Диофант и неопределенные уравнения

При выполнении работы были поставлены следующие **задачи**:

- расширить свой кругозор знаний по математике;
- рассмотреть некоторые методы решения неопределенных уравнений;
- показать практическое применение неопределенных уравнений.

Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей – и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его
 прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Пусть Диофант прожил *x* лет. Составим и решим уравнение:

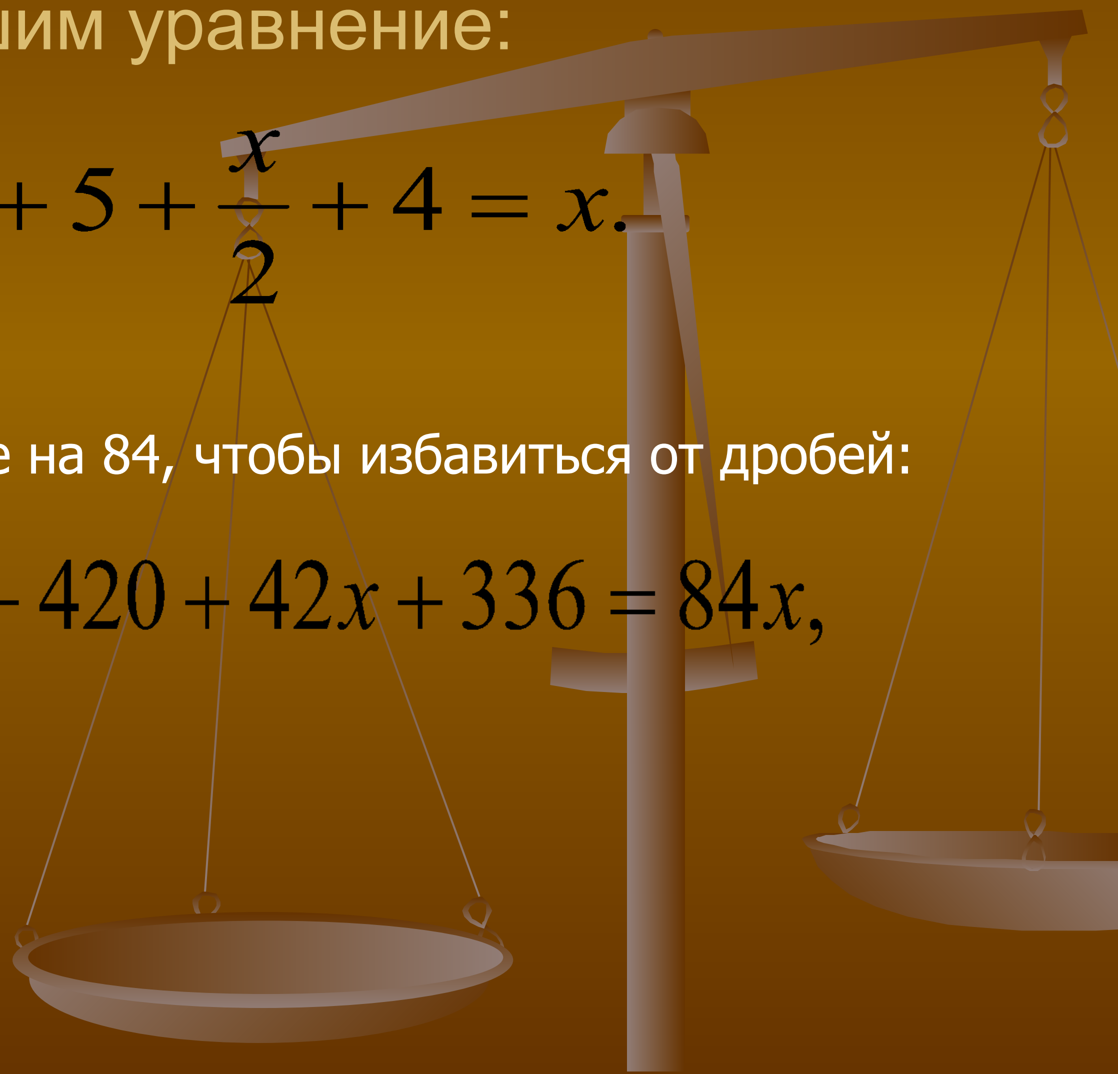
$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Умножим уравнение на 84, чтобы избавиться от дробей:

$$14x+7x+12x+420+42x+336=84x,$$

$$-9x=-756,$$

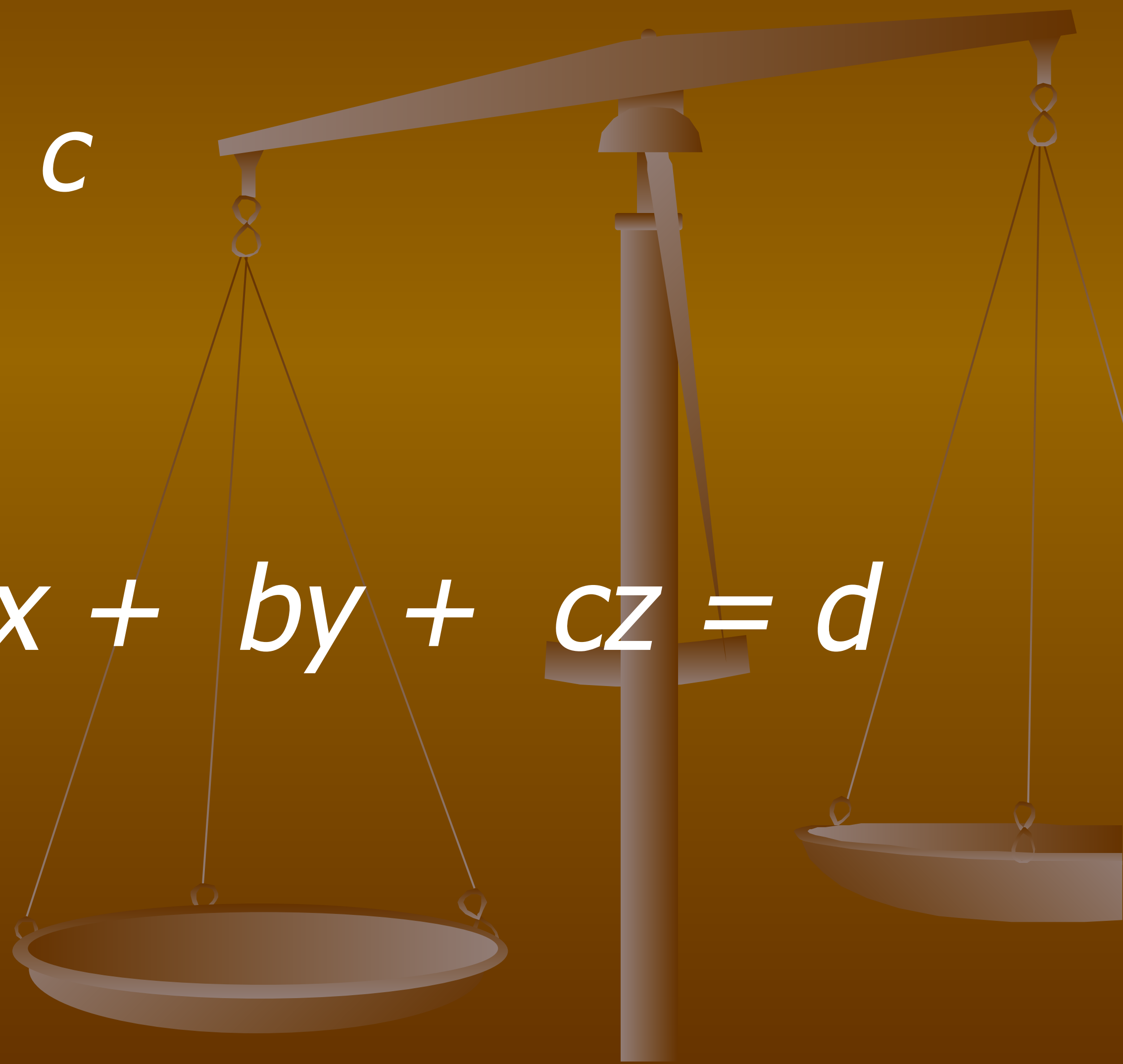
$$x=84.$$



Неопределенные уравнения первой степени

1.) $ax + by = c$

