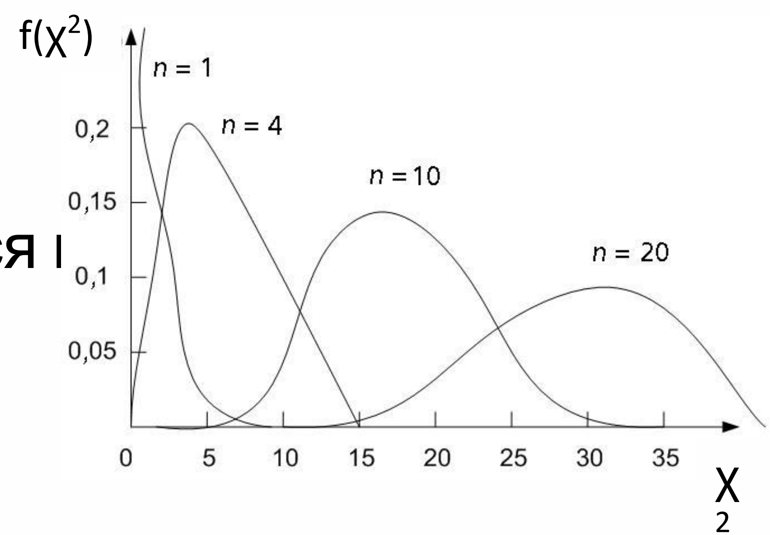
Специальные распределения

χ² -распределение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma} = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} = \chi^2$$

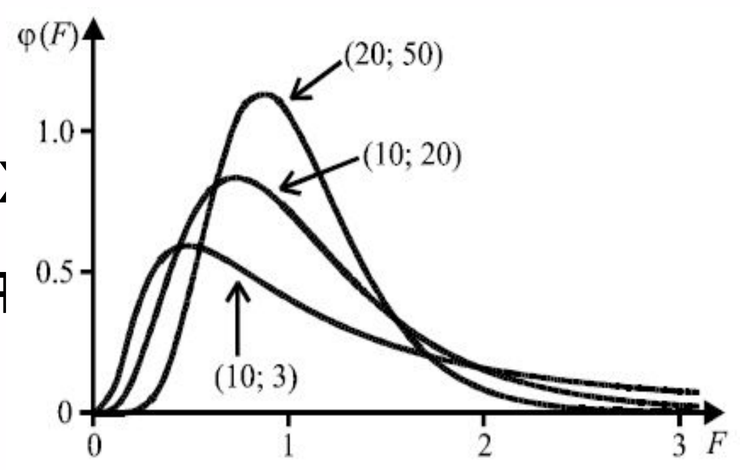
- Имея n независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots x_n$, при их нормально распределении можно получить случайную величину χ^2 с числом степеней свободы $f=n-1$.
- Если матожидание μ=0, Среднеквадратичное отклонение $\sigma_{\chi^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$
- $0<\chi^2<\infty$, вид зависит от f
- $\chi^2(p,f)$приведены в таблицах
- С увеличением f χ^2 стремится к Гаусову распределению



F-распределение

- Из нормального распределения генеральной совокупности взяли две выборки объемами n_1 и n_2
- Со степенями свободы $f_1=n_1-1$ *и* $f_2=n_2-1$
- Посчитали дисперсии S_1^2 и S_2^2
- Составили соотношение $F= S_1^2/ S_2^2$

- Вид зависит от f_1 *и* f_2
- $F(p,f_1,f_2)$приведены в таблица
- С увеличением f F стремится
  к Гаусову распределению



Распределение Пуассона

- Для представления функций от дискретных величин.
- Примеры – подсчет импульсов в радиохимии; подсчет квантов в рентгеноспектральном анализе и др.
- Общее характерное свойство - число возможных событий (например, число распадающихся ядер атомов) очень велико, а число происходящих событий (распад отдельных ядер) очень мало.
- Вследствие редкости этих событий в наблюдаемом интервале времени состав пробы меняется несущественно.
- Если один и тот же опыт повторять многократно, то вероятность появления результатов измерения x можно описать следующей зависимостью

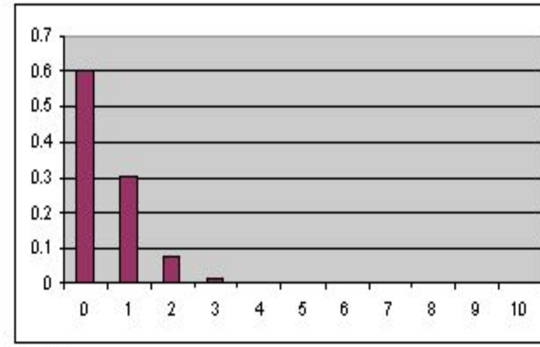
$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

