# Непрерывные случайные величины

Лекция 15

# Непрерывные случайные величины

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток

Примеры:

- артериальное давление пациента;
- масса тела пациента;
- скорость биохимической реакции в клетке.

# Основные характеристики непрерывных случайных величин

**f(x)**

функция плотности распределения вероятности

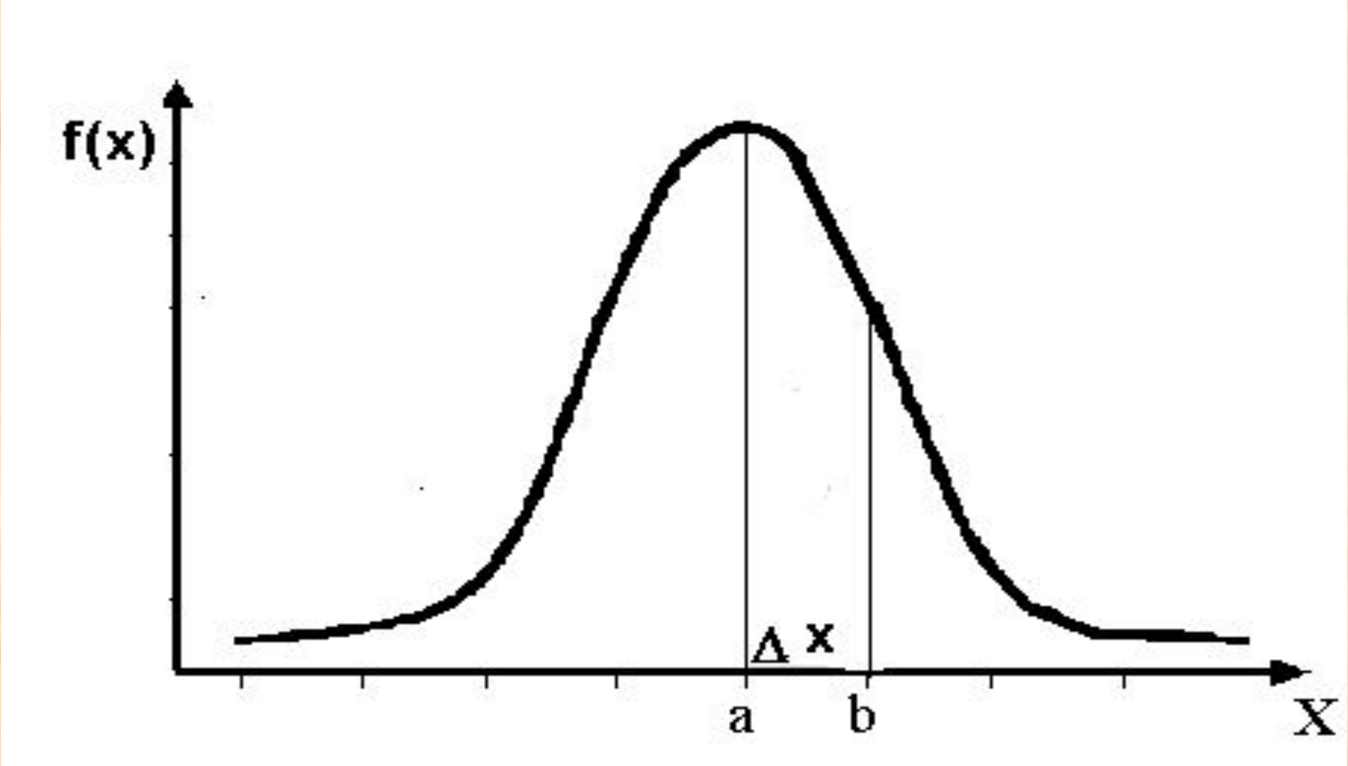
**F(x)**

функция распределения вероятности

- **Плотностью распределения вероятностей** называется отношение вероятности $P(a<x<b)$ попадания случайной величины x в тот или иной интервал $\Delta x$ ее значений к величине этого интервала:

