Численные методы анализа.

ч.*5-6.*

«Всё опыт, опыт! Опыт – это вздор.
Значенья духа опыт не покроет.
Всё, что узнали до сих пор,
искать не стоило. И знать не стоит.»

Монолог Бакалавра. «Фауст», Гёте

5. Численное дифференцирование и интегрирование функций

5.1. Постановка вопроса

Найти производные указанных порядков от функции $f(x)$, заданной таблично, либо имеющей сложное аналитическое выражение.

Данную функцию на интересующем отрезке $[a,b]$ заменяют интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще полиномом) и полагают

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{dx}.$$

Если известна погрешность для интерполирующей функции $R(x) = f(x) - P(x)$,

то погрешность производной выражается формулой

$$r(x) = \frac{df(x)}{dx} - \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dR(x)}{dx}$$

То же самое относится и к производным высших порядков.

5.2. Приближенное дифференцирование на основе первой интерполяционной формулы Ньютона

Пусть функция $y(x)$ задана в равноотстоящих точках x_i $(i=0,1,2,\ldots n)$ отрезка $[a,b]$ с помощью значений $y_i=f(x_i)$.

Заранее должно быть известно о существовании соответствующих производных. Для нахождения производных функцию $y(x)$ заменим интерполяционным полиномом Ньютона, построенном для системы узлов x_j $(j=0,1,2,\ldots k, \quad k \le n)$.

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots$$

где $$q = \frac{x - x_0}{h}, \qquad h = x_{i+1} - x_i \qquad (i = 0,1,2,\ldots)$$

<u>В качестве x_0 следует брать ближайшее табличное значение аргумента.</u>

Перемножая биномы получим

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots$$

Учтем $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dq}.$ В результате:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{4q^3 - 18q^2 + 22q - 6}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots\right].$$

Далее, поскольку $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{dq}\left(\frac{dy}{dx}\right),$

получим $$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right].$$

Аналогично можно получить формулы и для производных более высокого порядка.

5.3. Приближенное дифференцирование для равноотстоящих точек (узлов), выраженных через значения функций в этих точках на основе интерполяционной формулы Лагранжа

Для данной системы узлов построим интерполяционный полином Лагранжа.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{n+1}(x) y_i}{(x - x_i)\prod_{n+1}'(x_i)}$$

где
$$\prod_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

$$\prod_{n+1}'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n).$$

Тогда в силу единственности решения $L_n(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,2,\ldots,n)$

Полагая $$\frac{x-x_0}{h}=q,$$

получим $$\prod_{n+1}(x)=h^{n+1}q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)=h^{n+1}q^{[n]},$$

$$\prod'_{n+1}(x_i)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)=$$

$$=h^n i\cdot(i-1)(i-2)\ldots1\cdot(-1)\ldots[-(n-i)]=(-1)^{n-i}h^n i\;!(n-i)\;!\;.$$

Тогда, для полинома Лагранжа имеем $$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}y_i}{i\;!(n-i)\;!}\cdot\frac{q^{[n+1]}}{q-i}$$

Учитывая то, что $$\frac{dx}{dq}=h$$

Получаем $$\frac{dy}{dx}\approx\frac{d}{dx}L_n(x)=\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}y_i}{i\;!(n-i)\;!}\cdot\frac{d}{dx}\left\{\frac{q^{[n+1]}}{q-i}\right\}$$

Погрешность вычисления первой производной: $$r_n(x) = \frac{d}{dx} R_n(x) = \frac{d}{dx}\big(y(x) - L_n(x)\big) = \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx} L_n(x),$$

Для R_{n} получим $$R_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}\prod\nolimits_{n+1}(x),$$

где $\xi = \xi(x)$ – промежуточное значение между точками $x_0, x_1, \ldots x_{\text{n}}$,

$y^{(\text{n})}$ – n-ая производная по x.

