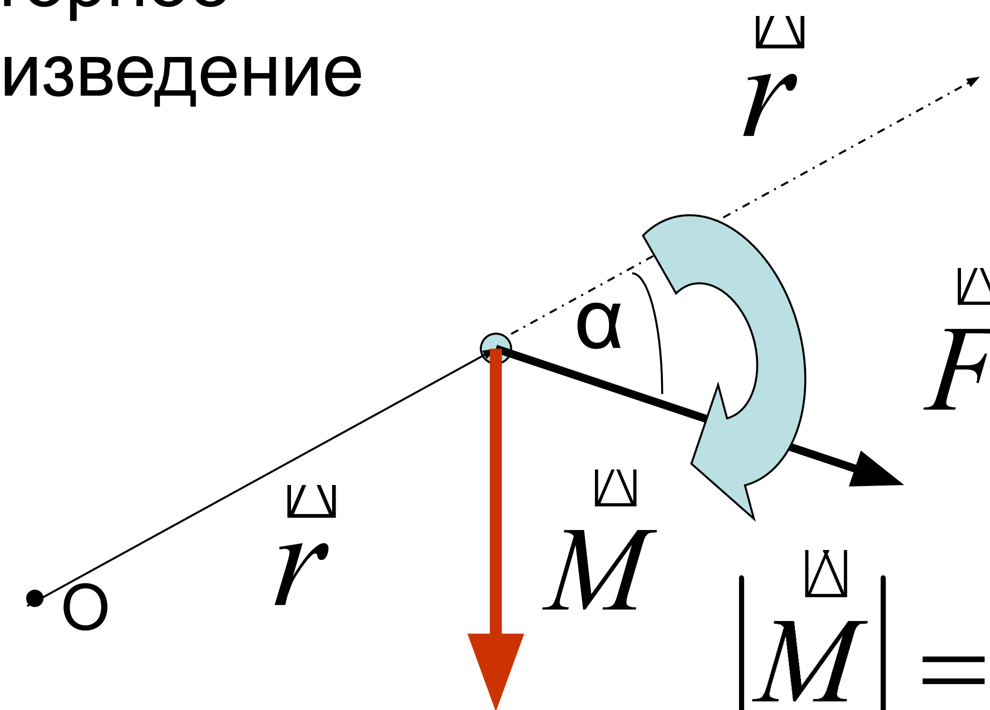
$$L_Z = \sum_i m_i V_i r_i \qquad V_i = \omega \cdot r_i$$

$$L_Z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \boxed{J_Z \omega = L_Z}$$

Момент силы

- Моментом силы относительно неподвижной точки, называется векторное произведение

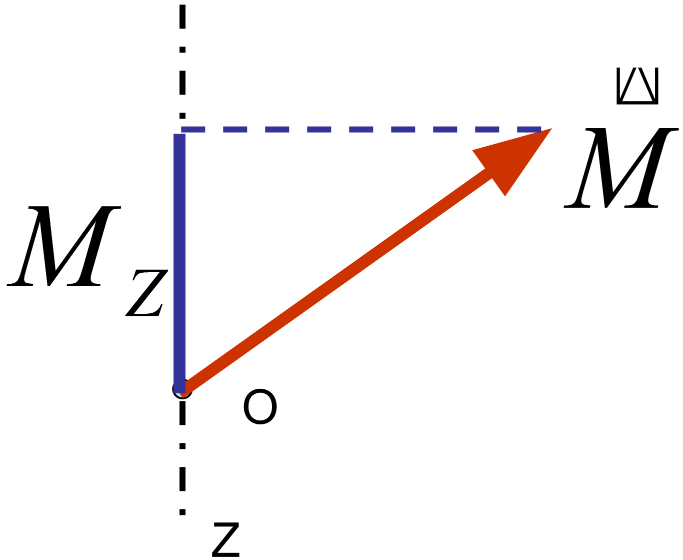
$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$



$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$$

Момент силы относительно неподвижной оси Z

- - скалярная величина, равная проекции на ось момента силы, определенного относительно произвольной точки О , лежащей на оси



Закон сохранения момента импульса

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}]$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = [\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P}] + [\vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{V} \times \vec{P}] + [\vec{r} \times \vec{F}]$$

