



ОТКРЫТОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО

«СИСТЕМНЫЙ ОПЕРАТОР
ЕДИНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»

Объединенное диспетчерское управление
энергосистемами Северо-Запада

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭС

Прогнозирование электропотребления.
Оптимизация краткосрочных и оперативных
режимов.

Ножин Леонид Эмануилович
К.т.н., доцент



Общие принципы прогнозирования физических процессов



Интуитивные (экспертные) методы прогнозирования

- Базируются на интуитивно-логическом мышлении. В основе разработки прогноза лежат мнение и профессиональный научный опыт экспертов.

Используются:

- ✓ когда невозможно учесть влияние многих факторов из-за значительной сложности объекта прогнозирования;
- ✓ при наличии высокой степени неопределенности информации.

Среди интуитивных методов широкое распространение получил метод экспертных оценок.

Сущность метода экспертных оценок заключается в том, что в основу прогноза закладывается мнение специалиста или коллектива специалистов, основанное на профессиональном, научном и практическом опыте в сочетании с количественными методами оценки и обработки получаемых результатов.



Формализованные (фактографические) методы прогнозирования

4

Сущность экстраполяционного метода заключается в изучении устойчивых тенденций развития объекта прогноза и переноса их на будущее.

Различают формальную и прогнозную экстраполяцию

Формальная базируется на сохранении в будущем прошлых и настоящих тенденций развития объекта прогноза.

При прогнозной фактическое развитие связано с гипотезами об исследуемом объекте и о влиянии различных факторов в перспективе на него.

Моделирование предполагает конструирование модели на основе предварительного изучения объекта или процесса, выделения его существенных характеристик или признаков.

Предполагают использование в процессе прогнозирования экономико-математических моделей, которые описывают исследуемый объект в виде математических зависимостей и отношений.

В электроэнергетике чаще всего применяется различное сочетание указанных методов.



Общая математическая модель нагрузки ЭЭС

5

Графики нагрузки в ЭЭС являются последовательностями наблюдений или расчетных значений, показывающих изменения мощности в течение определенного периода времени. В суточных, недельных и годовых графиках отображается периодичность процесса изменения мощности нагрузки, связанная с режимом работы людей, сменой дня и ночи, недельными циклами и сезонными изменениями в течение года.

В энергосистемах имеются фактические данные почасовой (или по-получасовой) нагрузки с разной дискретностью и глубиной архива, причем за много лет. Поэтому чаще других применяются методы статистической экстраполяции.

В общем случае, не выделяя интервалы прогнозирования, модель нагрузки можно представить в виде трех составляющих временного ряда

$$X(t) = Q(t) + S(t) + U(t),$$

где $Q(t)$ – тренд – устойчивые систематические изменения;

$S(t)$ – периодическая составляющая – колебания относительно тренда;

$U(t)$ – нерегулярная (случайная) составляющая.



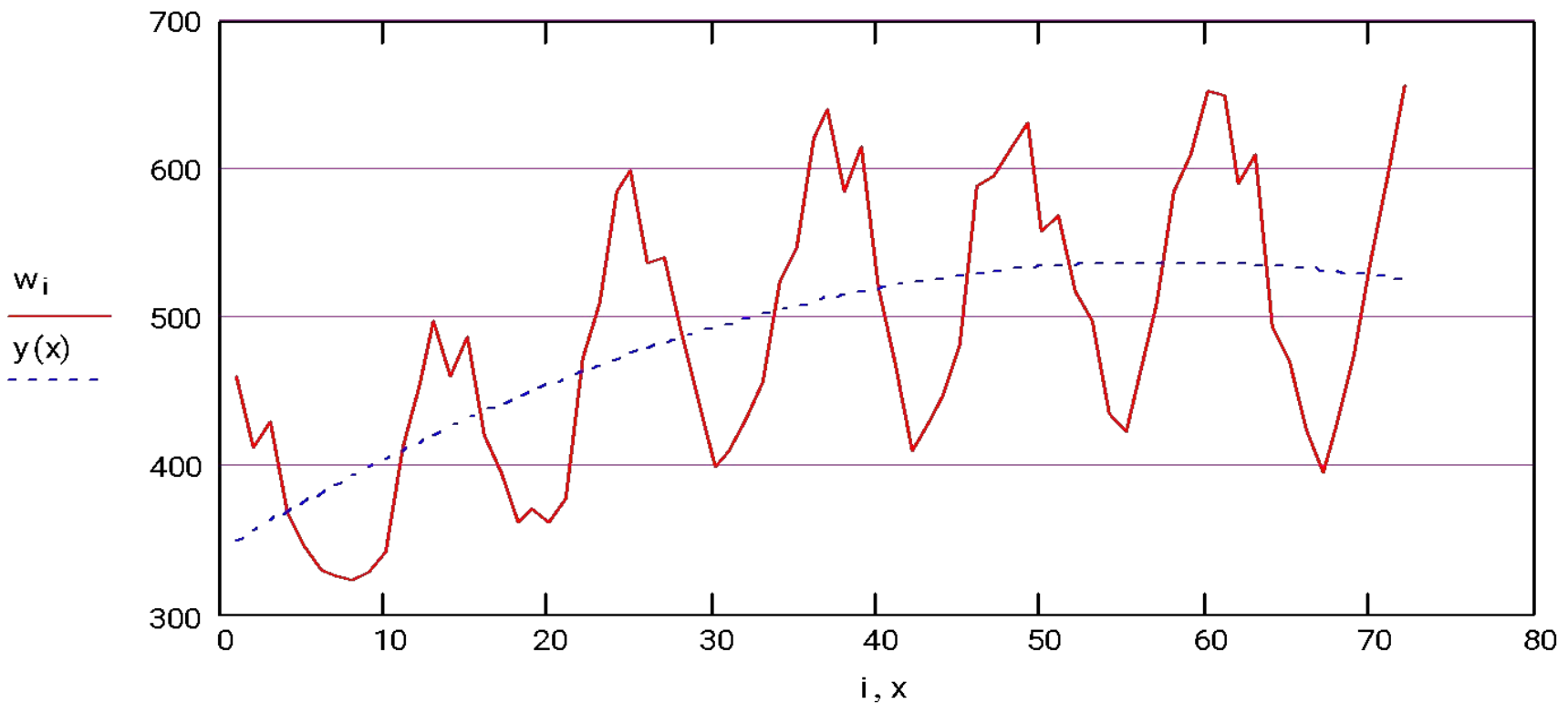
Общая математическая модель нагрузки ЭЭС

6

Можно выделить характерные периодичности потребления:

- Суточные максимумы нагрузки в неделе;
- Недельные максимумы нагрузки в месяце;
- Месячные максимумы нагрузки в году.

Такие периодичности характерны не только для максимальных, но и для любых однотипных точек графика.



Ретроспектива временного ряда



Для выделения трендовой составляющей часто используют полиномиальную модель до третьего порядка включительно. Иногда при выделении тренда предварительно применяют процедуру сглаживания, которая устраняет периодическую и случайную составляющие.

$$Q_0(t) = a_0,$$

$$Q_1(t) = a_0 + a_1t,$$

$$Q_2(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2,$$

$$Q_3(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3.$$



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

Учитывая, что в энергосистемах имеются фактические данные нагрузки с разной дискретностью и глубиной архива, причем за много лет, чаще других применяется метод статистической экстраполяции, иногда называемый *календарный метод*.

