ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)dx$$

ПОВТОРИМ…

ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Функцию **F(x)** называют **первообразной** для функции **f(x)** на интервале **(a; b)**, если на нем производная функции **F(x)** равна **f(x)**:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Операцию, обратную **дифференцированию** называют **интегрированием.**

ПРИМЕРЫ

1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$

   $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x; \quad F(x) = \cos x$

   $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4; \quad F(x) = 2x^3 + 4x$

   $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x; \quad F(x) = \mathrm{tg}\, x$

   $F'(x) = (\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале **(a; b)** функции **f(x)** называют любую ее **первообразную** функцию.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

где **С** – произвольная постоянная **(const)**.

ПРИМЕРЫ

$$1.\ \int A\,dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

$$2.\ \int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$$

$$3.\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4.\ \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$$

$$5.\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n	a^x+C	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}+C$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x+C$	$\cos x$	e^x+C	e^x
$-\cos x+C$	$\sin x$	C	Cx
$\operatorname{tg} x+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x+C$	$\frac{1}{x\ln a}$
$-\operatorname{ctg} x+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x+C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ТРИ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

1° *Если* $\boldsymbol{F(x)}$ *есть первообразная для* $\boldsymbol{f(x)}$, *а* $\boldsymbol{G(x)}$ *– первообразная для* $\boldsymbol{g(x)}$, *то* $\boldsymbol{F(x) + G(x)}$ *есть первообразная для* $\boldsymbol{f(x) + g(x)}$.

2° *Если* $\boldsymbol{F(x)}$ *есть первообразная для* $\boldsymbol{f(x)}$, *а* $\boldsymbol{k}$ *– постоянная, то функция* $\boldsymbol{kF(x)}$ *есть первообразная для* $\boldsymbol{kf(x)}$.

3° *Если* $\boldsymbol{F(x)}$ *есть первообразная для* $\boldsymbol{f(x)}$, *а* $\boldsymbol{k}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *– постоянные, причем* $\boldsymbol{k \neq 0}$, *то функция* $\boldsymbol{\frac{1}{k}F(kx + b)}$ *есть первообразная для* $\boldsymbol{f(kx + b)}$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Вычисление определенного интеграла

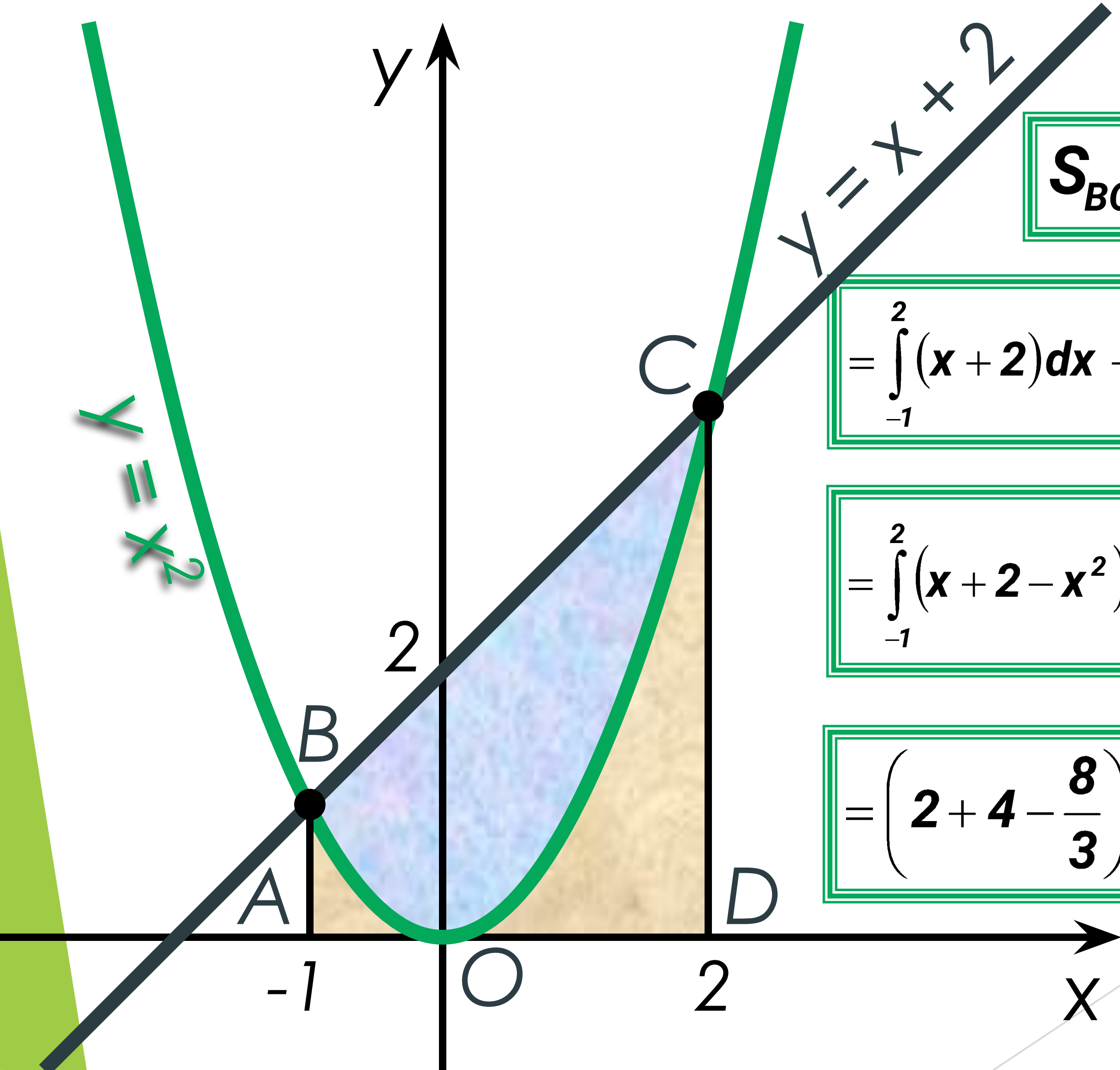
$$\int_1^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx = \left(x^3 - x^2 + x\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(2^3 - 2^2 + 2\right) - \left(1^3 - 1^2 + 1\right) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} \left(\sqrt{x+6}\right)dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3}\Bigg|_3^{10} =$$