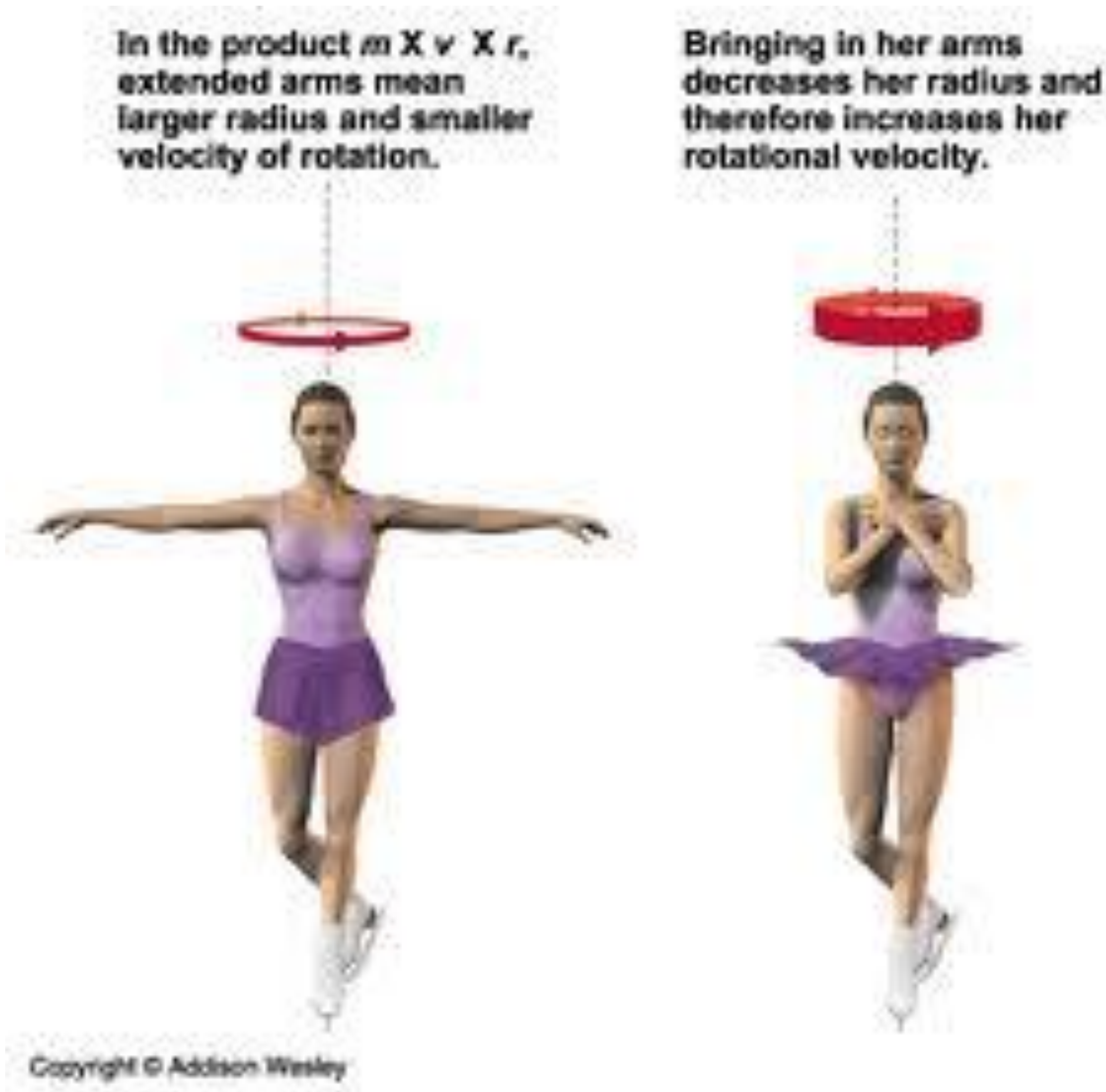
$$[\vec{V} \times \vec{P}] = 0 \qquad [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$$