Тогда, $$\frac{d}{dx} R_n(x) = \frac{1}{(n+1)\,!}\left\{y^{(n+1)}(\xi)\right\}\prod\nolimits_{n+1}^{'}(x) + \prod\nolimits_{n+1}(x)\frac{d}{dx}\left[y^{(n+1)}(\xi)\right] =$$

$$= (-1)^{n-i} h^n \frac{i\,!(n-i)\,!}{(n+1)\,!} y^{(n+1)}(\xi)$$

Если число узлов нечетно и производная берется в средней точке, то выражение для численного дифференцирования получается более просто и имеет повышенную точность.

5.4. Приближенное интегрирование функций. Общие замечания

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где $$\frac{dF}{dx} = f(x),$$

Приближенные и, в первую очередь, численные методы вычисления определенных интегралов применяются, когда:

1. Первообразная не может быть найдена аналитически или имеет очень сложный вид,
2. $f(x)$ задана таблично (само понятие первообразной теряет смысл).

Задача численного интегрирования заключается в нахождении определенного интеграла на основе ряда значений подынтегральной функции.

Численное вычисление однократного интеграла называется механической квадратурой, двойного – механической кубатурой. Соответствующие формулы называются квадратурными и кубатурными.

5.6. Метод прямоугольников

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$. С помощью точек $x_0, x_1 \ldots, x_n$ разобьем этот отрезок на n элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2,..., n)$ причем $x_0 = a$, $x_n = b$. На каждом из этих отрезков выберем точку $\xi_i = x_{i-1}$ или $\xi_i = x_i$ и найдем произведение $s_i = f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Сумма этих произведений является приближенным значением определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S_n,$$

Более точным является метод, называемый методом средних и использующий значение функции в средних точках элементарных отрезков (в полуцелых узлах)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})h_i, \qquad (i=1, 2,..., n)$$

Если шаг задания узлов h_i постоянный, формула приобретает вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}).$$

5.7. Метод трапеций

В этом методе используется линейная интерполяция функции $y=f(x)$ в промежутках между узлами.

$$\int_a^b f(x)dx \approx= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h_i, \qquad (i=1, 2,..., n)$$

При постоянном шаге интерполяции

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

5.8. Уточненные значения интегралов

Погрешность численного метода в общем случае равна

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - S_n$$

Главный член погрешности интеграла (I_1), полученного методом прямоугольников на отрезке [$x_{i\text{-}1}$, x_i]:

$$\frac{1}{24} h_i f^4\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

а интеграла (I_2), полученного методом трапеций, примерно в 2 раза больше и имеет противоположный знак:

$$-\frac{1}{24} h_i^3 \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2},$$

На основании этого можно записать уточненную формулу для вычисления определенного интеграла с использованием значений I_1 и I_2:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2I_1 + I_2}{3}$$

5.9. Метод парабол (метод Симпсона)

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на четное число n равных частей с шагом h. На каждом отрезке $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$,..., $[x_{i-1}, x_i]$ подынтегральную функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i. \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

В качестве $\varphi_i(x)$ можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$:

$$\varphi_i(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} y_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} y_{i+1}$$

Элементарная площадь может быть вычислена аналитически и с учетом того, что шаг интерполирования h постоянный, получим следующее выражение

$$s_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[(x - x_i)(x - x_{i+1}) y_{i-1} - 2(x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) y_i + (x - x_{i-1})(x - x_i) y_{i+1} \right] dx =$$

$$= \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$$

Просуммировав все отрезки, получим:

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right).$$

Значение S принимается в качестве определенного интеграла. Окончательное выражение для формулы Симпсона имеет вид :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} y_{(2j-1)} + 2\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} y_{(2j)} + y_n \right)$$

Точность метода Симпсона составляет 6 знаков. Главный член погрешности этого метода

$$R_n = -\frac{h^4}{180}\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$$

имеет тот же порядок, что и комбинированный метод прямоугольников и трапеций, т.е. на порядок лучше, чем для отдельно взятых методов прямоугольников и трапеций.

