

# Математика

Матрицы.



# Виды матриц.

- ▣ **Матрицей** называется упорядоченная таблица чисел, состоящая из  **$m$  строк и  $n$  столбцов**.
- ▣ Число строк и столбцов ( $m$   $n$ ) называется **размером** матрицы.
- ▣  $a_{ij}$  называется **элементом** матрицы, где  $i$ -номер строки,  $j$ -номер столбца матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

# Матрицы. Виды матриц.

**Пример ¶**

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ размер матрицы } 2 \times 2, a_{11}=1, a_{21}=3. ¶$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 10 \\ 8 & 11 & 13 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ размер матрицы } 4 \times 3, a_{33}=13, a_{41}=4, a_{12}=0. ¶$$

# Матрицы. Виды матриц.

Матрица называется **квадратной**, если в ней число строк равно числу столбцов.

Если в матрице число строк не равно числу столбцов, то такая матрица называется **прямоугольной**.

**Пример**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 11 & -5 \end{pmatrix} \text{-квадратная матрица; } B = \begin{pmatrix} 1 & -34 \\ 13 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \text{-прямоугольная матрица.}$$

# Матрицы. Виды матриц.

- Матрица, элементы которой составляют строку, называется **матрица строка**.
- Матрица, элементы которой составляют столбец, называется **матрица столбец**.

Пример  $A=(1 \ 10 \ -2 \ 7)$  - матрица строка;  $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 99 \end{pmatrix}$  - матрица столбец.

# Матрицы. Виды матриц.

- Главная диагональ квадратной матрицы- это диагональ, которая начинается с элемента  $a_{11}$ .
- Квадратная матрица, у которой на главной диагонали единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется **единичной матрицей**.
- Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется **нулевой матрицей**.

**Пример**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица; } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{нулевая матрица.}$$

# Матрицы. Виды матриц.

- Матрица, в которой строки и столбцы заменены местами, называется **транспонированной матрицей  $A^T$** .

---

## Пример

Если  $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ , тогда  $\underline{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ .

# Действия над матрицами

- ▣ **1. Равенство матриц.**
- ▣ Две матрицы называются **равными**, если они одного размера и равны их соответствующие элементы.

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ , тогда  $A=B$ , если  $a_{ij}=b_{ij}$ .



# Действия над матрицами

- ▣ **2. Сложение матриц.**
- ▣ При сложении матриц (одного размера) складываются их соответствующие элементы.

$$\text{Пусть } \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, A+B=C, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } \underline{c_{ij}} = \underline{a_{ij}} + \underline{b_{ij}}. \quad [1.1]$$

**Пример**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A+B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

# Умножение матрицы на число.

- При умножении матрицы на число, каждый элемент матрицы умножается на это число.

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda = \text{const}$ , то  $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$  [1.2].

**Пример**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \lambda = 3, \lambda A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

# Умножение матриц.

## ▣ 1) Квадратные матрицы (одного размера)

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ,  $AB = C$   $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ , где  $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ ;

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ ;  $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$ ;  $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$  [1.3].

### Пример

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}.$$

# Умножение матриц.

- ▣ **2) Прямоугольные матрицы.**
- ▣ **Прямоугольные матрицы можно перемножать тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В результате получится новая матрица, в которой столько строк, сколько строк в первой и столько столбцов, сколько столбцов во второй.**

# Умножение матриц.

$$\circ AB = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & 5 \\ \boxed{6} & 0 & -2 \\ \boxed{7} & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \text{1-я строка матрицы } A \text{ прикладывается} \\ \text{к первому столбцу матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7} & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведением  $BA$  не существует, так как число столбцов матрицы  $B$  не совпадает с числом строк матрицы  $A$  ( $3 \neq 2$ ). ●

# Умножение матриц.

## Пример

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$ , 3 столбца=3 строкам,  $(2 \times 2)$ -новая матрица;

б)  $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 2 столбца=2 строкам,  $(3 \times 3)$ -новая матрица;

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1 \ 15 \ 6)$ , 3 столбца  $\neq$  1 строке- перемножить матрицы нельзя.