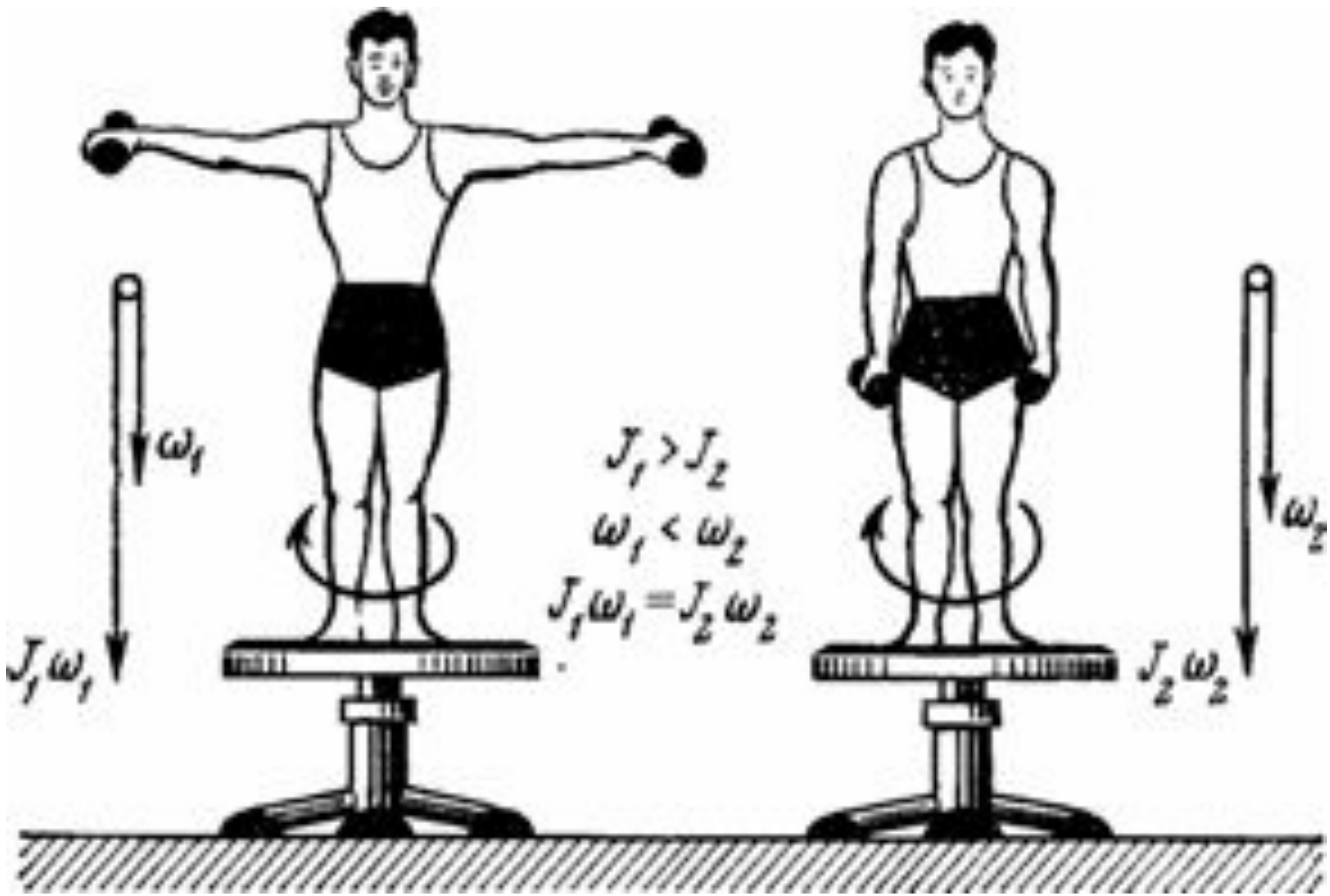
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