Для имеющейся на интервале ретроспективы (назад) статистической информации находится некоторая аппроксимирующая зависимость

$P(t)$, называемая *трендом*, которая используется для экстраполяции вперед на интервал упреждения. Аналитическое выражение тренда обычно имеет вид полинома (линейного, квадратичного, трехстепенного). Пусть необходимо на некоторый час предстоящих суток спрогнозировать значение нагрузки $P_{\text{пр}}$. Имеются значения нагрузки в тот же час за несколько предшествующих однотипных суток. Например, известны нагрузки в 12 часов T предшествующих вторников и требуется спрогнозировать нагрузку на 12 часов нового вторника. Расположим эти данные в статистический ряд:

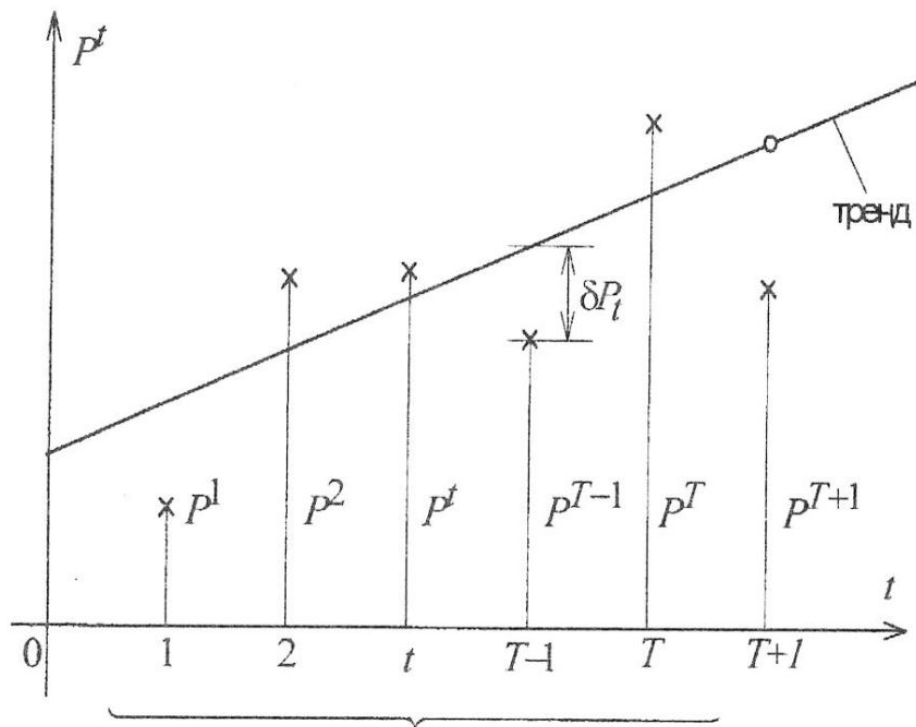
$$P^1, P^2, \dots, P^t, \dots, P^T$$

где T – количество наблюдений:



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

9



Для простоты составим линейное уравнение регрессии (или тренда):

$$P(t) = a + b \cdot t$$

где a и b – искомые коэффициенты (параметры) уравнения регрессии;
 t – независимая переменная (время, календарная дата, номер равноудаленного измерения, зависит от интервала упреждения и дискретности архива данных). Эта зависимость называется *статистической*, так как она неоднозначна и зависит от объема статистической информации – числа наблюдений T .



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

10

Необходимо найти такую прямую, чтобы точки лежали как можно ближе к ней. Решаем эту задачу методом наименьших квадратов, т.е. определением таких значений a и b , при которых сумма квадратов отклонений δP_t была бы минимальной. Для этого отыскиваем минимум функции

$$S = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta P_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [P(t) - P']^2$$

которую можно представить как

$$S = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (a + bt - P^t)^2$$

Чтобы найти, при каких значениях a и b функция S достигает минимума, продифференцируем ее и приравняем частные производные нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (a + bt - P^t) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (a + bt - P^t) t = 0.$$



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

В результате получим два уравнения

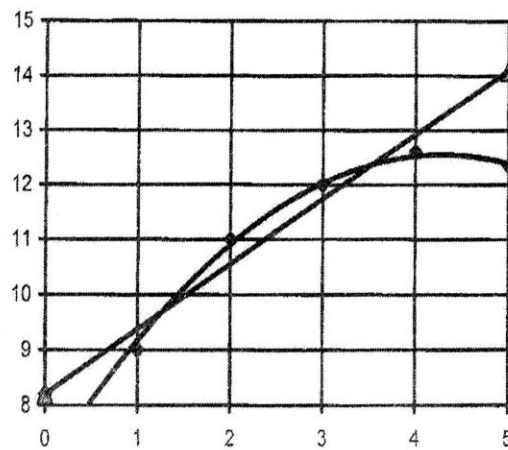
$$\alpha_{11}a + \alpha_{12}b = \beta_1$$

$$\alpha_{21}a + \alpha_{22}b = \beta_2$$

решив которые относительно a и b , получаем параметры уравнения регрессии. После достоверизации его путем вычисления среднего значения и дисперсии (формулы не приводятся) и сравнения их с критериями математической статистики, можно вычислить прогнозные значения нагрузки

$$P_{\text{пр}} = a + b(T + 1)$$

Ниже показаны графики прогнозного значения активной мощности методом



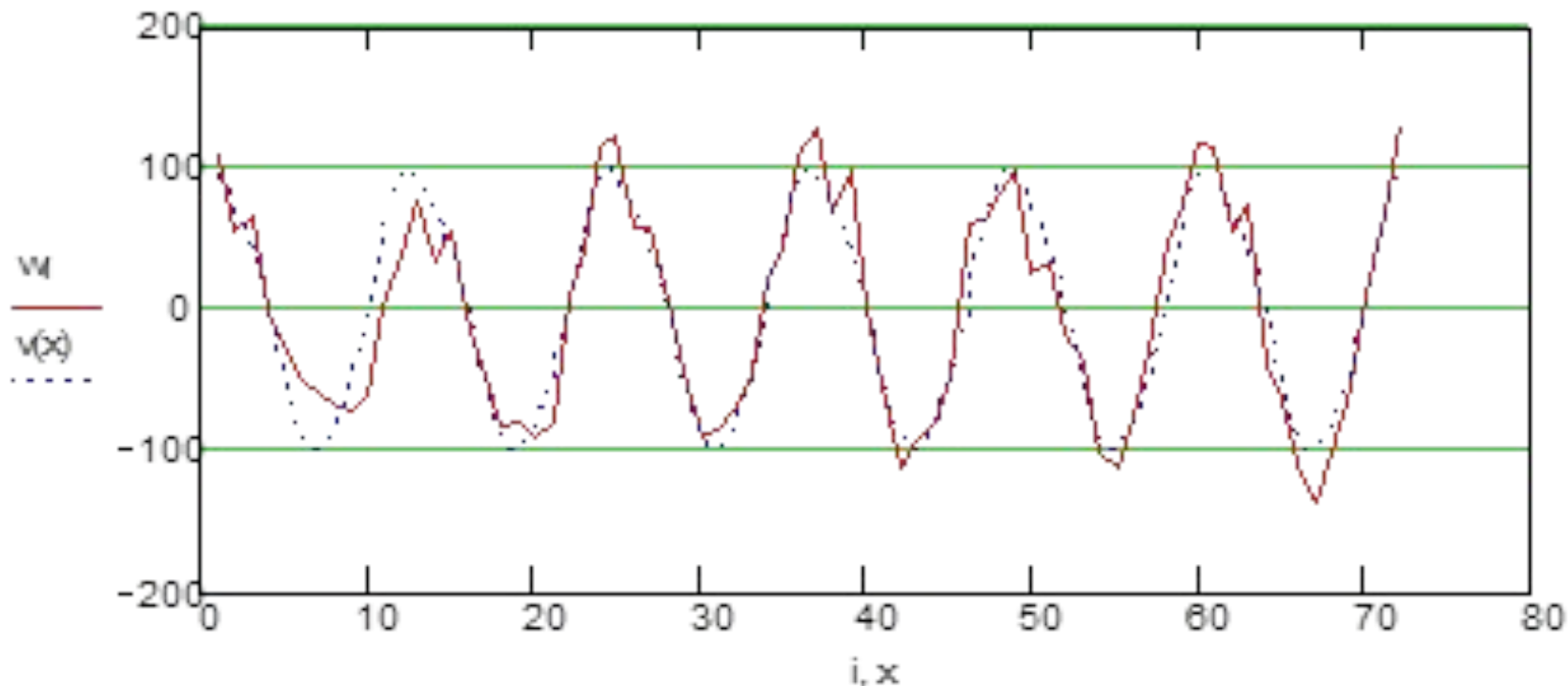
и прогнозного значения активной мощности методом линейной аппроксимации тренда:



Общая математическая модель нагрузки ЭЭС

12

После вычитания из $X(t)$ трендовой составляющей получается временной ряд, имеющий периодическую составляющую, которая вызвана суточными, недельными и сезонными периодами.



Временной ряд без трендовой составляющей



Если имеется N результатов наблюдений за период T ($N = 12$ в годовом цикле, $N = 7$ – в недельном и $N = 24$ – в суточном), то периодическая модель процесса может быть представлена рядом Фурье

$$S(t) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos 2\pi f_1 kt + b_k \sin 2\pi f_1 kt),$$

где n – количество частот, включенных в модель, а $f_1 = \frac{1}{N}$

- основная частота гармонического ряда.