$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$

Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2)dx - \int_{-1}^{2} (x^2)dx =$$

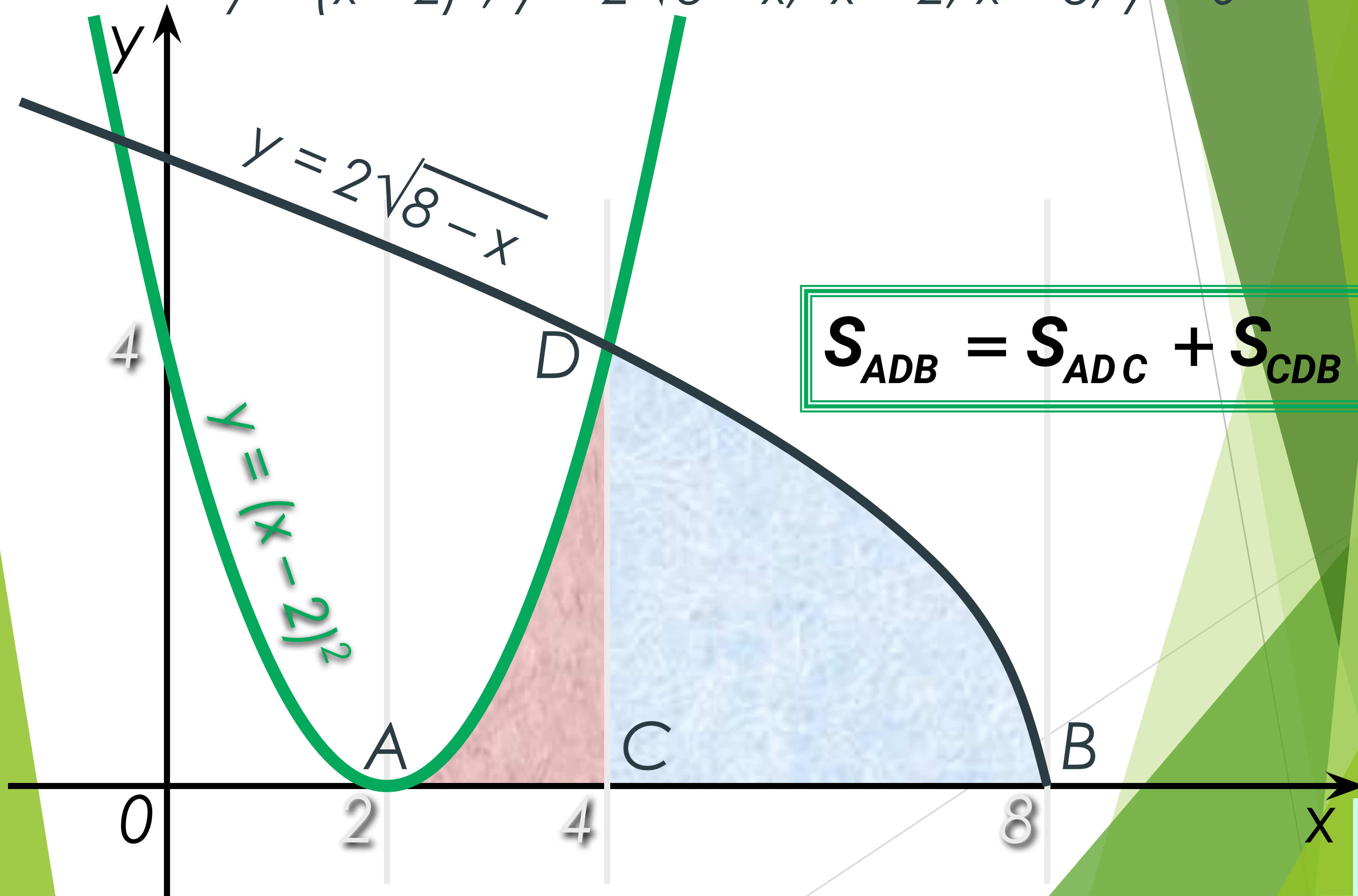
$$= \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$

Пример 2: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$

$$= \int_2^4 (x-2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x}\,dx = \frac{(x-2)^3}{3}\bigg|_2^4 - \frac{4(8-x)\sqrt{8-x}}{3}\bigg|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} - \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

ДОМАШНЯЯ РАБОТА

Решить в тетради: Упражнение 1004 (все 1-8), 1005 (1-4)
Сохранить файл в формате PDF и загрузить на сайт в своем профиле.

Вычислить интеграл (1004—1011).

1004 1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_0^3 x^2\,dx$; 3) $\int_{-1}^2 3x^2\,dx$; 4) $\int_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$; 6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 7) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

1005 1) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$; 2) $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$; 3) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.