- Вероятность осуществления события мала, но число испытаний велико

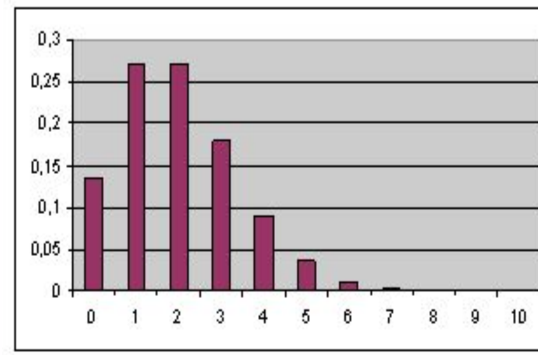
$$\sigma = \sqrt{\mu}$$

- Распределение характеризуется только одним параметром μ, т.к.
- Обладает значительной асимметрией при малых μ
- Вполне удовлетворительное приближение к нормальному распределению достигается при $x>15$

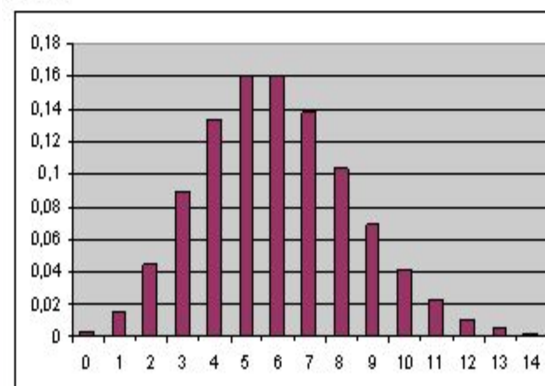
$\bar{n} = 0,5$



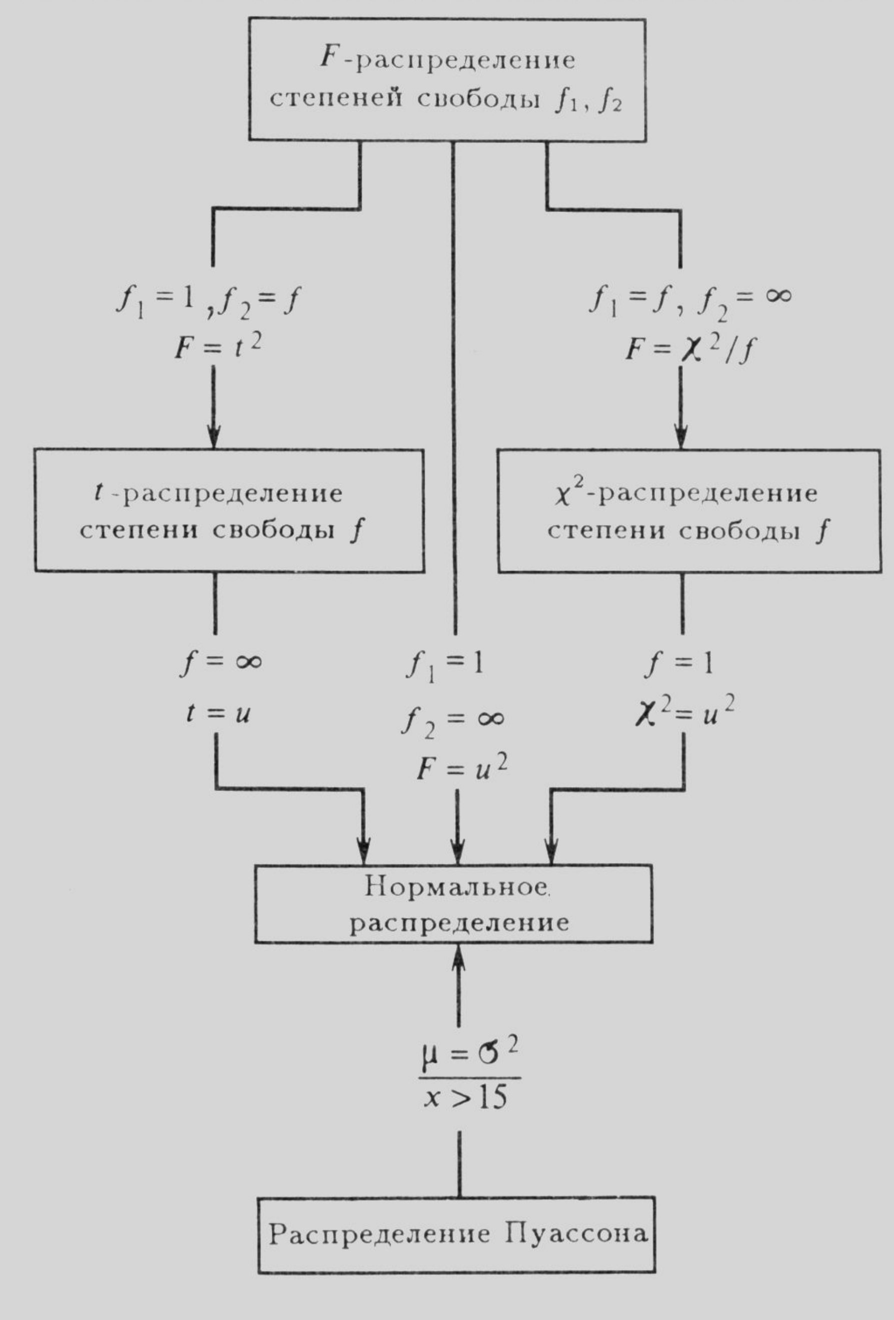
$\bar{n} = 2$



$\bar{n} = 6$



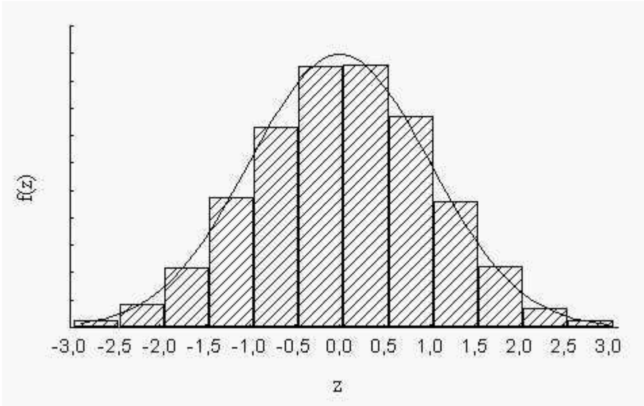
Связь между отдельными теоретическими распределениями и



Проверка нормальности распределения величин

1. Построение гистограмм.

Нормальность распределения оценивается по виду сглаживающей кривой, а также по приблизительным расчетам выборочных параметров



2. Правило 3σ.

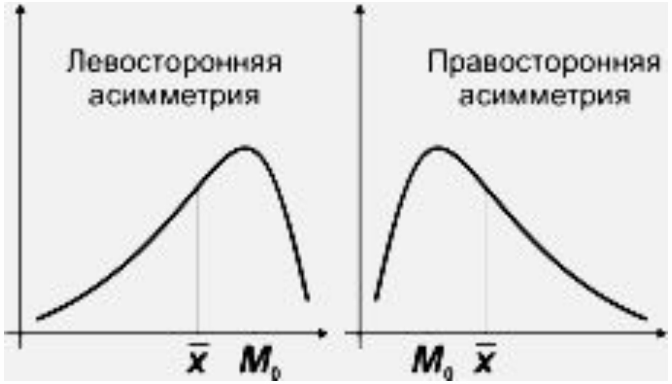
Если абсолютное отклонение случайной величины от математического ожидания не превышает утроенного среднеквадратического отклонения, то можно считать, что исследуемая величина распределена нормально.

Правило применимо только для представительных выборок с $n > 50$, когда выборочные параметры приближаются к генеральным.

3. Оценка асимметрии и эксцесса выборочной совокупности результатов анализа.

4. Оценка χ^2-критерия Пирсона.

Асимметрия



- При анализе вариационных рядов смещение от центра и крутизну распределения характеризуют специальные показатели.
-
- <u>**Асимметрия распределения**</u> возникает вследствие того, что какие-либо факторы действуют в одном направлении сильнее, чем в другом, или процесс развития явления таков, что доминирует какая-то причина. Кроме того, природа некоторых явлений такова, что имеет место асимметричное распределение.
- Для определения направления и величины смещения (асимметрии) распределения рассчитывается ***коэффициент асимметрии***, представляющий собой

$$A = \frac{1}{nS^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3$$

$$S_A^2 = \frac{6(n-1)}{(n+1)(n-3)}$$

- При левосторонней асимметрии ***коэффициент асимметрии*** (A<0), при правосторонней (A>0)
- Распределение полученных результатов можно считать нормальным, если

$$|A| \le 3S_A$$

Асимметрия имеет место

- При межлабораторных опытахв несравнимых лабораториях, если результаты отдельных лабораторий имеют систематические ошибки с одинаковыми знаками, но различной величины.
- При использовании линейных шкал там, где шкала нелинейна.
- Истинная асимметрия имеет место при достаточно большом числе измерений после устранения всех технических или математических причин.