- Коэффициенты полигармонического ряда $a(k)$ и $b(k)$ находятся известными методами спектрального анализа.

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{\pi n x}{T} dx & n = 0, 1, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{\pi n x}{T} dx & n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\}$$



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

14

$f_1 = \frac{1}{N}$ - основная частота гармонического ряда.

Коэффициенты полигармонического ряда $a(k)$ и $b(k)$ находятся известными методами спектрального анализа.

В общем случае наивысшая частота гармонического разложения дискретного ряда, называемая частотой Найквиста, определяется половиной интервала между наблюдениями, в случае годового статистического ряда $N = 12$, $n = 24$.

Дисперсия, учитываемая i -й гармоникой:

$$D_i = \frac{a_i^2 + b_i^2}{2}$$

Суммарная дисперсия:

$$D_{\Sigma} = \sum_i D_i$$

Как правило, первые три гармоники описывают до 90 % всей дисперсии.



Рынок электроэнергии:

- обеспечивает краткосрочную надежность и экономическую эффективность
- формирует наиболее эффективную загрузку существующего ресурса генерации
- обеспечивает реализуемость электрических режимов
- дает ценовые сигналы для энергоэффективного потребления

Рынок мощности:

- обеспечивает долгосрочную надежность – предупреждает дефицит генерации
- формирует эффективную структуру генерации (с наименьшими совокупными затратами)
- дает ценовые сигналы для развития потребления в регионах в зависимости от достаточности и стоимости строительства генерации

Рынок системных услуг:

- обеспечивает поддержание дополнительных технологических свойств и элементов оборудования, необходимых для системной надежности

РЫНОК ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Свободные двусторонние договоры (СДД)

Договоры купли/продажи электроэнергии между поставщиком и покупателем, условия которых, включая цены, определяются по соглашению сторон

Рынок на сутки вперед (РСВ)

Система отношений в рамках ценовых зон оптового рынка электроэнергии между участниками оптового рынка и ФСК, связанная с поставкой/потреблением электроэнергии в объемах, определенных по результатам конкурентного отбора ценовых заявок на сутки вперед

Балансирующий рынок (БР)

Сфера обращения отклонений от плановых объемов поставки электроэнергии, определенных в результате конкурентного отбора ценовых заявок для балансирования системы и (или) определенных по факту производства/потребления электрической энергии на основе данных коммерческого учета



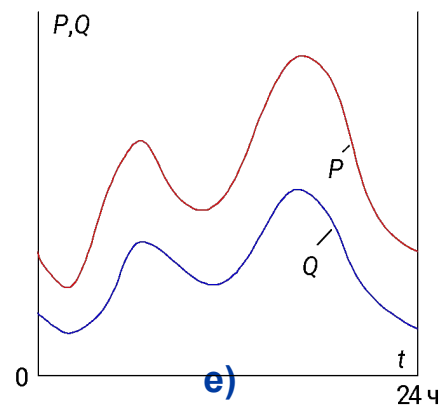
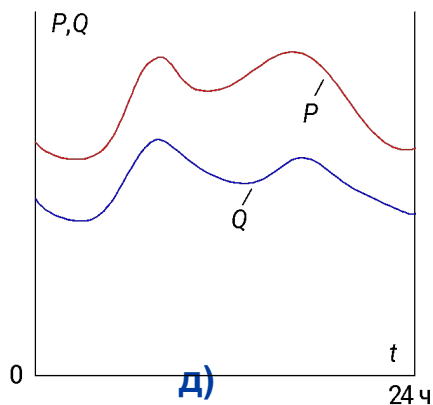
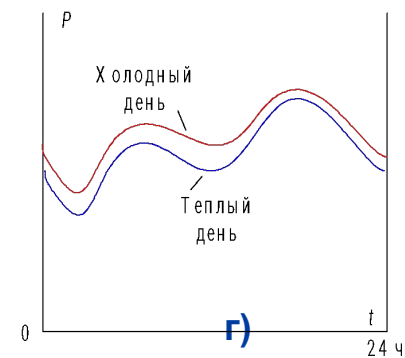
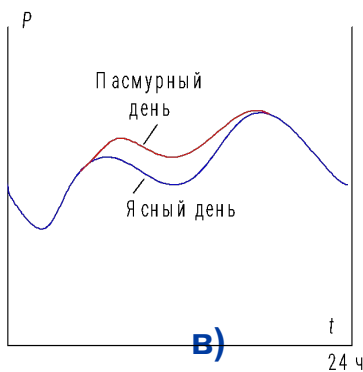
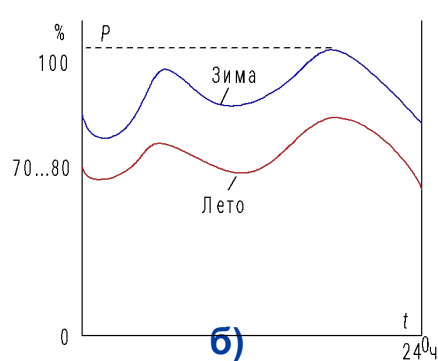
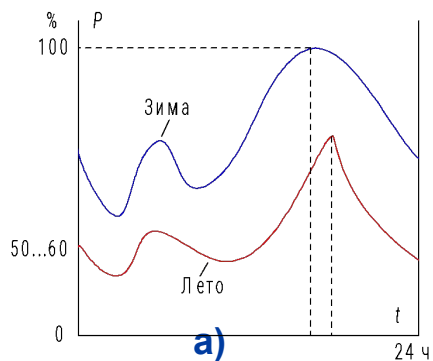
**Прогнозирование электропотребления
для оптового рынка электроэнергии
«на сутки вперед» РСВ
(краткосрочное прогнозирование)**



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

18

Типовые (характерные) суточные графики электропотребления:



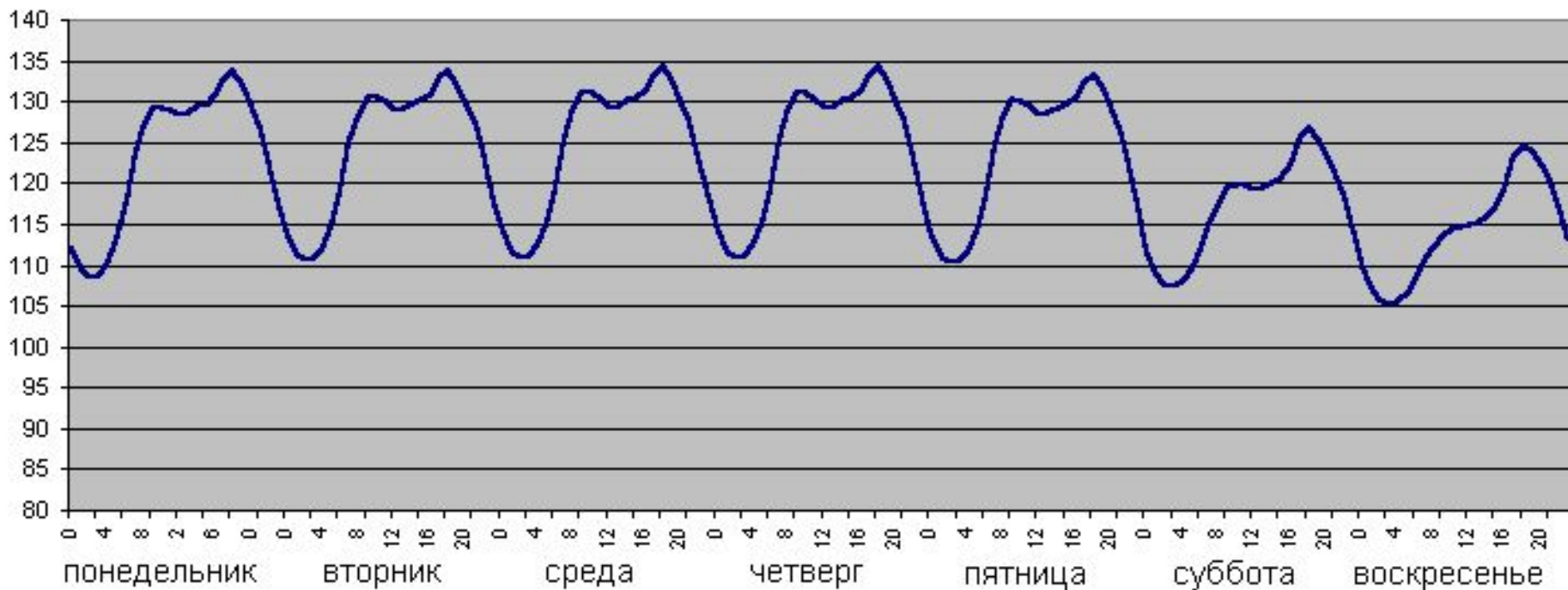


Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

19

Прогноз почасового потребления электроэнергии по ЕЭС

тыс.МВт



Недельный график мощности нагрузки ЕЭС РФ



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

20

Для суточных графиков нагрузки различают следующие показатели:

- ✓ максимум активной и реактивной нагрузок P_{\max} и Q_{\max} ;
- ✓ коэффициент мощности максимума нагрузки $\cos \varphi_{\max}$;
- ✓ коэффициент неравномерности графика $K_n = P_{\max} / P_{\min}$;
- ✓ суточный расход активной и реактивной энергии $W_{a.сут}$ и $W_{p.сут}$;
- ✓ средневзвешенный за сутки коэффициент реактивной мощности

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{сут}} = \frac{W_{p.сут}}{W_{a.сут}}$$

- ✓ коэффициенты заполнения суточного графика активной и реактивной энергии

$$\beta_a = \frac{W_{a.сут}}{24 P_{\max}}, \quad \beta_p = \frac{W_{p.сут}}{24 Q_{\max}}$$

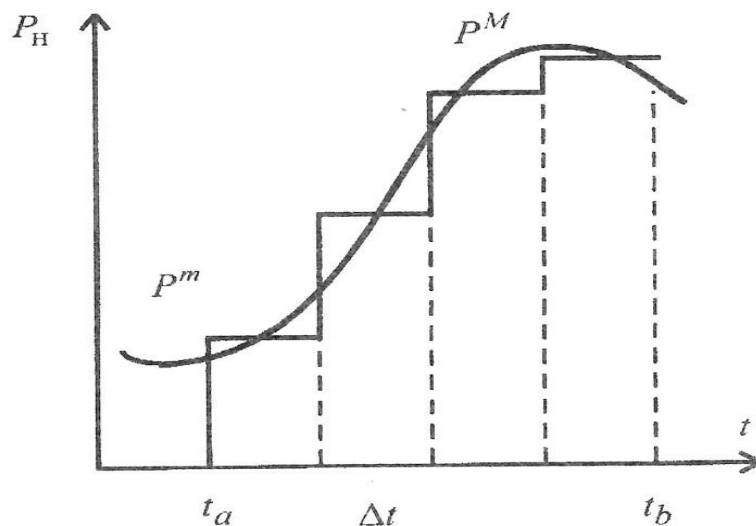
Эти показатели отображают конфигурацию графика потребления. Предполагают, что для однотипных дней они являются условно постоянными.



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

21

Задача планирования режимов и, в частности, задача расчета установившегося режима энергосистемы начинается с прогнозирования суточного графика электропотребления. При этом непрерывная кривая мощности $P_H(t)$ аппроксимируется кусочно-линейно с временным шагом дискретности Δt :



В отечественной практике $\Delta t = 1$ час, хотя в зарубежных энергосистемах рассматриваются шаги дискретности 30 и 15 мин. На рисунке выделен только интервал текущих суток $t_a - t_b$

Тем самым интегрирование заменяется суммирование часовых расходов энергоносителей - топлива, воды и т.д.



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

22

Применение календарного метода, в котором для прогноза используются данные суточных графиков предыдущих однотипных дней по отношению у дате прогноза, не всегда обеспечивает удовлетворительные результаты. Уточнением и развитием календарного метода является *модель сезонных кривых*





Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

23

Другая модель прогнозирования потребления, также учитывающая предположение о стабильности приведенных на слайдах 15 - 17 характерных конфигураций и величин для каждой типичных суток года, основана на явной недельной периодичности потребления электроэнергии $\mathcal{E}^{(i)}$, $i = 1 \dots 52$.

Для понедельного потребления электроэнергии $\mathcal{E}_{\phi}^{(i)}$, ($i = 1 \dots N$) с учетом линейного тренда запишем

$$\mathcal{E}^{(i)} = a + b \cdot i + c \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{52} \cdot i + \gamma \right), \quad \gamma = \frac{2\pi}{52} \cdot n, \quad i = \overline{1, N},$$

Здесь годовой цикл разбит на 52 недели, a , b , c – параметры аппроксимации кривой регрессии (тренда), определяемые методом наименьших квадратов, n – количество недель, предшествующих началу ретроспективных данных $\mathcal{E}_{\phi}^{(i)}$ ($i = 1 \dots N$) по отношению к первой неделе периода наблюдений.

Для определения параметров a , b , c минимизируется функция

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{E}^{(i)} - \mathcal{E}_{\phi}^{(i)} \right)^2,$$

куда подставляются выражения для $\mathcal{E}^{(i)}$ и соответствующие значения $\mathcal{E}_{\phi}^{(i)}$



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

24

Дифференцируя полученную функцию по a , b , c , приравнявая производные нулю, и решая систему уравнений, находим искомые параметры уравнения регрессии $W_{\phi}^{(is)}$. Затем рассчитываются величины потребления электроэнергии на ближайшие недели, например,

$\mathcal{E}_{\phi}^{(N+1)}$, $\mathcal{E}_{\phi}^{(N+2)}$ Обычно их рассчитывают на весь текущий месяц

Далее осуществляется прогнозирование суточного энергопотребления и почасовых значений мощности. Пусть имеется некоторая i -я неделя со своей статистикой фактических суточных потреблений $W_{\phi}^{(is)}$, где i – номер недели, s – номер суток в неделе. Нетрудно вычислить долю суточного потребления в рассматриваемой неделе:

$$\frac{W_{\phi}^{(is)}}{\mathcal{E}_{\phi}^{(i)}} = \frac{W_{\phi}^{(is)}}{\sum_{s=1}^7 W_{\phi}^{(is)}}$$



Краткосрочное прогнозирование электропотребления в ЭЭС

25

Учитывая гипотезу, указанную на слайдах 15 - 17, далее полученная величина суточной электроэнергии потребления конфигурируется в соответствии с графиком типового (характерного) дня прогнозируемой недели. Данная процедура называется «вливание в график».



**Прогнозирование электропотребления для
балансирующего оптового рынка
электроэнергии БР
(оперативное планирование)**



Оперативное планирование электропотребления в ЭЭС

27

Все изменения уровня потребления, сетевые ограничения, состояние генерирующего оборудования невозможно спрогнозировать заранее с абсолютной точностью. При управлении режимом работы энергосистемы в реальном времени необходимо компенсировать возникающие отклонения от режима, запланированного сутки назад. Расчет и доведение до объектов управления графиков генерации при фактическом управлении ЭЭС в режиме реального времени реализуется в рамках балансирующего рынка.

В течение суток Системный оператор многократно проводит формирование прогнозов спроса (потребления), актуализацию расчетной модели с учетом изменившихся системных условий. На основании данной информации проводятся конкурентные отборы ценовых заявок поставщиков, обеспечивающие экономическую эффективность загрузки станций и требования к надежности. Критерием конкурентного отбора в реальном времени является минимизация стоимости поставки электроэнергии, а также меры, делающие невыгодными самовольные отклонения от плановых значений и стимулирующие выполнение команд СО по управлению режимом



Оперативное планирование электропотребления в ЭЭС

28

Учитывая природу формирования нагрузки потребителями в нормальных электрических режимах, а также случайный характер и относительно небольшую величину нерегулярных колебаний, для оперативного (только внутрисуточного!) прогноза предложен другой способ планирования электропотребления, не предполагающий выделения трендовой и периодических составляющих, т.е. **потребление рассматривается как нестационарный случайный процесс, который целесообразно представлять траекторией во времени наиболее вероятной величины со случайными флуктуациями.**

Для получения прогнозных значений нагрузок узлов на установленных интервалах упреждения используются следующие процедуры (формулы не приводятся вследствие их громоздкости):

- ✓ краткосрочный прогноз потреблений ЕЭС, ОЭС и ЭЭС (рассмотрен выше);
- ✓ оперативный прогноз нагрузок узлов и потребления ЕЭС, ОЭС и ЭЭС;
- ✓ «скользящий» прогноз нагрузок узлов и потребления ЕЭС, ОЭС и ЭЭС.