5.10. Формула Ньютона-Кортеса

Пусть для данной функции $y=f(x)$ необходимо вычислить определенный интеграл.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на n равных частей с шагом h. Будем считать, что функция задана в узлах $y_i=f(x_i)$, $i=0, 1, 2,\ldots, n$. Заменим подынтегральную функцию интерполяционным полиномом Лагранжа и получим приближенную квадратурную формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i,$$

где A_i – некоторые постоянные коэффициенты. Введем обозначения

$$q = \frac{x-x_0}{h}, \qquad q^{[n+1`]} = q\cdot(q-1)\ldots(q-n)$$

и представим полином Лагранжа в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i\ !(n-i)\ !}\cdot\frac{q^{[n+1]}}{q-i}\,y_i$$

$$A_i = (b-a)H_i,$$

где постоянные коэффициента H_i называются коэффициентами Кортеса :

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i\,!(n-i)\,!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\,dq.$$

Коэффициенты Кортеса обладают следующими свойствами:

$$\sum_{i=0}^{n} H_i = 1, \qquad H_i = H_{n-i}.$$

Окончательный вид квадратурной формулы Ньютона-Кортеса:

$$\int_a^b y\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i,$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $y_i = f_i(a+ih)$, $(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n)$

Формулы методов прямоугольника, трапеций и Симпсона являются частыми случаями формулы Ньютона-Кортеса.

Формулы методов прямоугольника, трапеций и Симпсона являются частыми случаями формулы Ньютона-Котеса.

Остаточный член формулы Ньютона-Котеса:

$$R_n = O\left[h^{2E\left(\frac{n}{2}\right)+3} \right],$$

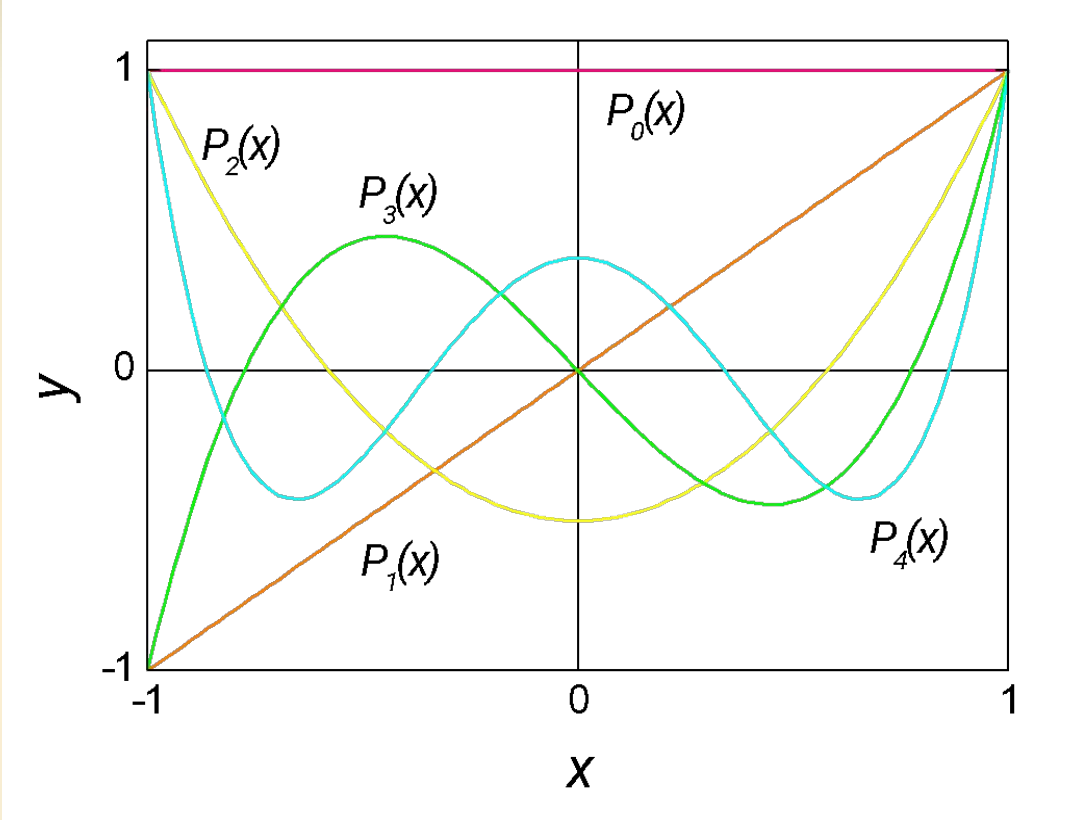
где $E(n/2)$ – целая часть дроби $n/2$. Таким образом, нечетное число ординат является более выигрышным.