$$\frac{P(a < x < b)}{\Delta x}$$

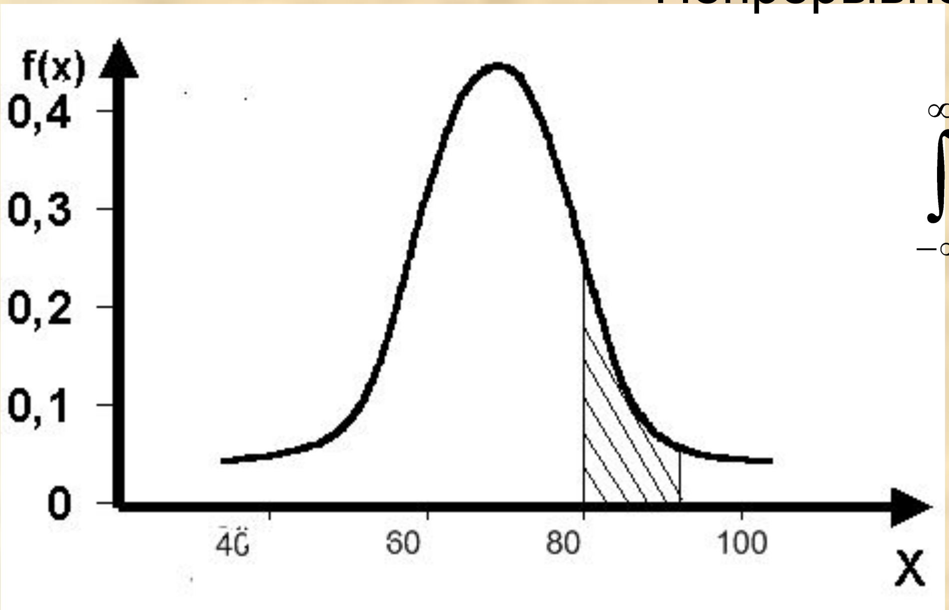
- Функция плотности распределения вероятностей **– это зависимость плотности распределения от значений величины x.**




Функция плотности распределения вероятностей

# Пример: Функция плотности распределения вероятностей
частоты пульса у студентов 1 курса КрасГМУ

Непрерывное распределение




$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

условие нормировки

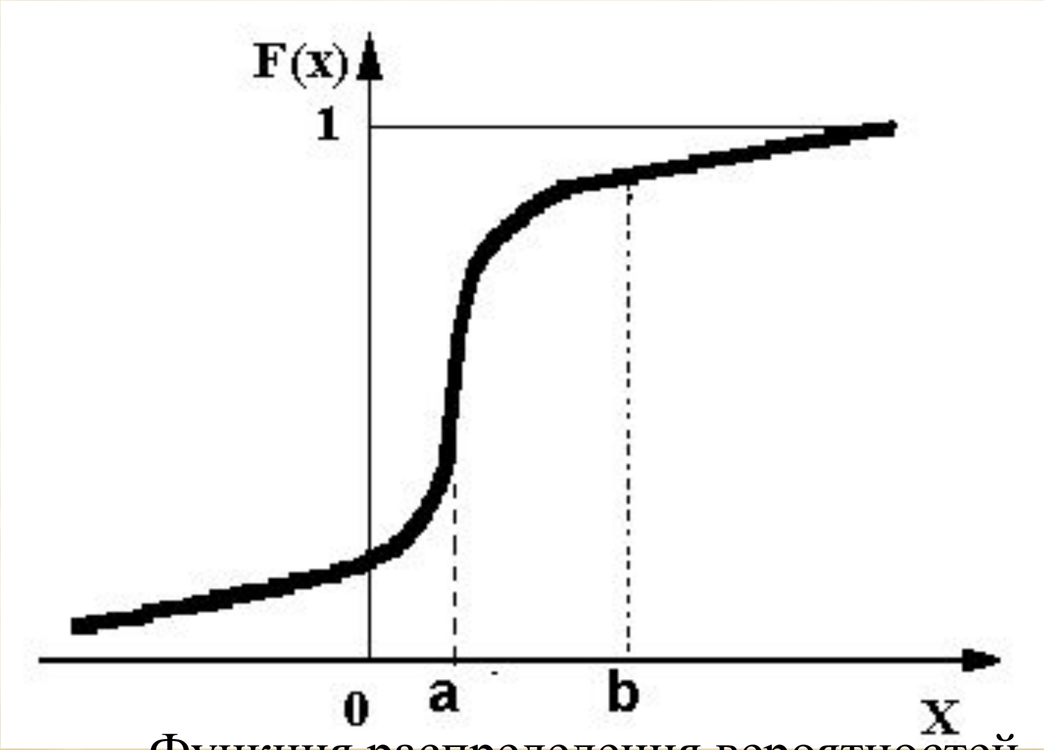
$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-69)^2}{200}}$$