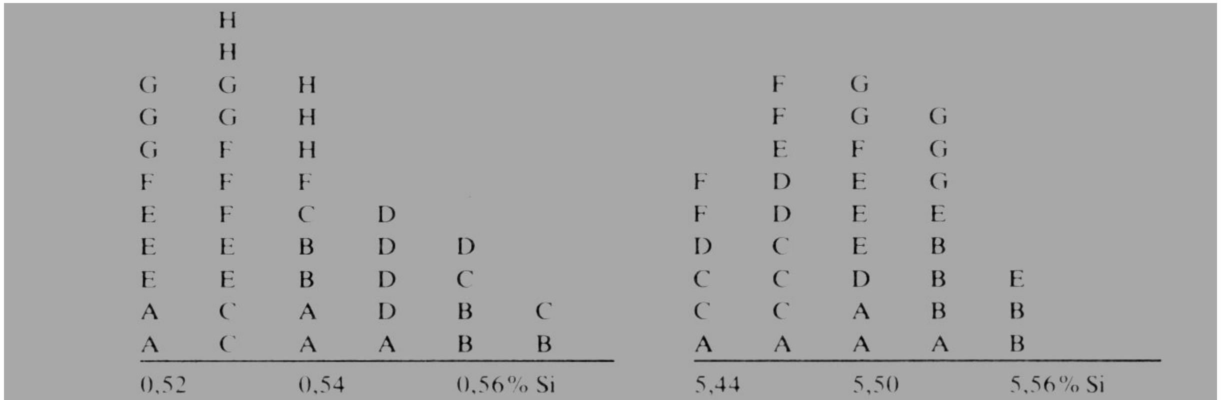


Рис. 2.3. Асимметричное распределение частот результатов анализа при совместном (межлабораторном) определении кремния.

Эксцесс

- Эксцесс служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным распределением

$$E = \frac{1}{nS^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4 - 3 \qquad S_E^2 = \frac{24(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

- Распределение полученных результатов можно считать нормальным, $|E| \leq 5S_E$

- Слишком заостренный максимум (E>0) – при неслучайной выборке
- Плосковершинное распределение (E<0) – при проведении анализа в разных лабораториях или совершенно разных условиях работы

Неравенство Чебышева

- Используется в тех случаях, когда распределение результатов и случайных ошибок анализа заведомо отличается от нормального.

- С помощью неравенства можно получить загрубленные статистические оценки для генерального среднего μ по выборочному среднему $\bar{x}$ если известно значение генеральной дисперсии σ^2 или, по крайней мере, выборочной дисперсии S^2.

- <u>По Чебышеву</u> $P(|x_i-\mu|\le k\sigma) > (k-1/k^2)=2\alpha_{чеб}$
- k- переменная, аналогичная переменной u в распределении Лапласа, k>1.
- $2\alpha_{чеб}$ – доверительмная вероятность по Чебышевудля двустороннего симметричного интервала

- Доверительная вероятность того, что единичный результат измерения отклоняется от своего матожидания не более, чем на величину $\Delta x=\pm k\sigma$ больше $2\alpha_{чеб}$

- $P(|\bar{x}-\mu|\le k\sigma/\sqrt{n}) > (k-1/k^2)=2\alpha_{чеб}$
- Доверительная вероятность того, что выборочное среднее отклоняется от своего матожидания задается с учетом стандартного отклонения среднего арифметического.

- Оценки по Чебышеву дают существенно заниженные оценки значения надежности по сравнению с нормальным распределением из-за недостатка информации о распределении.

- Усиленная форма неравенства Чебышева

$P(|x_i-\mu|\leq k\sigma) > (k-(2/(3k)^2)=2\alpha_{чеб}$

Сравнение доверительных вероятностей

$P_{лп} > P_{ст} > P_{чеб\ ус} > P_{чеб}$ f=5

0.999994 0.996 0.98 0.96

Если считать, что случайные погрешности, вероятность появления которых НЕ превышает 3-4% практически не реализуются, то при f=5 верхним значением случайной погрешности следует считать:

По Лапласу: $\pm 2\sigma$

По Стьюденту: $\pm 3\sigma$

По Чебышеву: $\pm 5\sigma$

По усиленному Чебышеву: $\pm 4\sigma$