Линейная алгебра

Лекция 6

Подпространства. Базис и размерность

План лекции

- Определение линейного подпространства n-мерного координатного пространства
- Линейная оболочка набора векторов
- Линейное пространство решений однородной системы линейных уравнений
- Базис и размерность
- Ортонормированные базисы

Векторные подпространства. Определение

<u>Подпространством</u> линейного пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ над полем $\mathbf{R}$ называют такое подмножество $U \subset R^n$, которое обладает свойствами:

$$a)\ x, y \in U \Rightarrow x + y \in U;$$

$$б)\ x \in U \Rightarrow \lambda x \in U \quad \forall\ \lambda \in \mathrm{R}$$

.

Другими словами, подмножество $\mathbf{U}$ замкнуто относительно действий «сложения» и «умножения» на скаляр, определённых в $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

<u>Тривиальными подпространствами</u> линейного пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ называются само $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ и пространство, состоящее из одного нулевого вектора $\mathbf{O}$.

Пример

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix},\ \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in R : \alpha_1 = \alpha_n \right\}$$

Векторные подпространства. Способ задания

<u>Подпространством, порождённым векторами</u>

$$\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_{2,} \ldots \mathrm{e}_\mathrm{k} \in R^n,$$

называют подмножество $U \subset R^n$ всех линейных комбинаций этих векторов (линейная оболочка набора векторов), т.е.

$$U = \left\langle e_1, e_2, \ldots, e_k \right\rangle = \left\{ x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k,\ \alpha_i \in R \right\}$$

Пример

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset R^3$$

Векторные подпространства. Способ задания

Другой способ задания линейного подпространства в $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ может служить задание набора ограничений, которым удовлетворяют векторы подпространства. Например, в виде $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$.

<u>Теорема.</u> Множество решений однородной системы уравнений $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$ образует линейное подпространство пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

Пример

$$V = \left\{ X \in R^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Базис векторного пространства. Определение

Пусть $(e_1, e_2, ..., e_s)$ - произвольное множество векторов линейного пространства $\mathbf{R^n}$. Упорядоченная система векторов называется <u>базисом</u> в Q, если :

а) $e_k \in Q,\ k = 1,2,...,s;$

б) система $(e_1, e_2, ..., e_s)$ линейно независима;

в) для любого $x \in Q$ найдутся такие числа $x_1, x_2, ..., x_s$, что

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_s e_s$$

Размерность векторного пространства

Все базисы $M = \{e_1, e_2, ..., e_n \in V\}$ пространства V имеют одинаковое число векторов, которое называется размерностью векторного пространства V и обозначается

$$n = \dim(V)$$

Полагают, что размерность тривиального пространства (состоящего из одного только нулевого вектора), равна нулю: $\dim(O) = 0$.

Размерность подпространства, заданного СЛУ, равна **n – rg(A).**

Пример базиса координатного пространства

$$M = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ .. \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ .. \\ .. \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ .. \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теоремы о базисах

1. В любом ненулевом подпространстве координатного пространства существует базис.
2. Если размерность подпространства координатного пространства равна k, то любая линейно независимая система из k векторов образует базис этого подпространства.

Нахождение базиса подпространства

Для нахождения базиса в подпространстве, порожденном некоторой совокупностью векторов, достаточно выбрать из системы образующих векторов линейно независимую систему.

Например,

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset R^3$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, => \dim(U) = 2$$

Алгоритм построения базиса в $U \subseteq R$

Столбцы, порождающие подпространство, записать в матрицу.

Элементарными преобразованиями **над столбцами** привести эту матрицу к «ступенчатому» виду.

Ненулевые столбцы данной «ступенчатой» матрицы и будут составлять базис исходного подпространства, а ранг матрицы будет равен размерности этого подпространства.

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ .. \\ .. \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ .. \\ .. \\ \beta_n \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ .. \\ .. \\ \gamma_n \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & .. & .. & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & .. & .. & \gamma_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ \alpha_n & \beta_n & .. & .. & \gamma_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ c_r & d_r & .. & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ c_n & d_n & .. & f_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нахождение базиса подпространства. Пример

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset R^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{M_U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Нахождение базиса подпространства. Пример

$$V=\left\{X\in R^4\;\middle|\;\begin{matrix}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\ x_1+\;x_2-\;x_3-\;x_4=0\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&4&5\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\alpha+5\beta\\-5\alpha-4\beta\\\beta\\\alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}6\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}5\\-4\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{V}}=\left\{\begin{pmatrix}6\\-5\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-4\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Координаты вектора в базисе

Пусть даны $M = \{e_1, e_2, ..., e_n \in V\}$ – базис векторного пространства $\mathbf{V}$ и вектор $\mathbf{X}$ из V.

<u>Координатами вектора</u> $\mathbf{X}$ в этом базисе называют коэффициенты в разложении:

$$X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n \in V$$

Нахождение координат вектора в базисе.

Найти координаты вектора X в заданном базисе

$$R^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \ X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^4$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4 \\ 3\lambda_2 - \lambda_4 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ортогональный базис

<u>Определение.</u>

Базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ n-мерного пространства называется *<u>ортогональным</u>*, если

$$(e_i, e_j) = 0, i \neq j, \ i, j = 1,2,...,n$$

Другими словами,

<u>ортогональным базисом</u> называется базис, состоящий из попарно ортогональных векторов.

Ортонормированный базис

<u>Определение.</u>

Базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ n-мерного пространства называется <u>*ортонормированным*</u>, если

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Другими словами,

<u>*ортонормированным базисом*</u> называется базис, состоящий из попарно ортогональных векторов, каждый из которых имеет длину, равную единице.

Построение ортогонального базиса

<u>Задача.</u>

Проверить ортогональность системы векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^4$$

и дополнить ее до ортогонального базиса в $\mathbf{R}^4$.

1. Вычислим скалярное произведение (e_1, e_2):

$$(e_1, e_2) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \ e_1 \perp e_2 \, .$$

2. Задача сводится к построению векторов e_3 и e_4 таких, что $e_3 \perp e_4$ и оба ортогональны e_1, e_2 .

Построение ортогонального базиса (продолжение)

Для определения $e_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ достаточно найти какое-либо частное решение системы $\begin{cases} (e_3, e_1) = 0 \\ (e_3, e_2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Выберем частное решение $e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Построение ортогонального базиса (продолжение)

Для определения $e_4 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ достаточно найти какое-либо решение системы

$$\begin{cases} (e_4, e_1) = 0 \\ (e_4, e_2) = 0 \\ (e_4, e_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Общее решение - $\begin{pmatrix} 2c_1 \\ 4c_1 \\ 3c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, выберем $e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.