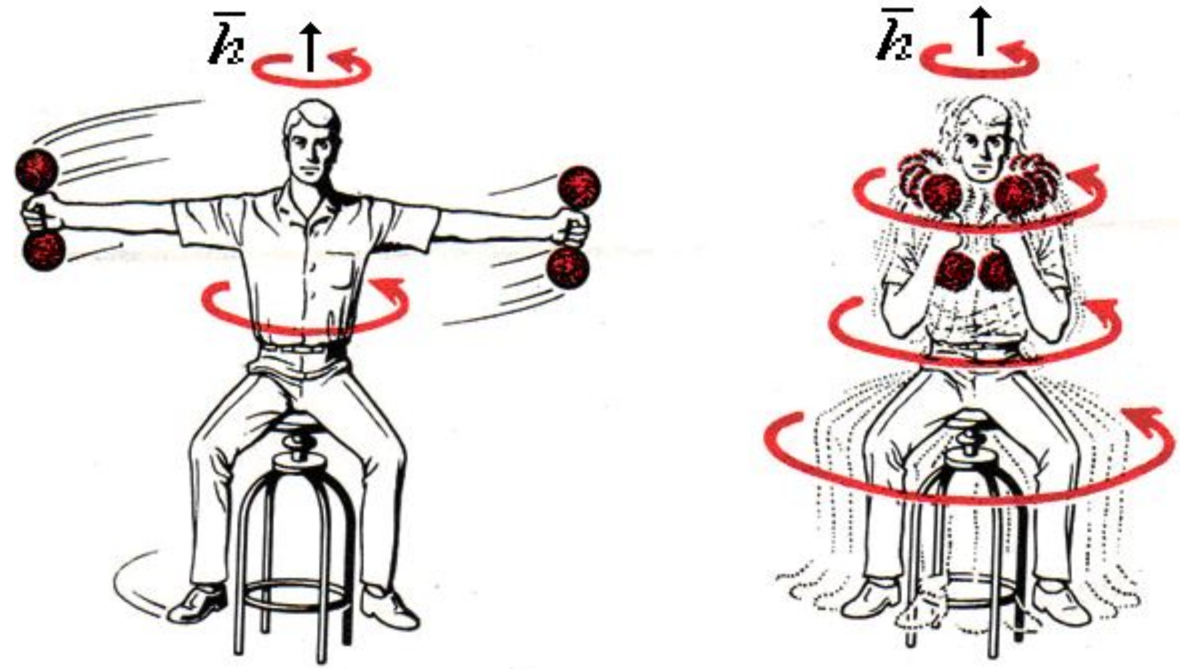
- В замкнутой системе $\vec{M} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L} = const$$

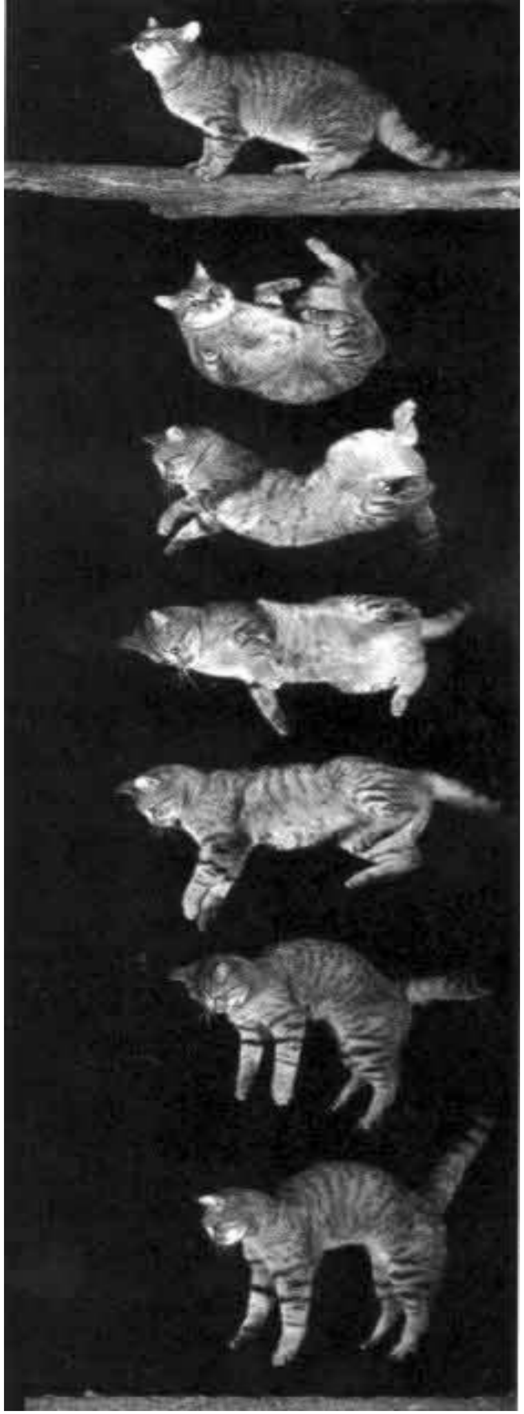
- В замкнутой системе момент импульса сохраняется


In the product m X v X r, extended arms mean larger radius and smaller velocity of rotation.
Bringing in her arms decreases her radius and therefore increases her rotational velocity.
Copyright © Addison Wesley


