Метрические характеристики графа

Определение 1

Последовательность вершин и ребер графа вида $a_0(a_0,a_1)a_1(a_1,a_2)a_2(a_2,a_3)a_3 \ldots a_{n-1}(a_{n-1},a_n)a_n$

называется маршрутом, соединяющим вершины a_0 a_n.

Замечание

Очевидно, что маршрут можно однозначно задать

: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ или

последовательностью только вершин

только ребер: $(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_{n-1},a_n)$.

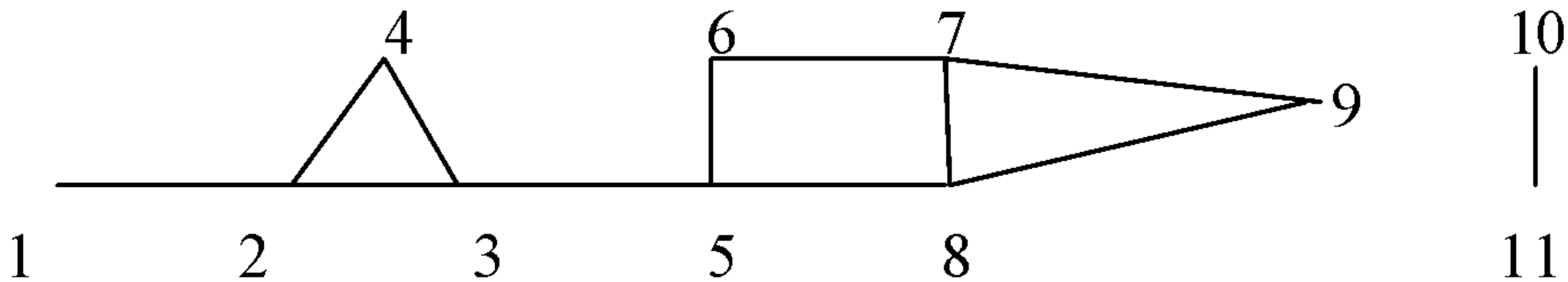
Определение 2

Определение 3

Расстоянием между вершинами u и v мы будем называть длину кратчайшего соединяющего их маршрута. Обозначают: $d(u,v)$.

Расстояние между двумя вершинами, которые нельзя соединить никаким маршрутом, считаем равным бесконечности (∞).

Пример



Из вершины 1 в вершину 8 существует несколько маршрутов, например: маршрут 1,2, 3, 5, 8, его длина равна 4; маршрут 1,2, 4, 3, 5, 6, 7, 8, его длина равна 7; маршрут 1,2, 3, 5, 6, 7, 9, 7, 6, 5, 8, длиной 10.

Длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершины 1 и 8, равна 4: d(2, 8)=3.

d(1, 9)=5, d(2, 6)=3, d(10,11)=1, d(7,11)=∞.

Утверждение 4

Введенное таким образом расстояние удовлетворяет следующим трем аксиомам метрики.

1) Для любой вершины u $d(u,u)=0$.

2) Для любых вершин u,v $d(u,v)=d(v,u)$.

3) Для любых вершин u,v,w $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

(.

ределение 5

Пусть дана вершина u. Расстояние до наиболее удаленной от u вершины графа называется эксцентриситетом вершины u. Обозначают: $e(u)$.

$$e(u)=\max_{x\in V} d(u,x).$$

Определение 6

Радиусом графа G называется наименьший из эксцентриситетов всех его вершин. Обозначают: $r(G)$.

$$r(G) = \min_{u \in V} e(u).$$

ределение 7

Наибольший из эксцентриситетов всех вершин графа G называется его диаметром. Обозначают: $d(G)$.

$$d(G) = \max_{u \in V} e(u).$$

ределение 8

Множество вершин графа G с наименьшими эксцентриситетами называют центром графа G и обозначают $Z(G)$, а сами вершины называют центральными.

Определение

Вершины с наибольшим эксцентриситетом называются диаметральными или периферийными.

еорема 10

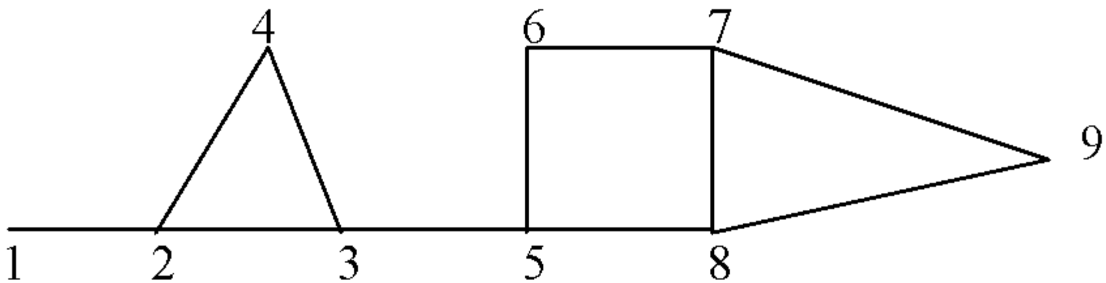
G $r(G) \le d(G) \le 2r(G)$.

Следствие 11

Если G - связный граф, то $1 \le \dfrac{d(G)}{r(G)} \le 2$.

Замечание $e(v), e(G), r(G), d(G), Z(G)$ называют метрическими характеристиками графа G.

Пример



$$e(1) = 5, e(2) = 4, e(3) = 3, e(4) = 4, e(5) = 3, e(6) = 4,$$

$$e(7) = 5, e(8) = 4, e(9) = 5$$

$$r(G) = 3; \qquad d(G) = 5; \qquad Z(G) = \{3,5\};$$

$1,7,9$ -

Задача Доказать, что для любого рационального числа из интервала $[1;2]$ существует граф с отношением диаметра к радиусу, равным этому числу.