5.11. Квадратурная формула Гаусса

Полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right],$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$



Важные свойства полиномов:

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (1)^n,$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot Q_k\,dx = 0,$$ где Q_k –любой полином степени $k<n$.

Полином Лежандра $P_n(x)$ имеет n действительных корней в интервале (-1, 1).

Рассмотрим функцию $f(t)$, заданную на отрезке [-1, 1].

Постановка задачи: подобрать точки $t_1, t_2, \dots t_n$ и коэффициенты $A_1, A_2, \dots A_n$, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \qquad (1)$$

была точной для всех полиномов $f(t)$ наивысшей возможной степени N . Так как у нас $2n$ неизвестных, а полином степени $2n\text{-}1$ определяется $2n$ коэффициентами, то высшая степень полинома $N = 2n\text{-}1$. Для обеспечения приведенного сверху равенства необходимо и достаточно, чтобы оно было верным при

$$f(t) = 1,\ t,\ t^2, \dots,\ t^{2n-1}.$$

Учитывая соотношение $$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{k+1} & \text{при } k \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ нечетном} \end{cases}$$

Для решения поставленной задачи достаточно определить $t_1, t_2, \ldots t_n$ и $A_1, A_2, \ldots A_n$, из нелинейной системы $2n$ уравнений :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} A_i = 2 \\ &\sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \\ &\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Далее применяется искусственный прием. Рассмотрим полиномы $f(t)$, сконструированные в том числе из полиномов Лежандра

$$f(t) = t^k P_n(t), \qquad (k = 0,\ 1, \ldots,\ n-1)$$

Так как степени этих полиномов не превышают $2n$-1, то на основании системы (2) для них должна быть справедлива формула (1).

Подстановка в эту формулу $f(t)$ дает :

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i), \quad \left(k = 0,\ 1,\ldots,\ n-1\right)$$

В силу ортогональности полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = 0, \quad \left(k < n\right)$$