ω1
J1ω1
J1 > J2
ω1 < ω2
J1ω1 = J2ω2
ω2
J2ω2



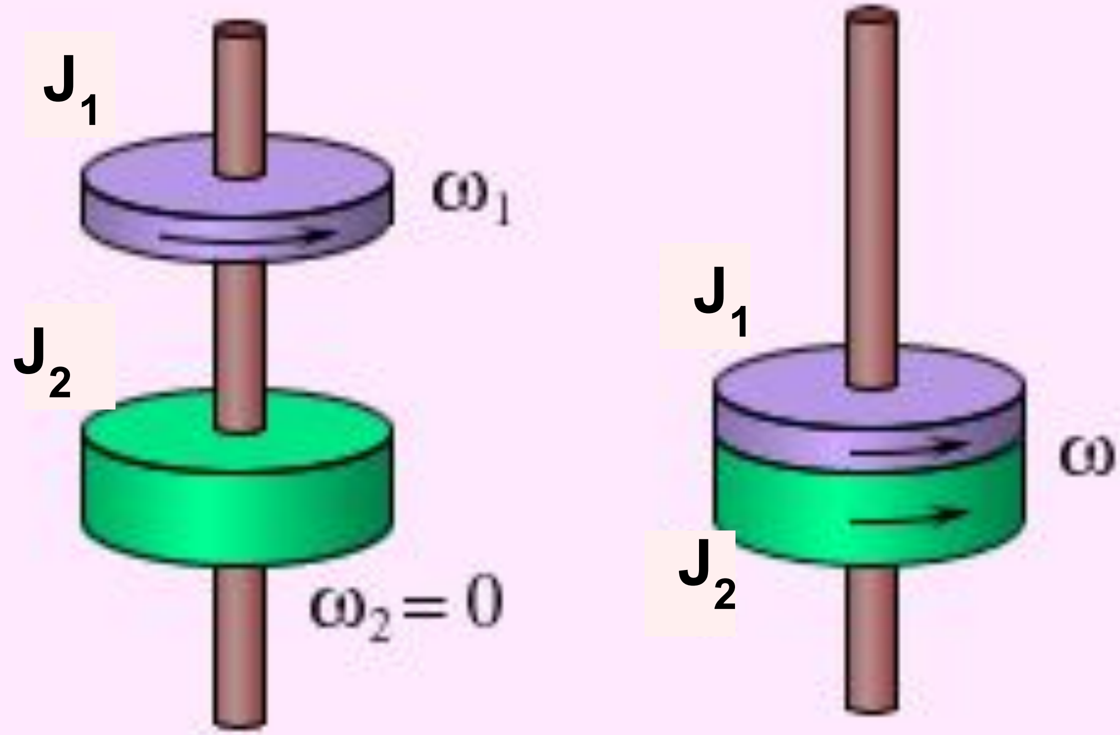
$\bar{h}$
$\bar{h}$




1
2
3
4

- https://www.youtube.com/watch?v=SkE4NWOnWhk кошки
- https://www.youtube.com/watch?v=UZlW1a63KZs – момент импульса

- http://www.youtube.com/watch?v=RtWbpyjJqrU (ПОЧЕМУ КОШКИ ПАДАЮТ НА 4 ЛАПЫ)



$$J_1\omega_1 = (J_1 + J_2)\omega$$

$$\omega = \frac{\omega_1 J_1}{J_1 + J_2}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения тела с закрепленной осью