Функция F(x) распределения вероятностей (или накопленной вероятности) **равна вероятности того, что случайная величина X меньше наперед заданного числа x.**

$F(x) = P(X<x)$

$P(X=x_i)=0$

$$0 \le F(x) \le 1$$




Функция распределения вероятностей

# Вероятность попадания случайной величины на заданный участок

Задача: вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение , заключенное в некоторых пределах, например, от a до b

$$a \le X < b$$

Выразим вероятность этого события через функцию распределения F(X):

Событие A: X < b;

Событие B: X < a

Событие C: a ≤ X < b

A = B + C

# Вероятность попадания случайной величины на заданный участок-2

По теореме сложения вероятностей получим:

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b)$$

$$F(b) = F(a) + P(a \le X < b)$$

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

Вероятность попадания случайной величины на заданный участок равна приращению функции распределения на этом участке

# Плотность распределения случайной величины

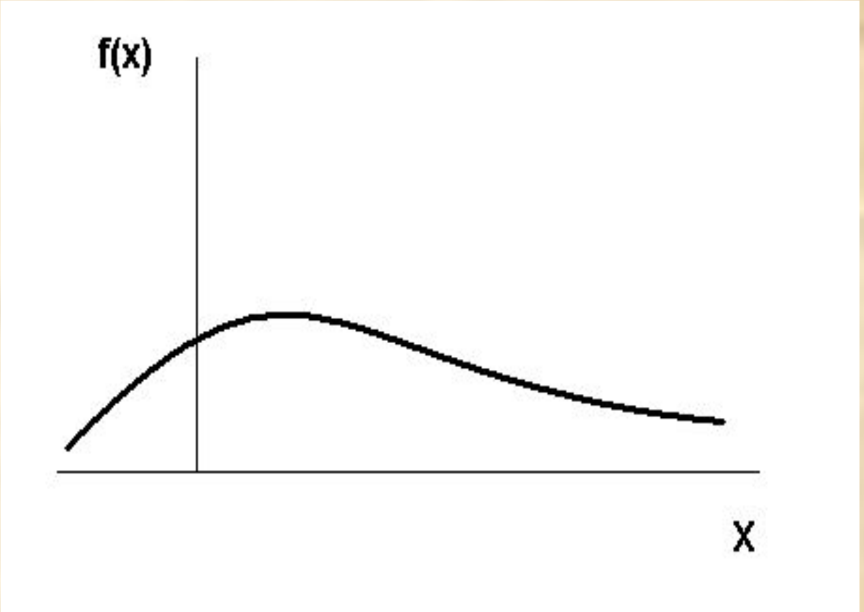
Вероятность попадания случайной величины на участок от x до x+Δx

