



## 4.8. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ


Пусть прямая задана уравнением:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

И пусть задана плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Рассмотрим возможные случаи ориентации  
прямой и плоскости:





**Прямая принадлежит плоскости.**

**Тогда направляющий вектор прямой**

$$\vec{s} = (m, n, p)$$

**ортогонален нормальному вектору плоскости**

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

**И пусть точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$**

**принадлежит прямой.**






Тогда выполняются следующие условия:

Поскольку вектора  $\vec{s}$  и  $\vec{n}$

в этом случае перпендикулярны, и их скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$(\vec{n}, \vec{s}) = Am + Bn + Cp = 0 \quad (1)$$

Поскольку точка  $M_0$  будет принадлежать плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (2)$$




**Прямая параллельна плоскости.  
Тогда выполняется только условие (1).**

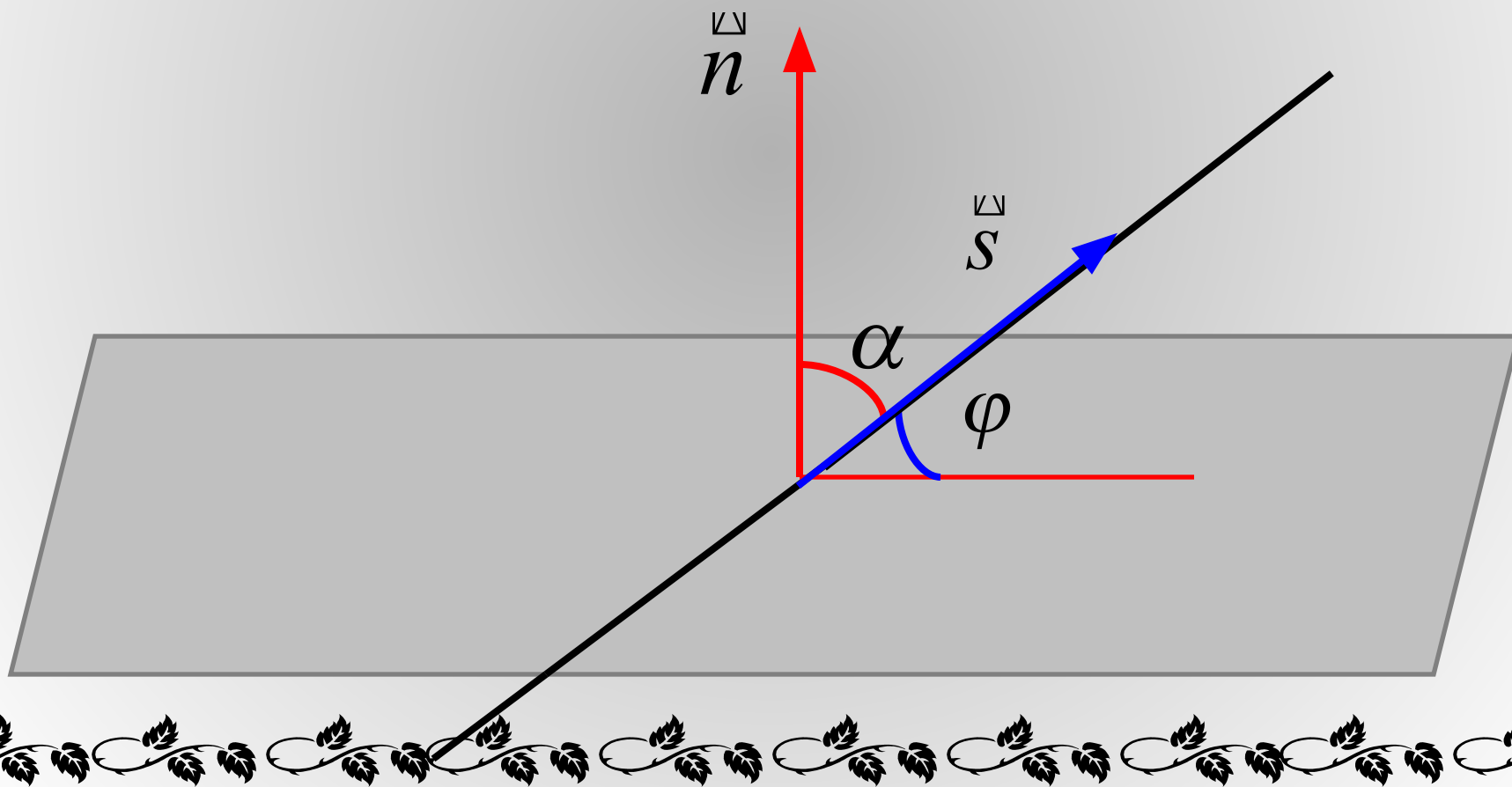



**Прямая пересекает плоскость в одной точке.  
Тогда выполняется условие**

$$(\overset{\sphericalangle}{n}, \overset{\sphericalangle}{s}) = Am + Bn + Cp \neq 0$$



*Углом между прямой и плоскостью называется меньший из двух углов между этой прямой и ее проекцией на плоскость.*






Синус угла  $\varphi$  между прямой и плоскостью равен косинусу угла  $\alpha$  между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой:

$$\sin \varphi = \cos \alpha$$

Найдем угол  $\alpha$ , как угол между двумя векторами:

$$\cos \alpha = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$




$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

*угол между прямой  
и плоскостью*



Если прямая перпендикулярна плоскости, то направляющий вектор прямой параллелен нормальному вектору плоскости:

$$\vec{s} \parallel \vec{n}$$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

*условия перпендикулярности  
прямой и плоскости*





Если прямая параллельна плоскости, то

$$\overline{s} \perp \overline{n}$$

$$Am + Bn + Cp = 0$$

условия параллельности  
прямой и плоскости

