Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «АСОИУ»

Курс «Математическая логика и теория алгоритмов»

Тема «Теория предикатов. Операции над предикатами»

Автор Исенбаева Е.Н., старший преподаватель

Ижевск
2013

Основные понятия. Операции над предикатами

Логика предикатов - логическая система, средствами которой можно исследовать *структуру* высказываний.

Предикат – это свойство объектов или отношение между объектами.

Основные понятия. Операции над предикатами

Обозначение предикатов:

- *P(.)* – одноместный предикат (унарный).
- *P(. , .)* – двуместный предикат (бинарный).
- *P(. , … , .)* – *n*-местный предикат.

Задание предикатов:

1. M_n : область определения – множество состоящее из предметных переменных;
2. М=*{0,1}* - область значений предиката;
3. $M_n \Rrightarrow \{0,1\}$.

Способы задания предиката

1. Табличный способ

n	1	2	4	5
$P(n)$	1	0	0	0

2. Словесный способ

Предикат $P(n)$ выполняется в точке 1 (при n=1) и не выполняется во всех остальных точках области определения.

Способы задания предиката

3. Формульный способ задания предиката

$$P(n)=[n^n=n]$$

Логические операции над предикатами

Операции: $(\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$

Результат – новый предикат.

Пример

Дан предикат:

$$P(x) = [x \vdots 2]$$
$$Q(x) = [x \vdots 3]$$

Свяжем их конъюнкцией. Результат:

$$S(x) = P(x) \wedge Q(x)$$
$$S(x) = [x \vdots 6]$$

Кванторы

Квантор — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката и создающих высказывание.

$\forall$ - квантор общности;

$\exists$ - квантор существования.

Кванторы

Квантор общности

P(x)- предикат. Если $\forall x \in \{M_n\}$ P(x)=1, то $\forall x$ P(x)=1,

иначе P(x)=0.

Кванторы

Квантор существования

- *P(x)* –предикат. Под выражением ∃xP(x) будем понимать высказывание истинное, когда существует элемент множества *Mn* , для которого *P(x) =1,* иначе *P(x)=0*.

Выражение ∃xP(x) - высказывание.

Операции, уменьшающие местность предиката

1) Фиксация значений переменных

$$\overset{(3)}{P}(x,y,z)=\left[x^2+y^2\le z^2\right] x,y,z\in R$$

$$P(x,y,3)=\left[x^2+y^2\le 9\right]$$

Зафиксировав $z=3$,

получим двуместный предикат:

Операции, уменьшающие местность предиката

2) Использование кванторов

Пусть $P(x,y,z)$ - трехместный предикат.

Свяжем переменные кванторами:

$\forall x P(x,y,z)$ - бинарный предикат;

$\forall y \forall x P(x,y,z)$ - одноместный предикат;

$\exists z \forall y \forall x P(x,y,z)$ - высказывание.

Кванторы как обобщение логических операций

Пусть $P(x)$- одноместный предикат, определенный на конечном множестве $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, тогда

$\forall x P(x)=P(x_1)\&P(x_2)\&\ldots\&P(x_n)$,

$\exists x P(x)=P(x_1)\vee P(x_2)\vee\ldots\vee P(x_n)$

Алфавит логики предикатов

Содержит:

1) символы высказывательных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$;
2) символы предикатов $A_1, A_2, \dots, A_k$, где $k=0, 1, 2, \dots$;
3) логические символы $(\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$;
4) символы кванторов: $\exists$, $\forall$;
5) скобки, запятая.

Формула логики предикатов

Слово в алфавите логики предикатов называется ***формулой***:

1. A_j – символ предиката, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – символы предметных переменных $A_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$- *формула* ***атомарная***.

Формула логики предикатов

2. Пусть *A, B* – формулы (нет предметных переменных, которые связаны в одной формуле и свободны в другой). Тогда $(A \vee B), (A \wedge B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$ формулы, в которых свободные переменные формул *A, B* остаются свободными, а связанные переменные формул *A, B* остаются связанными.

Формула логики предикатов

3. Пусть *A* – формула. Тогда ¬A - тоже формула.

Свободные и связанные переменные формулы ¬A - это соответственно свободные и связанные переменные формулы *A*.

Формула логики предикатов

4. Пусть *A* – формула, содержащая свободную переменную *x* .
Тогда $\exists xA$, $\forall xA$ - тоже формулы.
Переменная *x* в них связана.
Остальные переменные: свободные переменные формулы А остаются свободными, связанные-связанными и в формулах
$\exists xA$, $\forall xA$.

Формула логики предикатов

5. Слово в алфавите логики предикатов является ***формулой***

это следует из правил 1-4.

Формула логики предикатов

По определению формулы никакая переменная ***не может быть одновременно свободной и связанной.***

Примеры

1) $A(x,y) \Rightarrow \forall y A(x,y)$ - не формула, т.к. в посылке импликации ***y*** свободная переменная, в заключении ***y*** – связанная переменная.

2) A(x,y,z)- формула атомарная, переменные свободные.

Примеры

3) $\forall x \exists y A(x, y, z) \Rightarrow \forall x B(x, z)$ - формула, где *x, y* –связанные, *z* – свободная переменная.

4) $\exists x \forall y A(x,y) \& B(x,y)$- не формула, так как в предикате *A* переменные *x* и *y* – связаны, а в *B* – свободны

Примеры

)Теорема Ферма: для любого целого n>2 не ∃ натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству . Пусть $x^n+y^n=z^n$

P(x,y,z,n)=

N(x) - преди $x^n+y^n=z^n$ атуральное число», то

$N(x)\wedge N(y)\wedge N(z)\wedge N(n)\wedge(n>2)\to\overline{P(x,y,z,n)}$

«выражение верно для любых чисел x, y, z, n».

6) Теорема Ферма в терминах предикатов и кванторов:

$$\forall x \forall y \forall z \forall n (N(x) \wedge N(y) \wedge N(z) \wedge N(n) \wedge (n > 2) \Rightarrow \overline{P(x, y, z, n)})$$, где $P(x, y, z, n) = [x^n + y^n = z^n]$.

N(*x*) - предикат « *x* – натуральное число».

Примеры

7) $A(x,y)=[x \geq y]$ двуместный предикат на различных множествах М и с различными квантификациями переменных:

- $\forall x A(x,y)$ - одноместный предикат от y. Если $M \geq 0$, то этот предикат истинен в единственной точке $y=0$.

Примеры

- $\forall x \forall y A(x,y)$ - высказывание, истинное на множестве, состоящем из одного элемента, ложное на любом другом множестве.
- в) $\exists x \exists y A(x,y)$ - истинно на любом непустом множестве.

Примеры

- г) $\exists x \forall y A(x,y)$ - в М имеется единственный максимальный элемент. Оно истинно на любом конечном множестве целых чисел, но ложно на множестве

$$\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\ldots;\frac{n}{n+1};\ldots\right\}$$

или на множестве двоичных векторов, из которого удален вектор, состоящий из одних единиц.

Примеры

- $\forall y \exists x A(x,y)$ - для любого элемента y существует элемент x не меньший, чем y. Оно истинно на любом непустом множестве.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