Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.

Определение: **Функция F(x) называется первообразной функции f(x) на промежутке X, если**

$$\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$$

- **Теорема:** *Если функция f(x) непрерывна при* $x \in X$ *,то для f(x) существует первообразная F(x) на X.*
- **Замечание 1:** *Условие непрерывности не является необходимым для существования первообразной. Пример разрывной функции, имеющей первообразную:*

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Найдите первообразную функции $f(x)=|x-1|\cdot(2x-1)$ *на R.*

Решение. *Данная функция может быть записана в виде:*

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+3x-1, & \text{если } x<1,\\ 2x^2-3x+1, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$$

$$F_1(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C_1,\ \text{если } x<1;$$

$$F_2(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C_2,\ \text{если } x\ge 1.$$

Найдем соотношение между C_1 *и* C_2, *при котором* $F_1(1)=F_2(1)$:

$$C_1=\frac{1}{3}+C_2.$$

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{3}+C, & \text{если} \quad x<1,\\ \frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C, & \text{если} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

4. $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$

5. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$

6. $\int f(x)d(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x)d(f(x)).$

Основные метод

интегрировани

- Табличный.
- Сведение к табличному преобразованием подынтегрального выражения в сумму или разность.
- Интегрирование с помощью замены переменной (подстановкой).
- Интегрирование по частям.

Нахождение интеграла методом преобразования подынтегральной функции в сумму или разность.

$$1.\int \sin 3x\cos x = \frac{1}{2}\int\left(\sin 4x + \sin 2x\right)dx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

$$2.\int \frac{dx}{\sin^2 5x\cos^2 5x} = \int \frac{\left(\cos^2 5x + \sin^2 5x\right)dx}{\sin^2 5x\cos^2 5x} = \int\left(\frac{1}{\sin^2 5x} + \frac{1}{\cos^2 5x}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{5}ctg\,5x + \frac{1}{5}tg\,5x + C.$$

$$3.\int \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1}dx = \int\left(x^2 + 2 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x - arctg\,x + C.$$

Интегрирование методом замены переменной.

$$1.\ \int x\sqrt{3x^2-1}\,dx=\frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{9}\left(3x^2-1\right)\sqrt{3x^2-1}+C.$$

$$\left(\text{Пусть}\quad 3x^2-1=t,\quad \text{тогда}\quad 6x\,dx=dt,\quad \text{т.е.}\quad x\,dx=\frac{1}{6}dt\right).$$

$$2.\ \int\frac{\sin 2x\,dx}{\cos^7 2x}=-\frac{1}{2}\int t^{-7}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-6}}{-6}+C=\frac{1}{12\cos^6 2x}+C.$$

$$\left(\text{Пусть}\ \cos 2x=t,\ \text{тогда}\quad dt=-2\sin 2x\,dx,\quad \text{т. е.}\ \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}dt\right).$$

Интегрирование выражений, содержащих радикалы, методом подстановки.

$$1.\ \int x\sqrt{2x-1}\,dx = \int \frac{t^2+1}{2}\,t\cdot t\,dt = \frac{1}{2}\int\left(t^4+t^2\right)dt = \frac{1}{10}t^5+\frac{1}{6}t^3+C =$$

$$= \frac{1}{10}(2x-1)^2\sqrt{2x-1}+\frac{1}{6}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$$

$$\left(\text{Пусть}\quad \sqrt{2x-1}=t,\quad \text{тогда}\quad x=\frac{t^2+1}{2},\quad dx=t\,dt\right).$$

$$2.\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{2-x}}=\int\frac{\left(2-t^3\right)^2\cdot\left(-3t^2\right)dt}{t}=-3\int\left(4t-4t^4+t^7\right)dt=$$

$$=-6t^2+\frac{12}{5}t^5-\frac{3}{8}t^8+C=$$

$$=-6\sqrt[3]{(2-x)^2}+\frac{12}{5}(2-x)\sqrt[3]{(2-x)^2}-\frac{3}{8}(2-x)^2\sqrt[3]{(2-x)^2}+C.$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Пусть}\quad \sqrt[3]{2-x}=t,\quad \text{тогда}\quad x=2-t^3,\\ \text{т.е.}\quad dx=-3t^2dt\end{array}\right).$$

Интегрирование по частям.

$$1. \int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

$$3. \int x^2 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d(\cos 2x) = -\frac{1}{2}\left(x^2\cos 2x - \int \cos 2x\,dx^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\int x\,d(\sin 2x) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\left(x\sin 2x - \int \sin 2x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Избранные задачи интегрального исчисления (найдите неопределенный интеграл, используя указанный способ)

— преобразование подынтегрального выражения:

а) $\int \frac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 + 1} dx$;

б) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$;

в) $\int \sin^4 \frac{x}{8} dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$;

а) $\int \frac{x^2 - 1}{1 + x^2} dx$;

б) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$;

в) $\int \cos^4 2x dx$;

г) $\int \frac{dx}{-\sqrt{-2x - x^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$;

— **замена переменной:**

е) $\int (x^3-1)^4 x^2 dx;$

е) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^3};$

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}};$

ж) $\int \frac{dx}{4x^2+25};$

з) $\int \frac{\mathrm{tg}x}{\cos x} dx;$

з) $\int \frac{\mathrm{ctg}x}{\sin^2 x} dx;$

и) $\int \cos^3 x dx;$

и) $\int \sin^3 x dx;$

к) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}};$

к) $\int x\sqrt{x-4}dx;$

— интегрирование по частям:

л) $\int x\cos 2x\,dx;$

м) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9+16x}};$

н) $\int \arcsin x\,dx.$

л) $\int x\sin\frac{x}{3}\,dx;$

м) $\int (2x+1)^4 x\,dx;$

н) $\int \arccos x\,dx.$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 4 - x^2, \; y = 3x, \; y = -3x$
$(y > 0);$
б) $y = \sin x, \; y = \cos x,$
$0 \le x \le \frac{\pi}{2};$
в) $y = |x^2 - 2x|, \; y = 11 - |x - 1|;$
г) $y = \frac{8}{x^2}, \; y = x, \; y = 4,$
$x = 0.$

а) $y = 2x - x^2, \; y = -x,$
$y = x - 2 \; (y > 0);$
б) $y = \sin x, \; y = -\sin x,$
$0 \le x \le \frac{3\pi}{2};$
в) $y = \frac{1}{4}|x^2 - 4|, \; y = 7 - |x|;$
г) $y = -\frac{4}{x^2}, \; y = -4, \; y = -\frac{1}{2}x,$
$x = 0.$