или

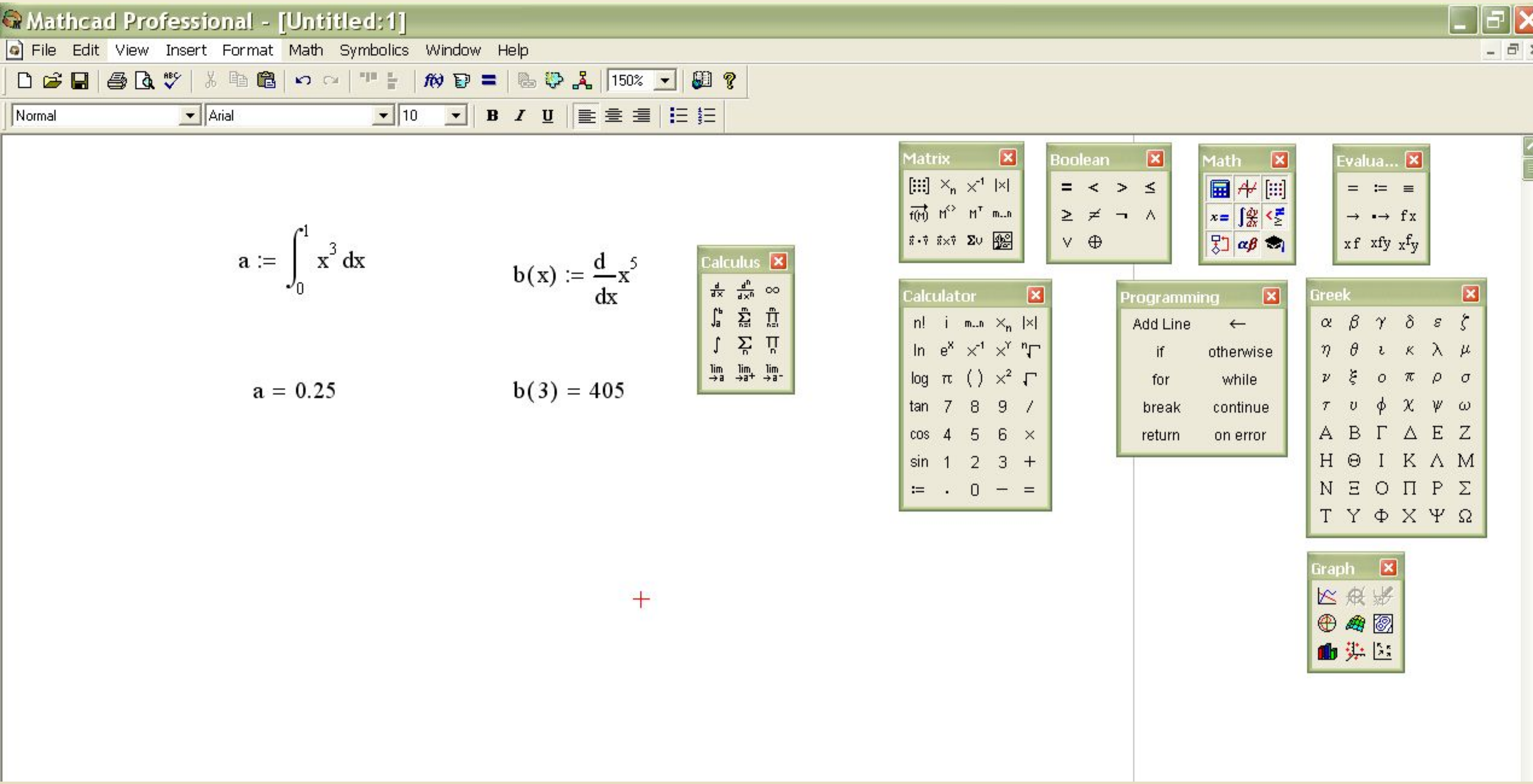
$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \quad \left(k = 0,\ 1,\ldots,\ n-1\right)$$

Это равенство будет заведомо справедливо , если положить

$$P_n(t_i) = 0 \quad \left(i = 1,\ldots,\ n\right).$$

То есть для достижения наивысшей точности квадратурной формулы в качестве t_i взять нули соответствующих полиномов Лежандра, далее, подставив их в систему (2), которая относительно A_i будет линейной, найти эти коэффициенты. Подстановка найденных значений t_i и A_i в выражение (1) даст *квадратурную формулу Гаусса*.

5.12. Дифференцирование и интегрирование в пакете MathCad



6. Численное решение дифференциальных уравнений

6.1. Основные понятия

Дифференциальные уравнения делятся на:

1. обыкновенные (содержащие одну переменную),
2. уравнения в частных производных.

Обыкновенные дифференциальные уравнения содержат одну или несколько производных искомой функции $y=y(x)$ и могут быть записаны в виде

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Наивысший порядок n входящей в уравнение производной называется *порядком дифференциального уравнения*.