2.) $ax + by + cz = d$

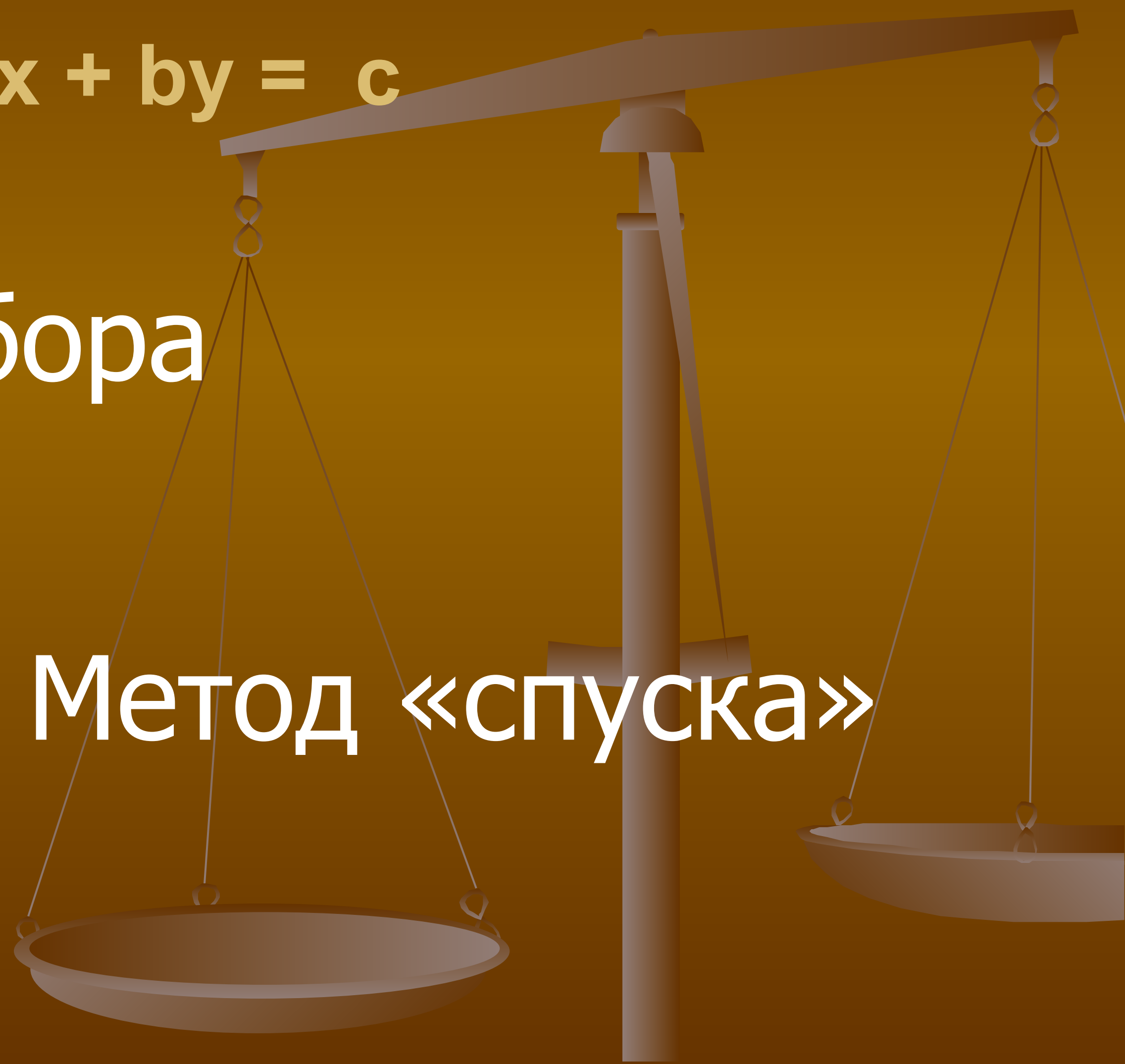


Неопределенные уравнения первой степени вида

$ax + by = c$

Метод перебора

Метод «спуска»



