Свойства дифференциалов

$$1.\ dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2.\ dx = \frac{1}{a} d(ax + b),$$

$$3.\ xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4.\ x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Независимость от вида переменной

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C .$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C .$$

Методы интегрирования

1. Табличный.
2. Разложения.
3. Подведение функции под знак дифференциала.
4. Интегрирование с помощью замены переменной (подстановкой).
5. Интегрирование по частям.

Табличный ***метод***

Вычисление интеграла производится непосредственно по формулам.

Для проверки правильности результата интегрирования надо продифференцировать результат и получить подынтегральную функцию.

Пример (табличный метод)

Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию.

$$1.\quad \int x^7 dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + C = \frac{x^8}{8} + C$$

$$2.\quad \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

Пример (табличный, с использованием свойства)

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = adx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \sin 5x + C .$$

Пример *(табличный, с использованием свойства)*

$$\int (2+3x)^5 dx = \frac{1}{3}\int (2+3x)^5 d(2+3x) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(2+3x)^6}{6} + C.$$

Метод разложения

Метод применим, когда подынтегральная функция представима в виде линейной комбинации других функций, причем интегралы от каждой из этих функций являются табличными.

Применяя свойства, получаем:

$$\int f(x)dx = \int Af_1(x)dx + \int Bf_2(x)dx =$$

$$= A\int f_1(x)dx + B\int f_2(x)dx = F_1(x) + F_2(x) + C$$

Пример (метод разложения)

$$\int\left(x^2+3x^3-x+1\right)dx.$$

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3-x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx-\int xdx+\int dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x+C$$

Пример (метод разложения)

$$1.\int (3x^4 + 6x^2 - 5)dx = \int 3x^4 dx + \int 6x^2 dx - \int 5dx =$$

$$= 3\int x^4 dx + 6\int x^2 dx - 5\int dx =$$

$$= \frac{3}{5}x^5 + \frac{6}{3}x^3 - 5x + C = \frac{3}{5}x^5 + 2x^3 - 5x + C$$

Пример (метод разложения)

2. $\int (5\cos x + 6e^{x})dx = \int 5\cos x dx + \int 6e^{x}dx =$

$$= 5\int \cos x dx + 6\int e^{x}dx = -5\sin x + 6e^{x} + C$$

Пример (метод разложения)

$$3.\int \frac{2x^5 - 3x^2 + 4x\sqrt{x}}{x^3}dx = \int \left(\frac{2x^5}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4x\sqrt{x}}{x^3}\right)dx =$$

$$\int \left(2x^2 - \frac{3}{x} + 4x^{-1,5}\right)dx = \int 2x^2 dx - \int \frac{3}{x}dx + \int 4x^{-1,5}dx =$$

$$= 2\int x^2 dx - 3\int \frac{1}{x}dx + 4\int x^{-1,5}dx = 2\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| +$$

$$+ 4\frac{x^{-0,5}}{-0,5} + C = \frac{2}{3}x^3 - 3\ln|x| - \frac{8}{\sqrt{x}} + C$$

Метод подведения функции под знак дифференциала

Свойства позволяют значительно расширить таблицу основных интегралов с помощью приема подведения функции под знак дифференциала.

Рассматриваемый метод применим в случае, если подынтегральную функцию можно представить в виде произведения двух функций:

$$f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Метод подведения функции под знак дифференциала

где f и φ -некоторые функции, причем интеграл от функции f является табличным.
Выражение $\varphi'(x)$ ***легко внести под знак дифференциала (для этого его надо проинтегрировать):*** $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$

При этом получается, что и в аргументе функции f и под знаком дифференциала стоит одно и тоже выражение $\varphi'(x)$

ò .å. $\quad f(\varphi(x))d(\varphi(x))$

Пользуясь свойством, получаем

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$$

Пример

(метод подведения под знак дифф-ла)

$$\int x^2 \cos x^3 dx$$

Преобразуем заданный интеграл с учетом того, что

$$x^2 dx = d\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} dx^3$$

Получим:

интегрируем

$$\int x^2 \cdot \cos x^3 dx = \int \cos x^3 \cdot x^2 dx = \int \cos x^3 d\frac{x^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos \underline{\underline{x^3}}\, d\underline{\underline{x^3}} = \frac{1}{3}\sin \underline{\underline{x^3}} + C$$

Пример

(метод подведения под знак дифф-ла)

$$\int \cos(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Преобразуем заданный интеграл с учетом того, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\arcsin x$$

Получим:

интегрируем

$$\int \cos(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \cos(\arcsin x)d\arcsin x =$$

$$= \sin(\arcsin x) + c = x + c$$

Метод замены переменной

Основная идея метода замены переменной заключается во введении вместо переменной интегрирования *x* новой переменной *t* таким образом, чтобы преобразовать заданный для вычисления интеграл к табличному виду.