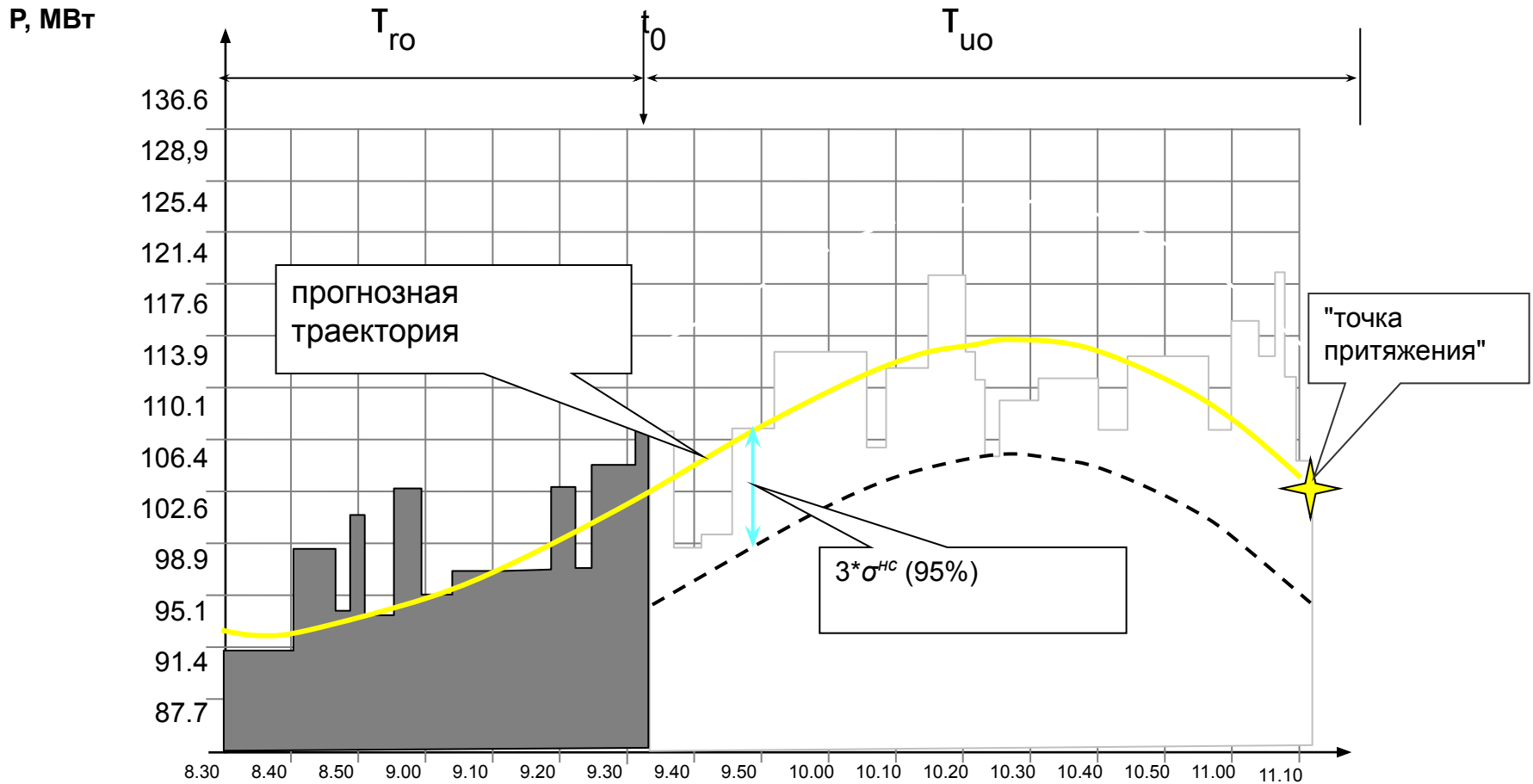
Оперативное планирование электропотребления в ЭЭС

При этом задача оперативного прогноза нагрузок решается методом аппроксимации значений нагрузки на интервале моделирования T_{mo} нелинейной аддитивной функцией с учетом данных краткосрочного прогноза. Интервал моделирования T_{mo} включает в себя интервал ретроспективных данных T_{ro} и интервал упреждения оперативного прогноза T_{uo} . Учет текущих данных в суточном разрезе позволяет также уточнить краткосрочный (суточный!) прогноз и, как следствие, улучшить оперативный прогноз.

Для определения параметров прогнозной модели в момент времени t_0 используются фактические значения нагрузки текущего ретроспективного интервала T_{ro} , а также часовые значения краткосрочного прогноза нагрузки на интервале упреждения T_{uo} . Ожидаемое значение нагрузки, взятое из результатов краткосрочного прогноза нагрузки, назовем “точкой притяжения”.



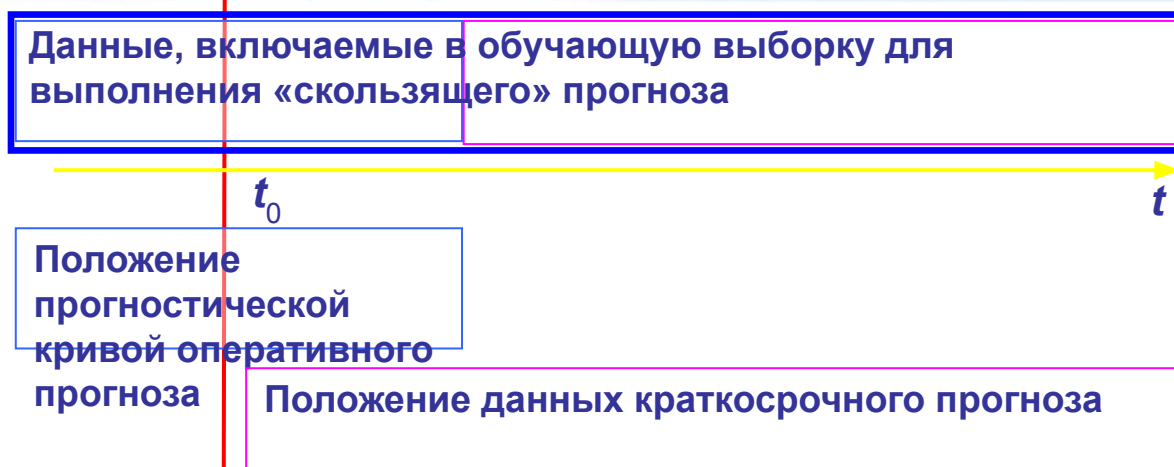
Оперативный прогноз нагрузки



В качестве меры точности восстановления траектории изменения нагрузки принимают статистические характеристики и закон распределения полученной нерегулярной составляющей.



«Скользящий» прогноз для нужд БР



Учет ретроспективных данных за прошедшие сутки от t_0 позволяет уточнить текущее значение «точки притяжения». Для этого применяется метод скользящих суток - циклическая аппроксимация значений нагрузки на суточном интервале ретроспективы относительно текущего момента времени t_0 . В качестве модели нагрузки на суточном интервале t_0 используется так же разложение в ряд Фурье.

Метод скользящих суток обеспечивает расчет «точек притяжения» и коррекцию краткосрочного прогноза с использованием текущей информации о поведении нагрузки на суточном интервале.



Математические модели комплексной оптимизации режимов электроэнергетических систем



Постановка задачи оптимизации режима ЭЭС

33

Под задачей оптимизации текущего режима энергосистемы или энергообъединения понимают наивыгоднейшее распределение генерируемых активных и реактивных мощностей между электростанциями, а также другими регулируемыми источниками реактивной мощности – синхронными компенсаторами, управляемыми шунтирующими реакторами, устройствами *FACTS*, которому отвечает минимум эксплуатационных издержек I на производство, передачу и распределение электрической и тепловой энергии в топливном (сегодня чаще в стоимостном) выражениях:

$$I(\mathbf{Z}) = \min. \quad (3-1)$$

Целевая функция I зависит от вектора переменных \mathbf{Z} , включающего в себя всю совокупность параметров режима.