$$L_Z = J_Z \omega$$

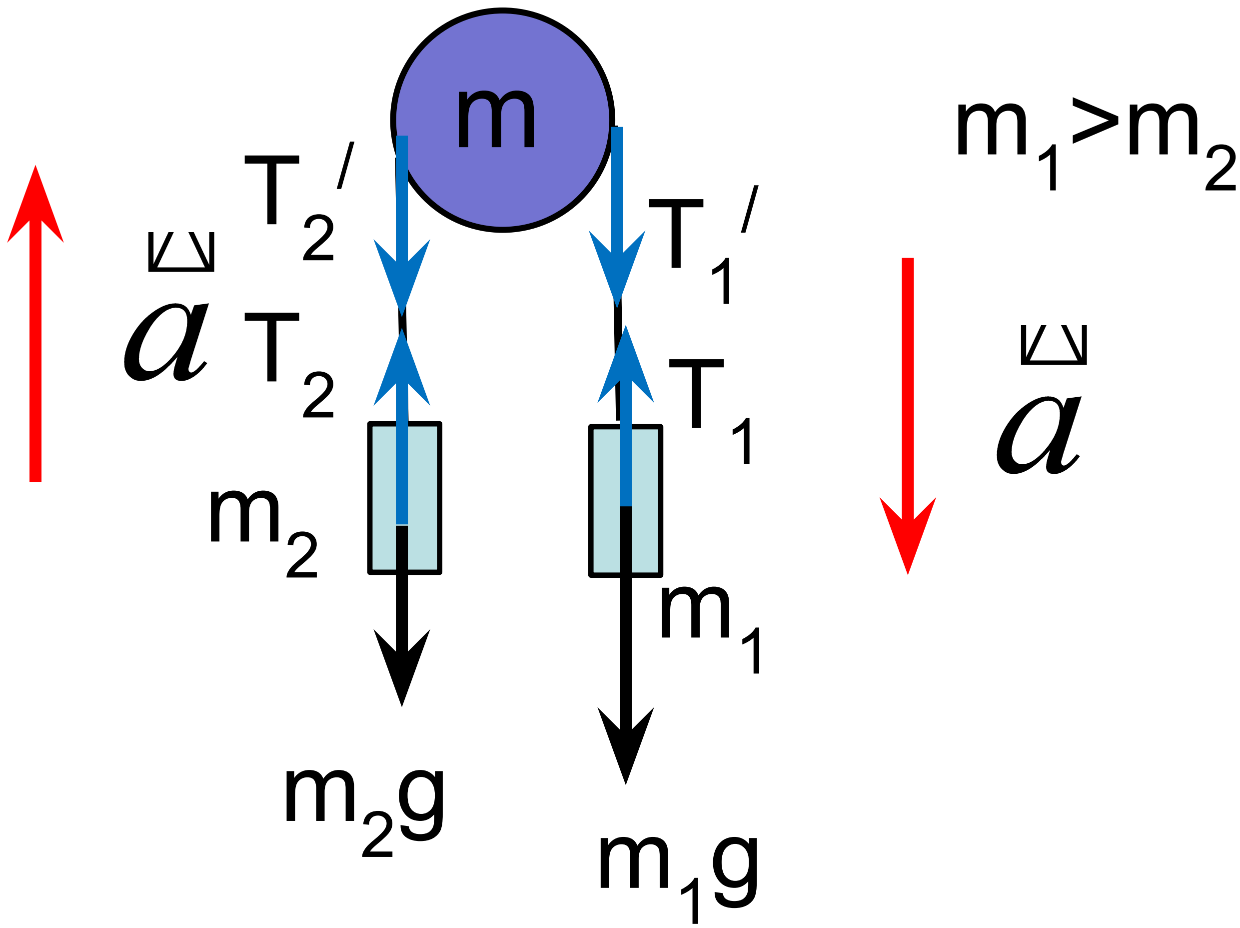
$$\frac{dL_Z}{dt} = J_Z \frac{d\omega}{dt} = J_Z \varepsilon \qquad \frac{dL_Z}{dt} = M_Z$$

$$\boxed{M_z = J_Z \varepsilon}$$

-Основное уравнение динамики вращательного движения

пример

- Через блок, имеющий форму диска, перекинута нерастяжимая нить, на которой подвешены два груза. Масса диска m, массы грузов $m_1 > m_2$. С каким ускорением будут двигаться грузы ?