Метод замены переменной

$$\int \frac{\text{å}^{x}\,dx}{\cos^{2}\left(e^{x}+1\right)}=\int \frac{dt}{\cos^{2} t}=tg\,t+C=tg\left(e^{x}+1\right)+C$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{Ïóñòü} & e^{x}+1=t, \\ & d\left(e^{x}+1\right)=dt, \\ & \left(e^{x}+1\right)' dx=dt, \\ \text{òîãäà} & dt=e^{x}\,dx \end{array}\right).$$

метод замены переменной

$$\int x\sqrt{3x^2-1}\,dx=\frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{9}\left(3x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\left(\begin{array}{ll}
\text{Ïóñòü} & 3x^2-1=t, \\
 & d(3x^2-1)=dt, \\
 & (3x^2-1)'dx=dt, \\
\text{òîãäà} & 6\tilde{o}\,dx=dt \\
\text{è} & \tilde{o}\,dx=\frac{1}{6}dt
\end{array}\right)$$

Интегрирование методом замены переменной.

$$\int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^7 2x} = -\frac{1}{2}\int t^{-7} dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{12\cos^6 2x} + C$$

$$\left(\begin{array}{ll}
\text{Ïóñòü} & \cos 2x = t, \\
 & d(\cos 2x) = dt, \\
 & (\cos 2x)' dx = dt, \\
\text{òîãäà} & -2\sin 2x dx = dt \\
\text{è} & \sin 2x\, dx = -\dfrac{1}{2} dt
\end{array}\right)$$

Интегрирование выражений, содержащих радикалы, методом замены переменной

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx = \int \frac{t^2+1}{2}\,t\cdot t\,dt = \frac{1}{2}\int\left(t^4+t^2\right)dt = \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{6}t^3 + C =$$

$$= \frac{1}{10}(2x-1)^2\sqrt{2x-1} + \frac{1}{6}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ïóñòü} \quad \sqrt{2x-1} = t, \\ (\sqrt{2x-1})^2 = t^2, \\ 2x-1 = t^2 \\ \text{òîãäà} \quad x = \dfrac{t^2+1}{2}, \\ dx = t\,dt \end{array}\right).$$

метод замены переменной

$$2.\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \int \frac{\left(2-t^3\right)^2\cdot\left(-3t^2\right)dt}{t} = -3\int\left(4t-4t^4+t^7\right)dt =$$

$$= -6t^2+\frac{12}{5}t^5-\frac{3}{8}t^8+C=$$

$$= -6\sqrt[3]{(2-x)^2}+\frac{12}{5}(2-x)\sqrt[3]{(2-x)^2}-\frac{3}{8}(2-x)^2\sqrt[3]{(2-x)^2}+C.$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{Ïóñòü} & \sqrt[3]{2-x}=t, \\ \text{òîãäà} & x=2-t^3, \\ & \\ \text{ò . å.} & dx=-3t^2dt \end{array}\right)$$

Нахождение интеграла методом преобразования подынтегральной функции в сумму или разность.

$$1.\ \int \sin 3x \cos x = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x)dx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

$$2.\ \int \frac{dx}{\sin^2 5x \cos^2 5x} = \int \frac{(\cos^2 5x + \sin^2 5x)dx}{\sin^2 5x \cos^2 5x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 5x} + \frac{1}{\cos^2 5x}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{5}ctg\, 5x + \frac{1}{5}tg\, 5x + C.$$

$$3.\ \int \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1}dx = \int \left(x^2 + 2 - \frac{1}{x^2 + 1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x - arctg\, x + C.$$

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int u dv = uv - \int v du$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin x dx$, где $n = 1,2...k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2...k$;

в) $\int x^n arctgx dx$, где $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k.$;

г) $\int x^n \ln x dx$, где $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1}dx$, а, например $\sin x dx = dv$,тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Примеры

Пример. Вычислить $\int x\cos x dx$.

Решение.

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C \ .$$

Примеры

Пример. Вычислить

$$\int x\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C\ .$$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. Преобразуем x^2+4x+5,

выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 =$$

$$=\left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1=(x+2)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt + C = arctg(x+2)+C.$$

Пример

Найти

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t,\ x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2}\,2tdt =$$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2t - 2arctgt + C =$$

$$= \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Дополнительно: Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$.