Уравнение, имеющее вид $$\frac{d^ny}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

называется уравнением, *разрешенным относительно старшей производной*.

Линейными дифференциальными уравнениями называются уравнения, линейные относительно искомой функции и её производных.

Решением дифференциального уравнения всякая функция $y = \varphi(x)$, которая после её подстановки в уравнение, превращает его в тождество. Графическое представление решения – *интегральная кривая*.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения порядка n содержит n постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$.

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным константам придать определенные значения.

Геометрическая интерпретация линейного дифференциального уравнения первого порядка. Поскольку производная характеризует наклон касательной к интегральной кривой в данной точке, то при $dy/dx=k$ получаем уравнение линии постоянного наклона, называемой *изоклиной*. Меняя k, получаем семейство изоклин. Общее решение описывает бесконечное семейство интегральных кривых с параметром C, а частному решению соответствует одна кривая этого семейства.

Для выделения некоторого частного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка достаточно задать координаты некоторой точки (x_0, y_0) на данной интегральной кривой.

Для выделения частного решения из общего решения дифференциального уравнения порядка n следует задать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$ в общем решении.

В зависимости от способа задания дополнительных условий существуют два типа задач:

1. Задача Коши: дополнительные условия задаются в одной точке (начальной точке) и называются начальными условиями.
2. Краевая задача: дополнительные условия задаются более, чем в одной точке (как правило, на границах области существования решения), называются граничными или краевыми условиями.

6.2.1. Метод Эйлера

Решить дифференциальное уравнение

$$dy/dx=f(x,y)$$

численным методом , значит для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1,\ldots,$ x_n и числа y_0 , не определяя функцию $y=F(x)$, найти такие значения $y_1,\ldots, y_n$, что $y_i=F(x_i)$ $(i=1,2,\ldots n)$ и $y_0=F(x_0)$.

Разобьем отрезок [a,b] на n равных частей и получим последовательность значений аргумента $x_\mathrm{i} = x_0+i\cdot h,$ где h - шаг интегрирования. Будем считать, что x_0 и y_0 заданы.

Функцию $y=F(x)$ можно разложить в ряд Тейлора и, с точностью до членов $O(h^2)$, записать

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0),$$
$$y_2 = y_1 + h\cdot f(x_1, y_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = y_{n-1} + h\cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

6.2.1. Метод Рунге-Кутта

Этот метод является методом повышенной точности. Как и в методе Эйлера

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

но функцию $y=F(x)$ раскладывают в ряд Тейлора с точностью до членов h^4, включительно.

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4y}{dx^4}$$

Производные d^ky/dx^k определяются последовательным дифференцированием уравнения $dy/dx=f(x,y)$.

Вместо непосредственных вычислений производных в методе Рунге-Кутта определяются 4 числа:

$$k_1 = h\cdot f(x,y), \qquad k_3 = h\cdot f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_2 = h\cdot f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}\right), \qquad k_4 = h\cdot f\left(x+h, y+\frac{k_3}{2}\right).$$

В результате : $$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left[k_1(x_i,y_i) + 2k_2(x_i,y_i) + 2k_3(x_i,y_i) + k_4(x_i,y_i)\right]$$

6.2.2. Метод Рунге-Кутта в пакете MathCad

Rkadapt(v,x1,x2,npoints,D)