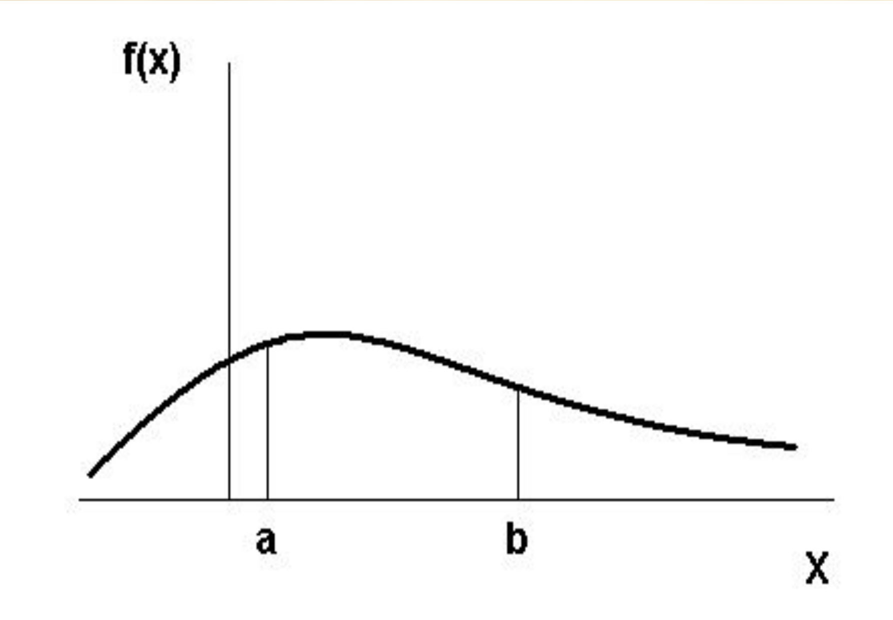
$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

f(x) – плотность функции распределения - производная функции распределения – характеризует плотность, с которой распределяется значение случайной величины в данной точке

# Графический вид функции распределения




$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$F(+\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

# Связь между f(x) и F(x)

F(x) – является первообразной для f(x):