В зависимости от принятой математической модели оптимизации, определяемой, как отмечалось выше, частичной задачей оптимизации и допущениями при составлении модели, в состав \mathbf{Z} могут входить активные и реактивные мощности электростанций $P_s + jQ_s$, коэффициенты трансформации (в общем случае комплексные) $k_t' + jk_t''$, модули напряжений U_i в некоторых или во всех узлах расчетной схемы, а при необходимости и другие параметры режима и оборудования. _____



В общем случае задача распределения нагрузки сложна, что определяется большими масштабами энергетики, большим различием технических, экономических и режимных характеристик отдельных элементов ЭЭС, влиянием энергетики на другие отрасли народного хозяйства.

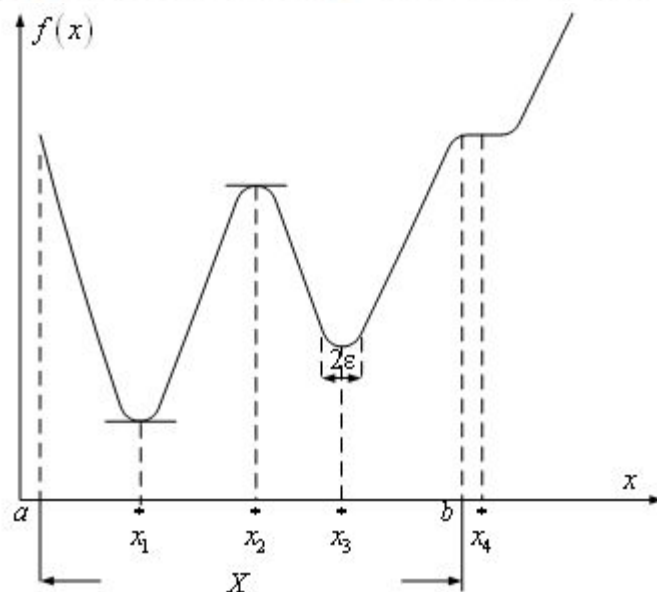
Для создания практических методов расчета производится декомпозиция общей задачи на ряд более простых и взаимосвязанных подзадач с помощью рассмотренной нами ситуативной и временной иерархии, а также иерархии по уровням в пространстве (между объединениями ЕС РАО, энергосистемами, между станциями РЭС, агрегатами электростанций).

Рассмотрим математическую основу одного из многочисленных методов нахождения экстремума целевой функции одной и нескольких переменных



Безусловный экстремум

Рассмотрим задачу минимизации функции одной переменной $f(x)$. Считаем, что указанная функция является непрерывной (гладкой) и нелинейной. Графическое изображение $f(x)$ представлено на рис.



На рассматриваемом отрезке $a \leq X \leq b$ функция имеет два минимума (x_1, x_3) и один максимум (x_2) . Все точки (x_1, x_2, x_3) , в которых функция достигает минимума или максимума, называются *точками экстремума*. Множество точек минимума представляют *точки локального минимума*. Среди локальных минимумов на заданном множестве X существует *глобальный* $f(x_1)$.



Безусловный экстремум

Точка x^* называется точкой *глобального минимума* функции $f(x)$ на множестве X , если для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x^*) < f(x), \tag{5.1}$$

т.е. значение функции $f(x)$ в точке x^* меньше всех прочих значений функции при изменении аргумента x из заданного интервала X .

Точка x^* является точкой *локального минимума* функции $f(x)$, если при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ для всех $x \neq x^*$ и удовлетворяющих условию $|x - x^*| \leq \varepsilon$, выполняется неравенство

$$f(x^*) < f(x). \tag{5.2}$$

Необходимым условием локального экстремума функции одной переменной является

$$\frac{df}{dx} = 0, \tag{5.3}$$

т.е. тангенс угла наклона касательной к функции в точках экстремумов равен нулю (касательная параллельна оси x). Легко видеть (рис. 5.1), что условию (5.3) удовлетворяют точки x_1^* , x_2^* , x_3^* , x_4^* . При этом точка x_4^* является точкой перегиба и не соответствует ни минимуму, ни максимуму функции.



Достаточным условием локального минимума функции $f(x)$ является положительность второй производной в стационарной точке x^*

$$\frac{d^2 f}{dx^2} > 0, \text{ при } x = x^* \quad (5.4)$$

Для локального максимума вторая производная должна быть отрицательной.

Приравнивая первую производную от функции $f(x)$ к нулю, получаем уравнение

$$f'(x) = 0, \quad (5.6)$$

решение которого и дает всю совокупность x^* , отвечающих точкам экстремумов.



Рассмотрим задачу безусловной оптимизации функции $f(x)$ многих переменных. Считаем, что функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.10)$$

непрерывна, а переменные не зависят друг от друга. В этих случаях максимумы и минимумы называют *абсолютными* или *безусловными*. Необходимым условием абсолютного локального экстремума функции (5.10) является равенство нулю всех частных производных при $x = x^*$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.11)$$

Для исследования характера стационарной точки x^* необходимо сформировать матрицу вторых производных

$$f''(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$



Согласно критерию Сильвестра, достаточным условием положительной определенности матрицы A является выполнение цепочки n неравенств:

$$\Delta_{11} = a_{11} > 0; \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots; \Delta_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad (5.14)$$

в которой Δ_{ii} по существу являются диагональными определителями матрицы A .

Для существования локального максимума все нечетные определители цепочки (5.14) должны быть отрицательны, а четные определители – положительны.



Относительный экстремум и методы его нахождения

40

Даны:

целевая функция, зависящая от n переменных

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (5.15)$$

уравнения ограничения в форме равенств, зависящие от тех же переменных

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < n. \quad (5.17)$$

Требуется найти значения переменных X , при которых целевая функция достигает экстремальных величин, и одновременно выполняются условия ограничения (5.17).

Число условий ограничения (5.17), равное m , должно быть меньше числа переменных n . Разность $n - m$ определяет число степеней свободы, благодаря которым и можно оптимизировать целевые условия (5.16). Рассмотрим два способа решения задач указанного класса.



Относительный экстремум и методы его нахождения

Метод неопределенных множителей Лагранжа.

1. Составляется новая оптимизируемая функция $n + m$ переменных, называемая функцией Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \quad (5.22)$$

где $f(x)$ – исходная оптимизируемая функция вида (5.16),

λ_i – неопределенные множители Лагранжа,

$g_i(x)$ – уравнения ограничения, представленные в форме равенства нулю (5.17).

2. Используя условия экстремума функции многих переменных – равенство нулю частных производных по всем переменным X , λ получают систему $n + m$ алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.23)$$

3. Решается система (5.23) $n + m$ уравнений относительно n неизвестных вектора X и m неизвестных вектора λ .

Система (5.23) представляет собой необходимые условия первого порядка в задаче на относительный экстремум, а её решения x_1^*, \dots, x_n^* называются *условно-стационарными точками*.



Распределение активных мощностей между ТЭС с приближенным учетом потерь

42

Рассмотрим применение метода неопределенных множителей Лагранжа для часто встречающейся задачи распределения активных мощностей между ТЭС с приближенным учетом потерь в электрической сети.

Пусть имеется концентрированная тепловая энергосистема, в которой все станции работают на одну общую нагрузку. Сеть радиальная, напряжения в узлах станций известны и постоянны, распределение активных нагрузок не влияет на распределение реактивных.

Задача: найти наивыгоднейшее распределение нагрузки с учетом потерь активной мощности в сети.

Будем считать, что система имеет $i = 1, 2, \dots, n$ тепловых электростанций, для которых известны расходные характеристики $B_i(P_{Ti})$ и суммарная нагрузка P_n .

Уравнение цели $B = B_1(P_{T1}) + B_2(P_{T2}) + \dots + B_n(P_{Tn}) \Rightarrow \min$

Ограничения – балансовые уравнения мощности

$$\sum_i P_{Ti} - P_n - \pi = 0, \text{ где } \pi \text{ – сумм. мощности акт. потерь.}$$

Распределение активных мощностей между ТЭС с приближенным учетом потерь

Функция Лагранжа

$$\Phi = B_1(P_{T1}) + B_2(P_{T2}) + \dots + B_n(P_{Tn}) + \lambda \left(\sum_i P_{Ti} - P_H - \pi \right)$$

Т.к. выражение в скобках = 0, то минимум функции Лагранжа и ЦФ совпадают.