Метод перебора

Рассмотрим и решим уравнение:

$$4{,}5x+6y=57$$

Нужно найти все натуральные значения переменных х и у

Решение. Помножим обе части уравнения на 2, чтобы избавиться от дробных чисел, получим:

$$9x+12y=114$$

Выразим у через х:

$$y=\frac{114-9x}{12}$$

Далее воспользуемся методом перебора (учитывая, что *х* и *у* - натуральные):

x	2	10
y	8	2

Таким образом, подставляя вместо *x* числа, удовлетворяющие равенству, получили некоторые значения *y* .

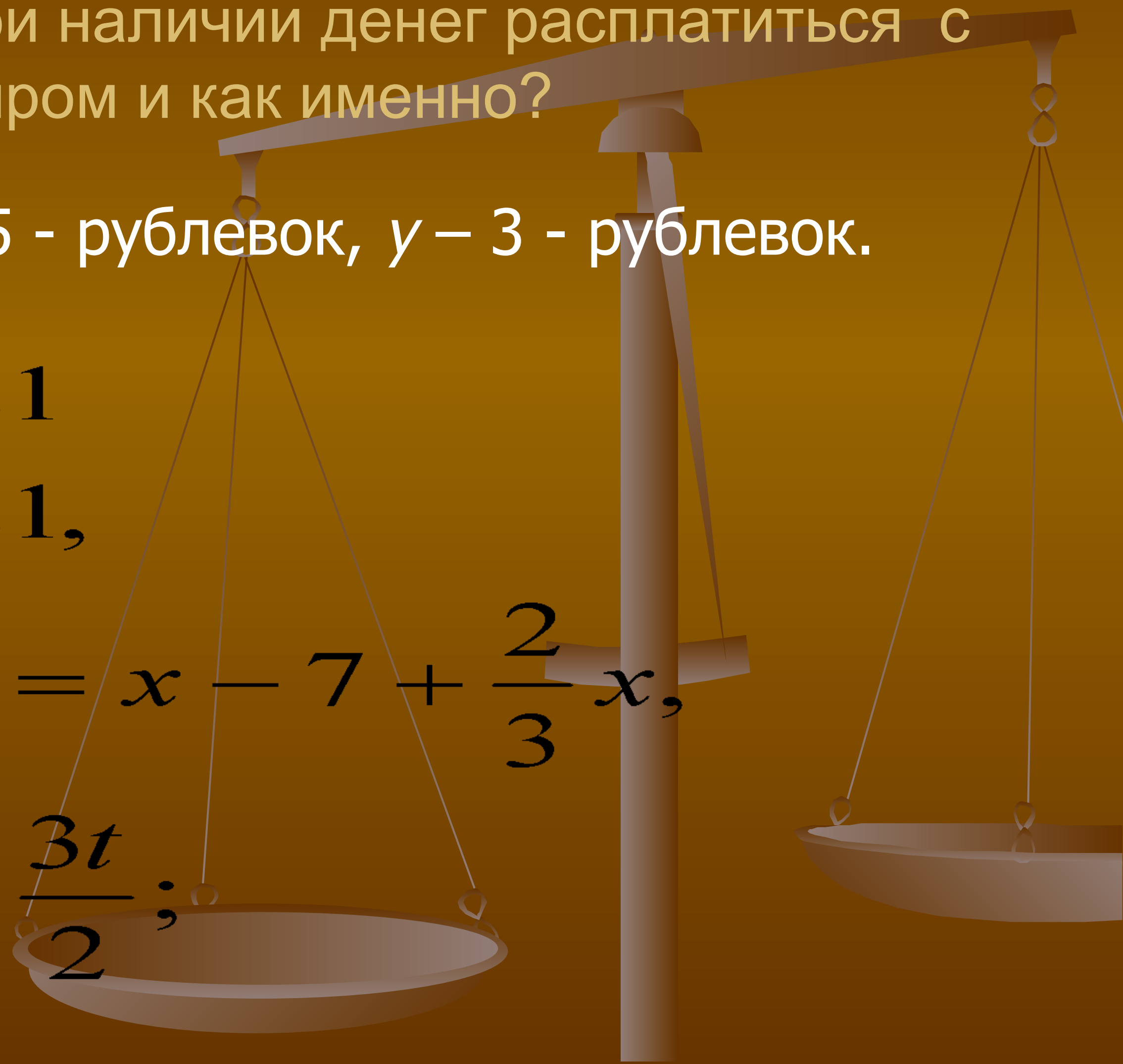
Метод спуска

1) Если свободный член с неопределенного уравнения $ax + by = c$ не делится на НОД (a, b), то уравнение не имеет целых корней.

2) Если коэффициенты a, b являются взаимно простыми числами, то уравнение имеет, по крайней мере, одно целое решение.

Рассмотрим задачу:

Покупатель приобрел в магазине на 21 р. товара. Но у него в наличии денежные знаки только 5 – рублевого достоинства, а у кассира – 3-рублевого. Требуется знать , можно ли при наличии денег расплатиться с кассиром и как именно?



Решение: *x* – число 5 - рублевок, *y* – 3 - рублевок.

$$5x-3y=21$$

$$3y=5x-21,$$

$$y=\frac{5}{3}x-7=x-7+\frac{2}{3}x,$$

$$\frac{2}{3}x=t, x=\frac{3t}{2};$$

Подставим в y вместо x дробь 3/2t

$$y = \frac{3}{2}t - 7 + t = \frac{5}{2}t - 7.$$

По условию *x > 0*, *y > 0*, значит $\frac{5}{2}t - 7 > 0, \quad t > 2{,}8$

Кроме того, *t* – четное, иначе ни *x*, ни *y* не будут целыми.

При *t = 4, 6, 8*, … имеем:

t	4	6	8	10	12	14	16	18	20
x	6	9	12	15	18	21	24	27	30
y	3	8	13	18	23	28	33	38	43

Неопределенные уравнения первой степени вида

ax + by + cz= d.

Рассмотрим уравнение:

$$7x + 4y + 9z = 89.$$

Нужно найти любые целые решения уравнения.

Решение:

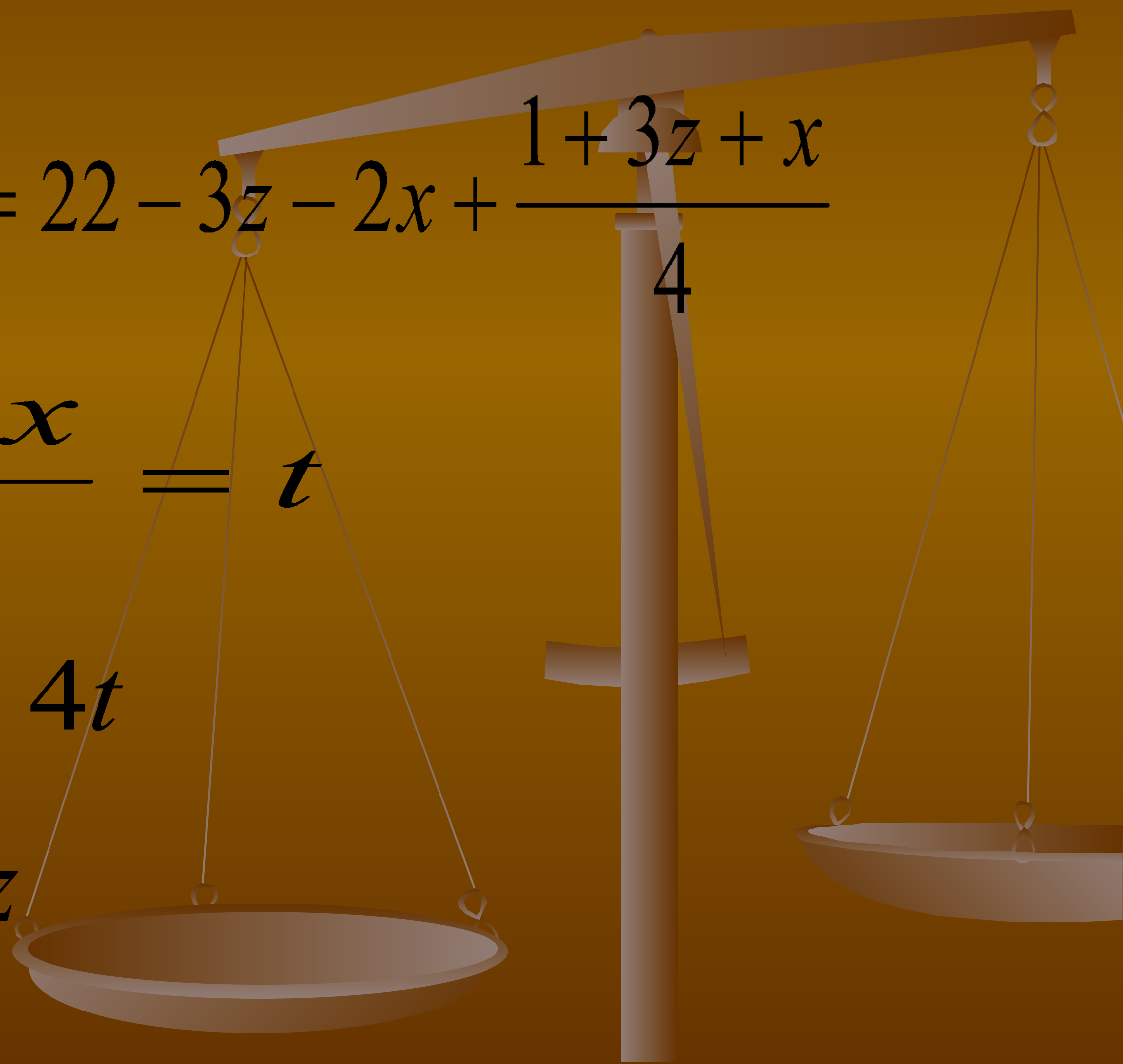
$$7x + 4y = 89 - 9z$$

$$y = \frac{89 - 9z - 7x}{4} = 22 - 3z - 2x + \frac{1 + 3z + x}{4}$$

$$\frac{1 + 3z + x}{4} = t$$

$$1 + 3z + x = 4t$$

$$x = 4t - 1 - 3z$$



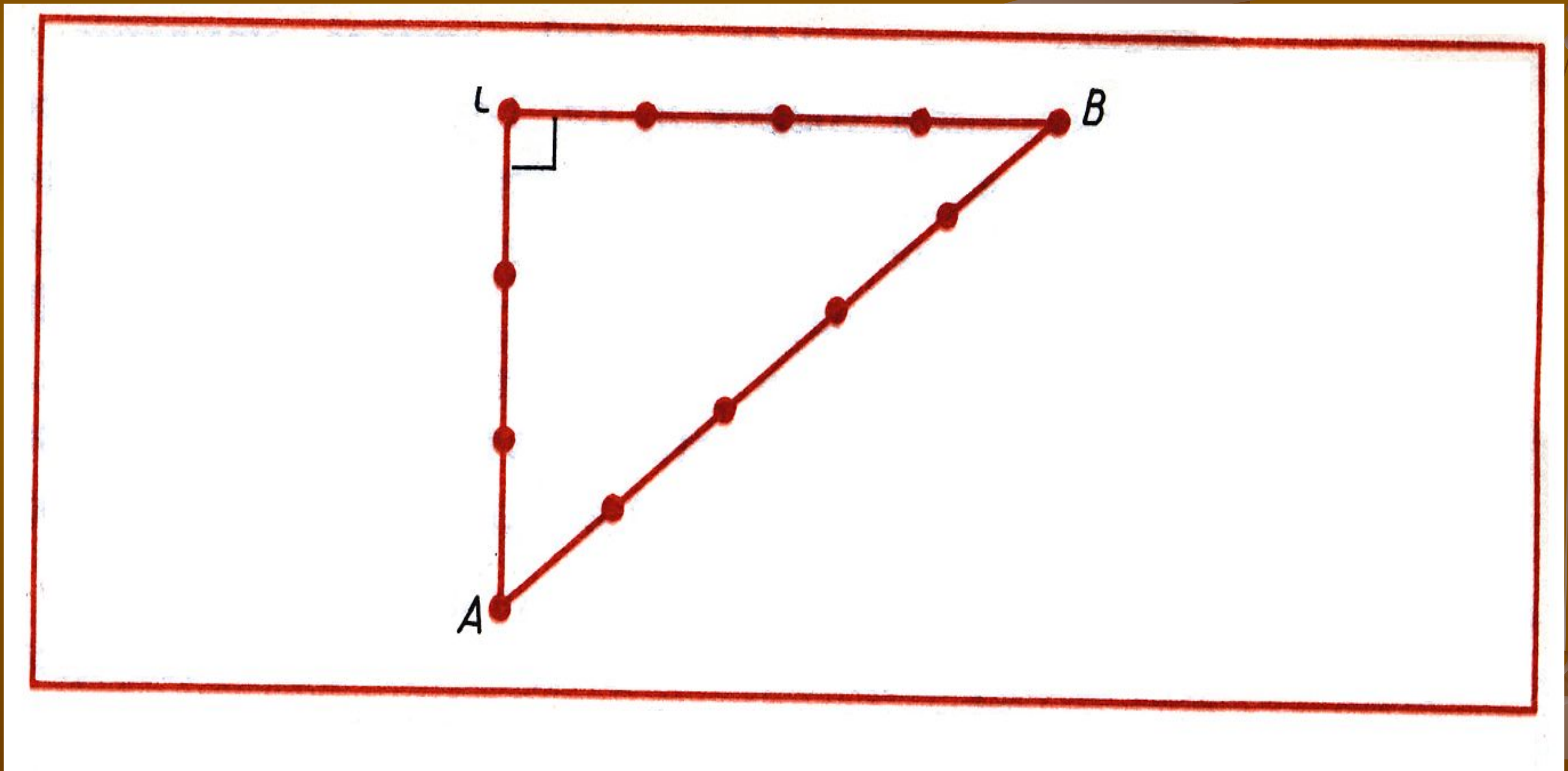
$$y = 22 - 3z - 2(4t - 1 - 3z) + t = 22 - 3z - 8t + 2 + 6z + t = 24 + 3z - 7t$$

$$x = 4t - 1 - 3z, \qquad y = 24 + 3z - 7t.$$

Придавая z и t целые значения, получим решение исходного уравнения:

t	0	1	2
z	1	2	3
x	-4	-3	-2
y	27	23	21

Неопределенные уравнения второй степени вида $x^2 + y^2 = z^2$



Один из путей решения уравнения в целых числах оказался довольно простым. Запишем подряд квадраты натуральных чисел, отделив их друг от друга запятой. Под каждой запятой запишем разность между последовательными квадратами:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196…