m
$m_1 > m_2$
T_2'
T_1'
$\vec{a}$
T_2
T_1
$\vec{a}$
m_2
m_1
$m_2 g$
$m_1 g$

Для 1 грузика 2 закон Ньютона

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$$

В проекциях

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

Для 2 грузика 2 закон Ньютона

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2$$

В проекциях

$$-m_2 a = m_2 g - T_2$$

$$m_2 a = -m_2 g + T_2$$

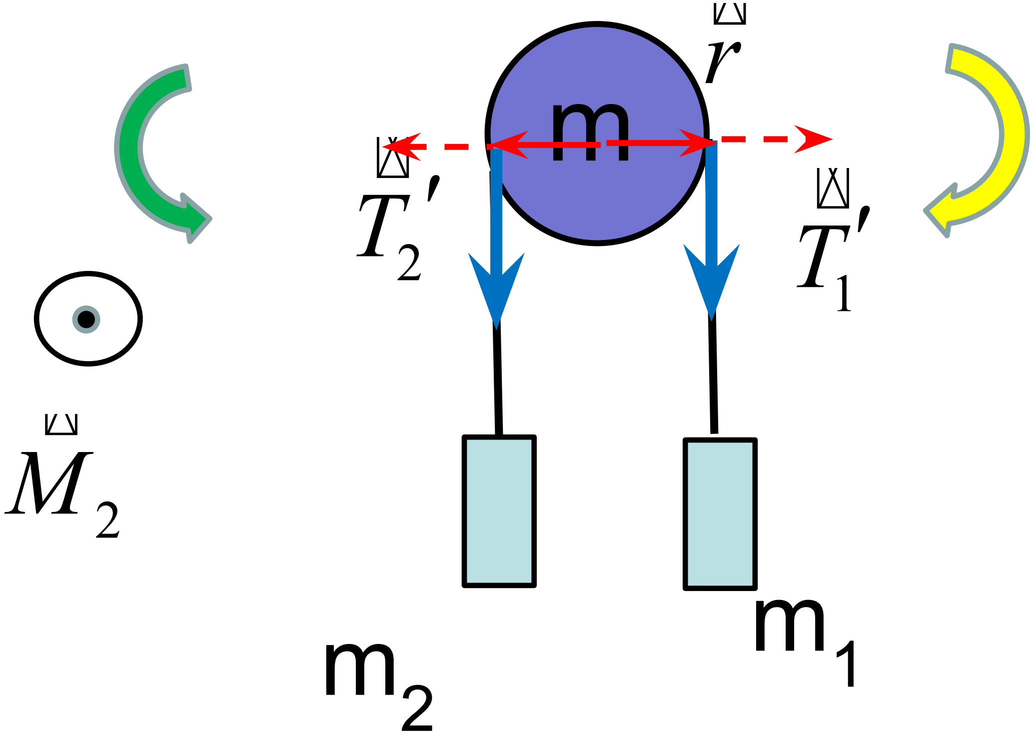
Для блока основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon$$

$$J = \frac{mR^2}{2}$$ Момент инерции блока

ε Угловое ускорение

M Результирующий момент сил, действующих на блок



$\otimes \quad \vec{M}_1$

$$\left|\vec{M}_1\right| = T_1' R$$

$$\left|\vec{M}_2\right| = T_2' R$$

- На блок действуют силы $T_1^/$ и $T_2^/$

$$M = T_1' \cdot R - T_2' \cdot R$$

- Нити не растягиваются, поэтому

$$T_1' = T_1 \qquad T_2' = T_2$$

$$M = \left(T_1 - T_2\right) \cdot R$$

- Линейное и угловое ускорение связаны между собой

$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$

- Основное уравнение динамики вращательного движения для блока

$$M = (T_1 - T_2)\cdot R = J\varepsilon = J\frac{a}{R} = \frac{mR^2}{2}\cdot\frac{a}{R}$$

$$(T_1 - T_2)\cdot \cancel{R} = \frac{m\cancel{R}a}{2}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{ma}{2}$$

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = -m_2 g + T_2$$

$$T_1 = m_1 \left(g - a \right)$$

$$T_2 = m_2 \left(a + g \right)$$

$$m_1\left(g-a\right)-m_2\left(a+g\right)=\frac{ma}{2}$$

$$m_1g-m_1a-m_2a-m_2g=\frac{ma}{2}$$

$$g\left(m_1-m_2\right)=\frac{ma}{2}+a\left(m_1+m_2\right)$$

$$a = \frac{g\left(m_1 - m_2\right)}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2}$$

Работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

$$dA = dT_{вр} \qquad T_{вр} = \frac{J_Z \omega^2}{2}$$

$$dT_{вр} = d\left(\frac{J_Z \omega^2}{2}\right) = \frac{J_Z d(\omega^2)}{2} = \frac{2J\omega d\omega}{2}$$

$$dA = J_Z \omega d\omega$$

$$M_z = J_Z \varepsilon$$

$$M_z = J_Z \frac{d\omega}{dt} \qquad M_z dt = J_Z d\omega$$

$$dA = \omega J_Z d\omega = \omega M_z dt$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad d\varphi = \omega dt$$

$$\boxed{dA = M_Z d\varphi} \qquad \boxed{A = \int M_Z d\varphi}$$