$$F(x)=P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$f(x)=F'(x)$$

f(x)-дифференциальная функция распределения

F(x)-интегральная функция распределения

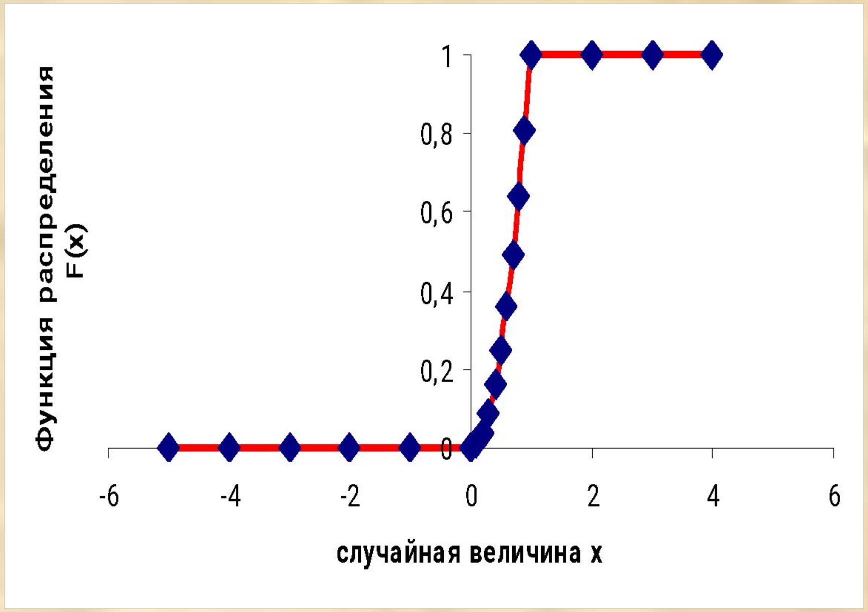
# Задача

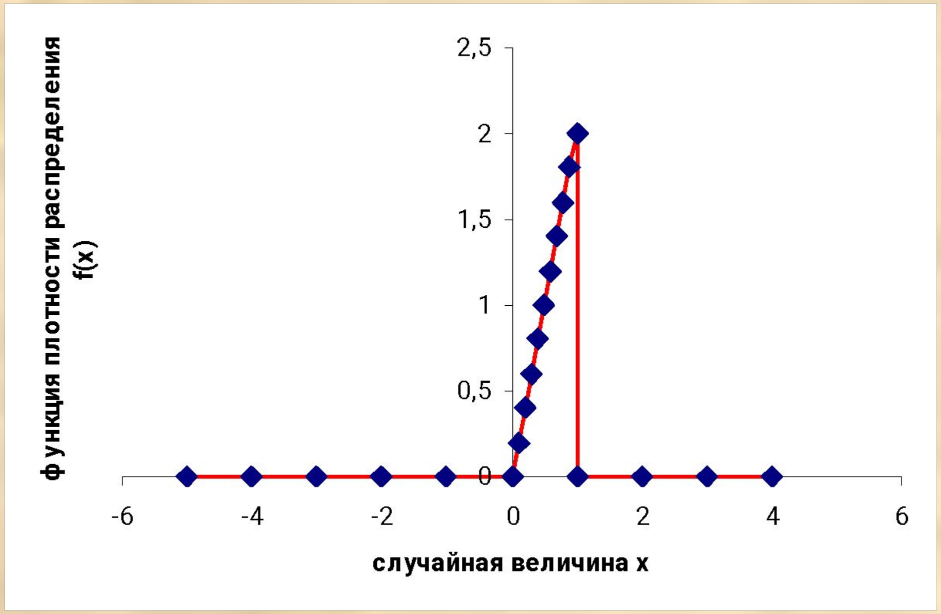
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$$f(x)=?$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x, & 0<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

# Графический вид функций




Функция распределения

Функция плотности распределения

# Примеры:

- Задана функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad \text{õ} < 0 \\ \dfrac{cx^2}{4} & \text{ïðè} \quad 0 \le \text{õ} \le 2 \\ 1 & \text{ïðè} \quad \text{õ} > 2 \end{cases}$$

Найти: а)значение с, б)функцию плотности распределения вероятностей f(X), в) вероятность попадания случайной величины X в интервал (0;1). Построить графики функций F(X) и f(X).

# Решение:

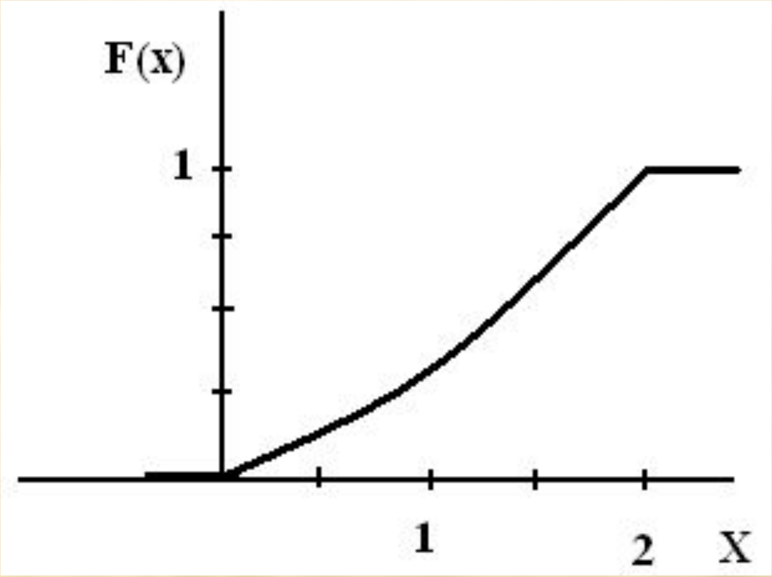
- Константу С находим из условия :