Дифференцируем и приравниваем нулю частные производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial P_{T1}} &= \frac{\partial B_1}{\partial P_{T1}} + \lambda \left(1 - \frac{\partial \pi}{\partial P_{T1}} \right) = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial P_{Tn}} &= \frac{\partial B_n}{\partial P_{Tn}} + \lambda \left(1 - \frac{\partial \pi}{\partial P_{Tn}} \right) = 0 \end{aligned} \right\},$$

откуда
$$\frac{\frac{\partial B_1}{\partial P_{T1}}}{1 - \frac{\partial \pi}{\partial P_{T1}}} = \dots = \frac{\frac{\partial B_n}{\partial P_{Tn}}}{1 - \frac{\partial \pi}{\partial P_{Tn}}}$$

Распределение активных мощностей между ТЭС с приближенным учетом потерь

Выясним физический смысл условия (1). Для этого запишем его в конечных разностях и умножим числитель и знаменатель на ΔP_T ,

$$\text{т.е. } \frac{\frac{\Delta B}{\Delta P_T} \cdot \Delta P_T}{\left(1 - \frac{\Delta \pi}{\Delta P_T}\right) \cdot \Delta P_T} = \frac{\Delta B}{\Delta P_T - \Delta \pi} = \frac{\Delta B}{\Delta P_H} = \text{idem}.$$

Из этого следует, что при наивыгоднейшем распределении нагрузки прирост расхода топлива ΔB на прирост активной мощности ΔP_H у потребителя должен быть одинаковым для всех электростанций.

Чтобы учесть потери мощности в сети даже для простой схемы, нужно решить систему уравнений установившегося режима. Для реальных систем, имеющих замкнутые контуры, большое число узлов такая задача сложна, зачастую сложнее задачи распределения нагрузки. **В то же время потери мощности в электрической сети зависят не только от активных мощностей электростанций, но и от перетоков реактивной мощности и величин коэффициентов трансформации трансформаторов.**



Распределение активных мощностей между ТЭС с приближенным учетом потерь

45

Введем обозначения $b_i = \frac{\partial B_i}{\partial P_{Ti}}$ – относительный прирост расхода топлива электростанций, который показывает, как изменится расход топлива i -й станции, если ее нагрузка изменится на величину ∂P_{Ti} ;

$\sigma_i = \frac{\partial \pi}{\partial P_{Ti}}$ – относительный прирост потерь активной мощности в сетях, т.е. величина, показывающая, насколько изменятся потери в сетях, если мощность только i -й станции изменится на ∂P_{Ti} .

Применяя эти обозначения, получаем условия наивыгоднейшего

распределения нагрузки
$$\mu = \frac{b_i}{1 - \sigma_i} = \text{idem} . \quad (1)$$

При выполнении условия (1) минимум, а не максимум ЦФ обеспечивается, если вторые производные от расходных характеристик по мощности неотрицательны, т.е.

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial^2 P_{Ti}} \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial b_i}{\partial P_{Ti}} \geq 0$$

Это означает, что характеристики относительных приростов электростанций должны быть монотонно возрастающими.

Распределение активных мощностей между ТЭС с приближенным учетом потерь

46

— разрывы первого рода. На рис. 3-2 приведен примерный вид указанных зависимостей, когда I_s выражены в виде суммарного расхода B_s условного топлива на станции, а производная ε_s — в виде относительного прироста этого расхода.

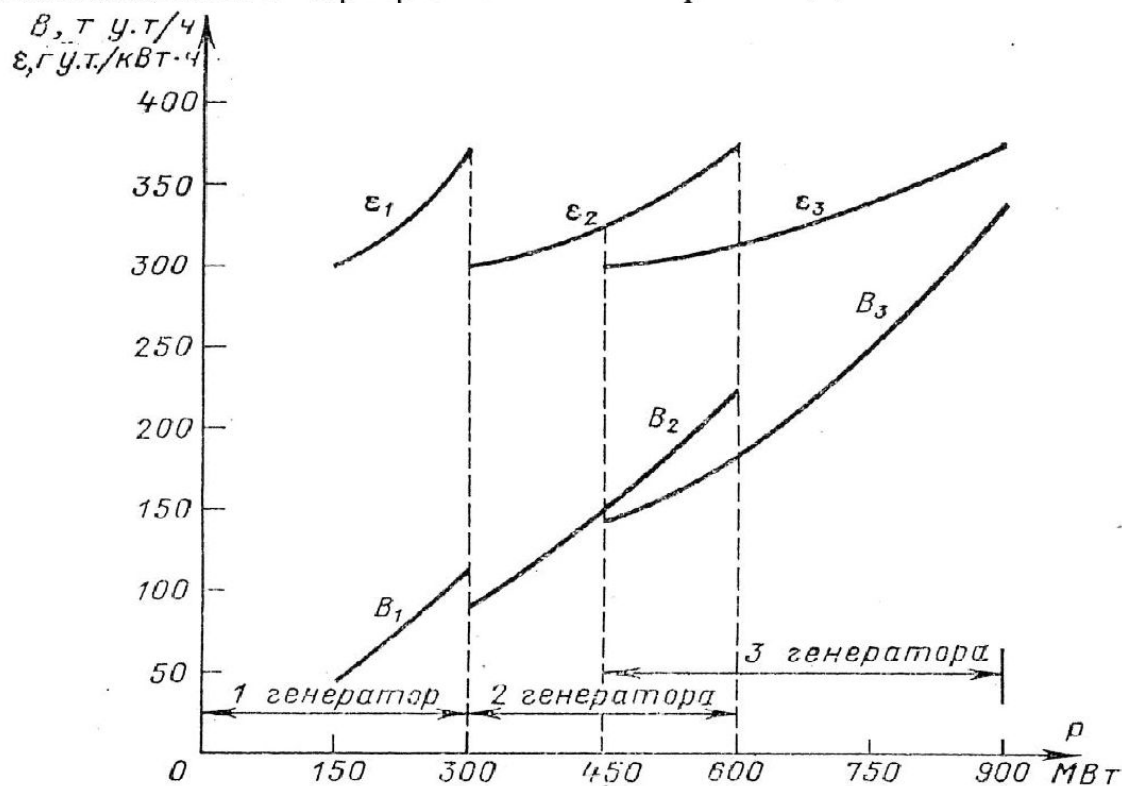


Рис. 3-2. Энергетические характеристики станции B — расход топлива; ε — относительный прирост расхода



В соответствии со сложившейся практикой принято считать, что издержки I явно зависят только от активных мощностей электростанций P_s , причем функцию I можно представить в виде

$$I = \sum_{s=1}^S I_s(P_s), \quad (3-2)$$

где I_s — эксплуатационные издержки каждой s -й электростанции. Зависимость I от остальных составляющих вектора Z неявная. Она определяется принятой математической моделью установившегося режима, поскольку величины P_s зависят от остальных параметров режима Q_s, U_i, k_t и т. д. Необходимо заметить, что именно

Функция I не является гладкой: в точках изменения состава работающего оборудования I_s , как правило, имеют изломы, а также небольшие скачки, которыми обычно пренебрегают, а характеристики относительных приростов

$$\varepsilon_s = dI_s/dP_s$$



Постановка задачи комплексной оптимизации режимов ЭЭС

48

Составляющие вектора \mathbf{Z} связаны между собой рядом конкретных условий, накладываемых свойствами электрической сети, техническими характеристиками и условиями надежной работы оборудования. Сюда относятся обеспечение баланса мощностей, ограничение напряжений в узлах, ограничение тока и передаваемой мощности по линиям электропередачи, допустимость режимов по устойчивости параллельной работы электростанций, ограничение мощности электростанций по характеристикам оборудования и т. п.

Эти ограничения представляются:

а) в виде равенств

$$\omega_j(\mathbf{Z}) = 0; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3-3)$$

Обычно эти равенства представляют собой уравнения установившегося режима в форме, отвечающей принятым допущениям.

Могут использоваться также и другие связи между режимными параметрами;

б) в виде неравенств

$$v_{k \min}(\mathbf{Z}) \leq v_k(\mathbf{Z}) \leq v_{k \max}(\mathbf{Z}); \quad k = \overline{1, K}, \quad (3-4)$$

которые для некоторых величин могут иметь наиболее простой вид:

$$z_{k \min} \leq z_k \leq z_{k \max}. \quad (3-5)$$



Постановка задачи комплексной оптимизации режимов ЭЭС

50

Ограничения в форме неравенств обычно определяют допустимый диапазон изменения параметров режима или оборудования, например:

$$k_{t \min} \leq k_t \leq k_{t \max},$$
$$Q_{s \min}(P_s, U_s) \leq Q_s \leq Q_{s \max}(P_s, U_s)$$

и т. д.