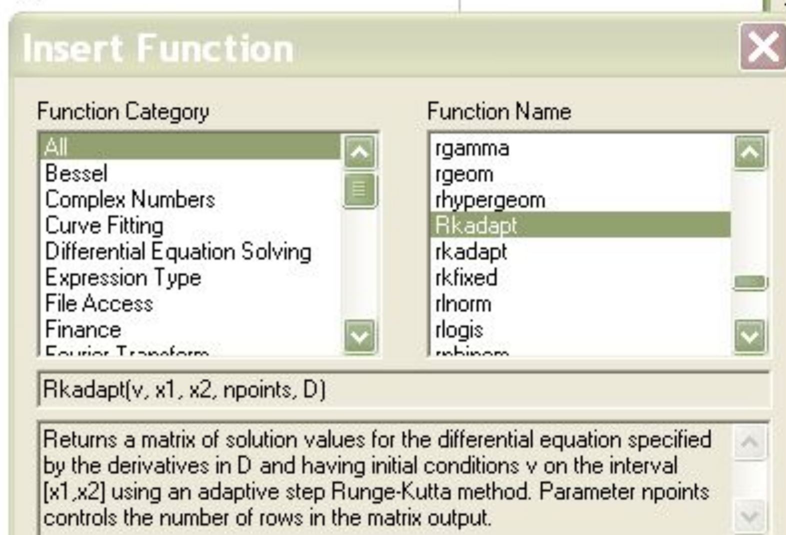
Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

rkadapt(y,x1,x2,acc,D,kmax,s)

Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions y on the interval [x1,x2] using a variable step Runge-Kutta method. kmax and s govern the step-size and acc controls accuracy.

rkfixed(y,x1,x2,npoints,D)

Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions y on the interval [x1,x2] using a fixed step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.



6.3. Приближенные методы решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим уравнение вида $$\frac{d^2Y}{dx^2}+p(x)\frac{dY}{dx}+q(x)Y=f(x).$$

Краевая задача состоит в отыскании решения $Y=Y(x)$ на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющего граничным условиям

$$Y(a)=A, \quad Y(b)=B$$

Для нахождения приближенного решения выбирается линейно независимая (базисная) система дважды дифференцируемых функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x),\ldots,$ $\varphi_n(x)$. При этом $\varphi_0(x)$ удовлетворяет данным граничным условиям, а $\varphi_1(x),$ $\varphi_2(x),\ldots, \varphi_n(x)$ – однородным. Искомое решение представляется в виде линейной комбинации:

$$y(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)$$

Невязка : $$\psi(x,a_1,\ldots,a_n)=\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+q\cdot y-f(x)$$

Коэффициента a_i стараются подобрать так, чтобы невязка была минимальной.

6.4.1. Метод коллокаций

В этом методе выбираются n точек x_i, принадлежащих отрезку $[a,b]$, называемых точками коллокации , невязки $\psi(x,a_1,a_2,\ldots,a_n)$ в которых приравниваются нулю. В результате получается система n алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i.

6.4.2. Метод наименьших квадратов

Основан на минимизации суммы квадратов невязок в заданной системе точек x_i, принадлежащих отрезку $[a,b]$. Из этого условия также получается система n алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i.

6.4.3. Метод Галеркина

Основан на требовании ортогональности базисных функций к невязке, которое выражается в виде

$$\int_a^b \psi\left(x,a_1,\ldots,a_n\right)\cdot\varphi_i\left(x\right)dx, \quad \left(i=1,2,\ldots,n\right)$$

6.4.4. Метод стрельбы

Рассмотрим краевую задачу для уравнения второго порядка, разрешенного относительно второй производной.

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = f\left(x, Y, \frac{dY}{dx}\right)$$

Решение будем искать на отрезке $[0,1]$. Граничные условия:

$$Y(0) = y_0, \quad Y(1) = y_1$$

Сущность метода стрельбы заключается в сведении краевой задачи к задаче Коши с начальными условиями:

$$Y(0) = y_0, \quad \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0} = k = \operatorname{tg}\alpha$$

Считая решение задачи Коши $Y=Y(x,\alpha)$, зависящим от параметра α, ищется такая интегральная кривая, которая выходит из точки $(0,y_0)$ и попадает в точку $(1,y_1)$. На основании чего можно записать уравнение относительно α :

$$Y(1,\alpha) - y_1 \equiv F(\alpha) = 0$$

и решить его любым методом (например, делением отрезка пополам).

The end