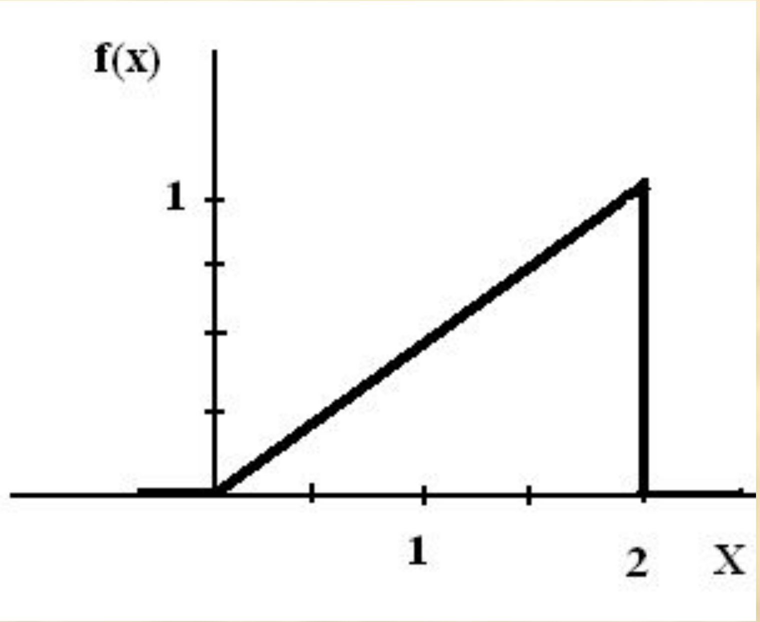
$$\frac{c \cdot x^2}{4} = 1 \text{ ïðè } x = 2 \qquad \frac{c \cdot 2^2}{4} = 1, \text{ ñëåäîâàòåë üíî } \tilde{n} = 1$$

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

# Вероятность попадания случайной величины X в интервал (0;1)

$$F(1) - F(0) = \frac{1 \cdot 1^2}{4} - \frac{1 \cdot 0^2}{4} = \frac{1}{4}$$



# Основные числовые характеристики непрерывных случайных величин

- Математическое ожидание

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \qquad \grave{I}\,(\tilde{o}) = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

- Дисперсия

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x)dx \qquad D(\tilde{o}) = \int_a^b (x - M(x))^2 \cdot f(x)dx$$

- Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

$$M(x)=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}$$

$$D(x)=\int_0^2 (x-\frac{4}{3})^2\cdot\frac{x}{2}dx=\int_0^2\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)\cdot\frac{x}{2}dx=$$

$$\int_0^2\left(\frac{x^3}{2}-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{9}x\right)dx=\frac{2^4}{8}-\frac{4\cdot 2^3}{9}+\frac{4\cdot 2^2}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=0{,}47$$

# Свойства математического ожидания

- Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной: $M(C)=C$
- Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=CM(X)$
- Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий: $M(X \pm Y)=M(X) \pm M(Y)$
- Математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY)=M(X) \cdot M(Y)$

# Свойства дисперсии случайной величины

- Дисперсия постоянной величины С равна нулю: $D(C)=0$
- Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$
- Дисперсия двух случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$
- Дисперсия разности двух случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

# Примеры:

- Найти математическое ожидание случайной величины $Z=X+2Y$, если известно, что $M(X)=4$, $M(Y)=2$.
- $M(Z)=8$
- Найти дисперсию случайной величины $D(2X)$, если $D(X)=10$.
- $D(2X)=2^{2} \cdot 10=40$
- Найти дисперсию случайной величины

  $D(X-Y)$, $D(2X+3)$, если $D(X)=5$, $D(Y)=3$.
- $D(X-Y)=5+3=8$, $D(2X+Y)= 2^{2} \cdot 5+ 0=20$