В такой общей постановке задача (3-1) — (3-5) является многоэкстремальной задачей нелинейного математического программирования и для произвольного вида функций $I(\mathbf{Z})$, $\omega_j(\mathbf{Z})$, $v_k(\mathbf{Z})$ строгие методы ее решения не разработаны. Однако для ряда конкретных представлений указанных функций найдены достаточно эффективные, правда, не всегда строгие, методы решения, которые и будут рассмотрены ниже.

Число составляющих вектора \mathbf{Z} , равное

$$N = 2S + T + n + \dots,$$

обязательно должно быть больше числа ограничений m в форме равенств*. Избыток числа переменных над числом ограничений означает, что оптимизируемая система имеет $[N - m]$ степеней свободы, чем и обусловлена возможность существования множества режимов, удовлетворяющих ограничениям (3-4), среди которых ищется наиболее экономичный. В противном случае ($N \leq m$) оптимизация становится невозможной.



Метод неопределенных множителей Лагранжа без дополнительных «ухищрений» не позволяет учитывать разрывность производных целевой функции, ограничения в виде неравенств и т.п. Поэтому в последнее время в связи с возможностями современной вычислительной техники используют разнообразные методы комплексной оптимизации режима ЭЭС. Укажем основные применяемые варианты реализации этих методов:

1. Формы записи уравнений установившихся режимов – уравнения узловых напряжений в виде а) балансов токов или б) балансов мощностей.
2. Способы учета ограничений (разрывных, неравенств, дискретных) – а) мониторинг с фиксацией ограничений (если это необходимо) или б) метод штрафных функций.
3. Методы определения экстремума целевой функции:
 - а) метод Лагранжа с введением дополнительных переменных (заметно увеличивает трудоемкость расчета);
 - б) метод приведенного градиента с масштабированием зависимых переменных;
 - в) метод наискорейшего спуска.



Общее доказательство сходимости итерационной процедуры к экстремуму для целевой функции и ограничений произвольного вида отсутствует, однако в результате исследований, выполненных в СССР под руководством В. М. Горнштейна и Л. А. Крумма, разработаны алгоритмы оптимизации текущего режима градиентным методом, позволяющие практически всегда получить решение.

Напомним, что градиентом скалярной функции точки $I(\mathbf{V})$ называется вектор, приложенный в точке $\mathbf{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_{N-m}\}$, имеющий направление нормали к поверхности уровня функции в данной точке в сторону возрастания I . Направление вектора градиента определяется его составляющими

$$\left\{ \frac{\partial I}{\partial v_1}, \frac{\partial I}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial I}{\partial v_{N-m}} \right\}.$$

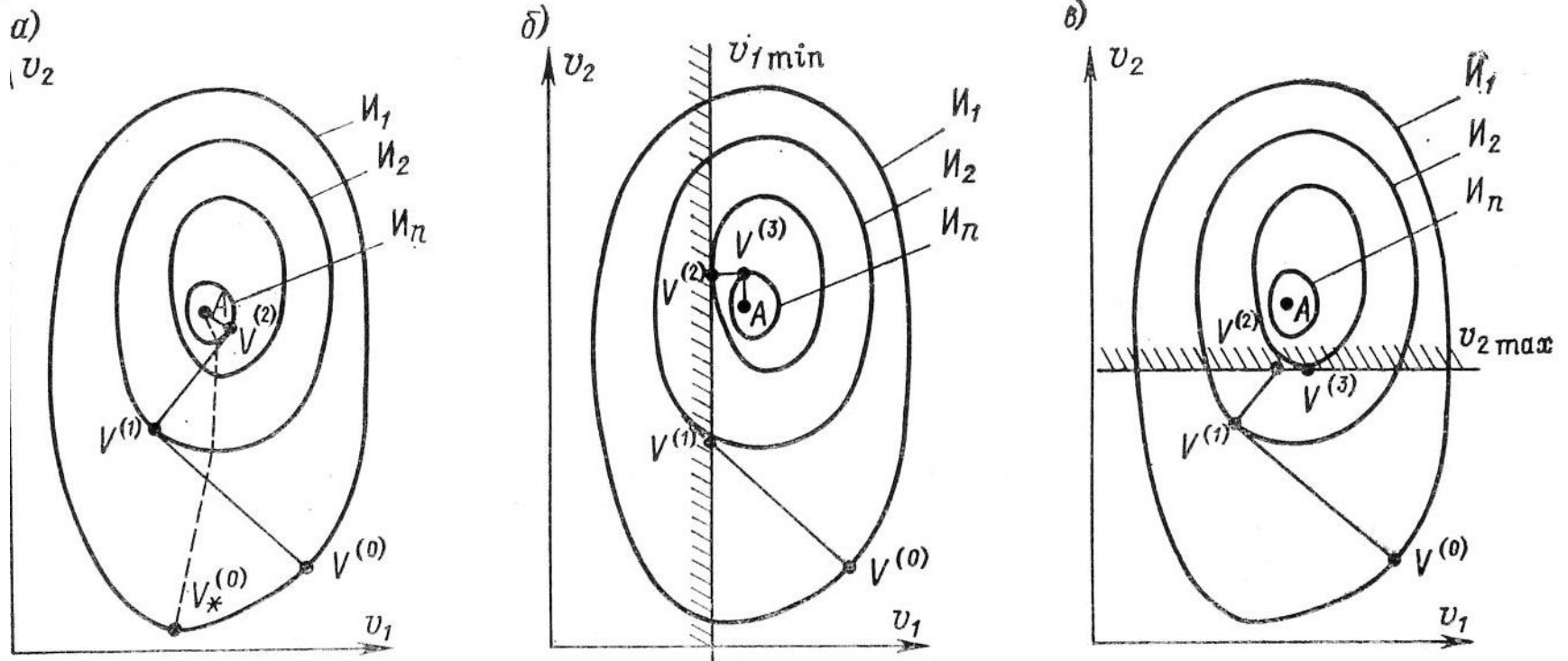


Рис. 3-4. Траектории оптимизации по градиентному методу: *а* — без ограничений; *б, в* — при наличии ограничений; ($I_1 > I_2 > \dots > I_n$)

Критерием окончания итерационного процесса может служить соотношение

$$|I^{(k+1)} - I^{(k)}| < \xi. \quad (3-30)$$



Пусть задано или найдено значение вектора независимых переменных на k -м шаге $\mathbf{V}^{(k)}$. Тогда значение вектора $\mathbf{V}^{(k+1)}$ на $(k+1)$ -м шаге определится следующей процедурой: 1) рассчитывается установившийся режим энергосистемы при заданном значении $\mathbf{V}^{(k)}$; 2) вычисляются составляющие градиента $\frac{\partial \Pi}{\partial v_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial v_{N-m}}$ при $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(k)}$ с учетом ограничений на составляющие вектора \mathbf{V} ; 3) вычисляются новые приближения составляющих вектора независимых переменных

$$v_v^{(k+1)} = v_v^{(k)} - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial v_v} \right)_{\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(k)}} \cdot h, \quad (3-29)$$

где h — шаг, способ выбора которого определяет характер оптимизационного процесса (см. ниже).

Далее расчет повторяется. Как видно, за счет разделения вектора переменных на \mathbf{X} и \mathbf{V} получается разделение задачи оптимизации с порядком $\mathbf{X} + \mathbf{V}$ на подзадачи с порядками \mathbf{X} — расчет режима и \mathbf{V} — шаг оптимизации, т. е. имеет место значительное снижение сложности решения по сравнению с решением по методу неопределенных множителей Лагранжа.



Интересно отметить, что в градиентном методе в расчете производных от потерь мощности и в расчете градиента участвует та же самая матрица Якоби, что и в расчете установившегося режима методом Ньютона. Поэтому градиентный метод получил наиболее широкое распространение.

Кроме того, имея возможность формировать в одной программе различные целевые функции, с помощью такой программы, например, ПК «Bars-Lincor», можно решать разнообразные задачи: эквивалентирование, утяжеление, расчет режима при неноминальной частоте, оптимизация режима по реактивной мощности, оптимизация режима по активной мощности (по ХОП, по ХОПС, по тарифам и по рыночным ценовым характеристикам), ввод режима в допустимую область и т.д. При этом изменяются только целевые функции, а вычислительная схема остается такой же самой.



Спасибо за внимание!