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 , 21, 23,   25, 27…

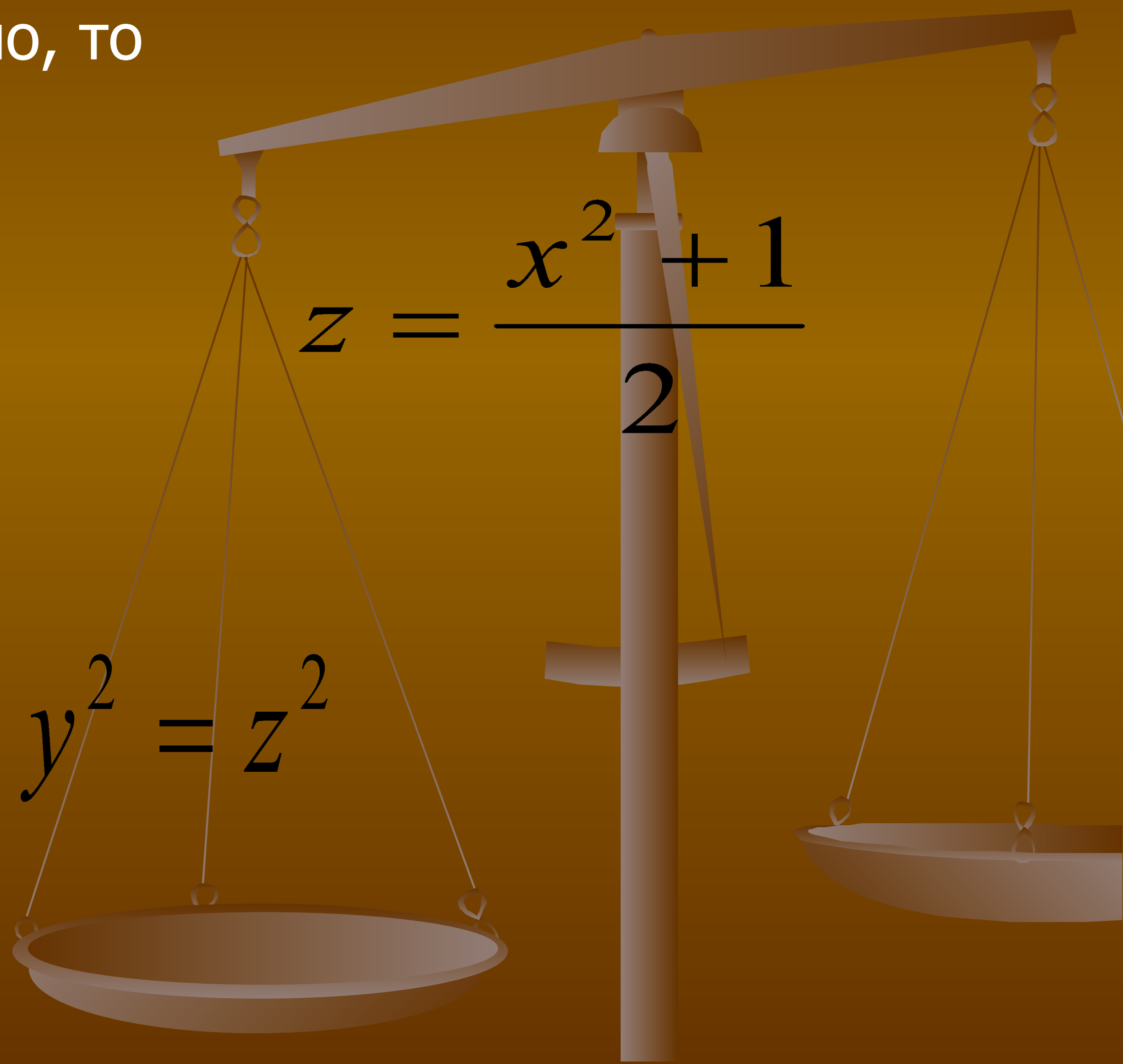
Сформулируем такую теорему:

Каждое нечетное число есть разность двух последовательных квадратов

если x - нечетное число, то

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} \qquad z = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$



Числа, найденные по такому правилу, всегда будут составлять решение интересующего нас неопределенного уравнения. Это уравнение будем называть «уравнением Пифагора», а его решения – «пифагоровыми тройками». По этому правилу можно получить уже известные нам тройки:

$$x = 3, \qquad y = \frac{9-1}{2} = 4, \qquad z = \frac{9+1}{2} = 5,$$

$$x = 5, \qquad y = \frac{25-1}{2} = 12 \qquad z = \frac{25+1}{2} = 13$$

Заключение

- Диофантовы уравнения и их решения и по сей день остаются актуальной темой.
- Умение решать такие уравнения позволяет найти остроумные и сравнительно простые решения казалось бы «неразрешимых» задач, а в практической деятельности значительно сэкономить затраты средств и времени.
- Проведя данное исследование, я овладела новыми математическими навыками, рассмотрела некоторые методы решения неопределенных уравнений.
- Изучая диофантовы уравнения, показала практическое им применение, решив несколько задач.