Общее уравнение кривой второго порядка

К кривым второго порядка относятся: ***эллипс***, частным случаем которого является ***окружность***, ***гипербола*** и ***парабола***.

Они задаются уравнением второй степени относительно *x* и *y*:

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

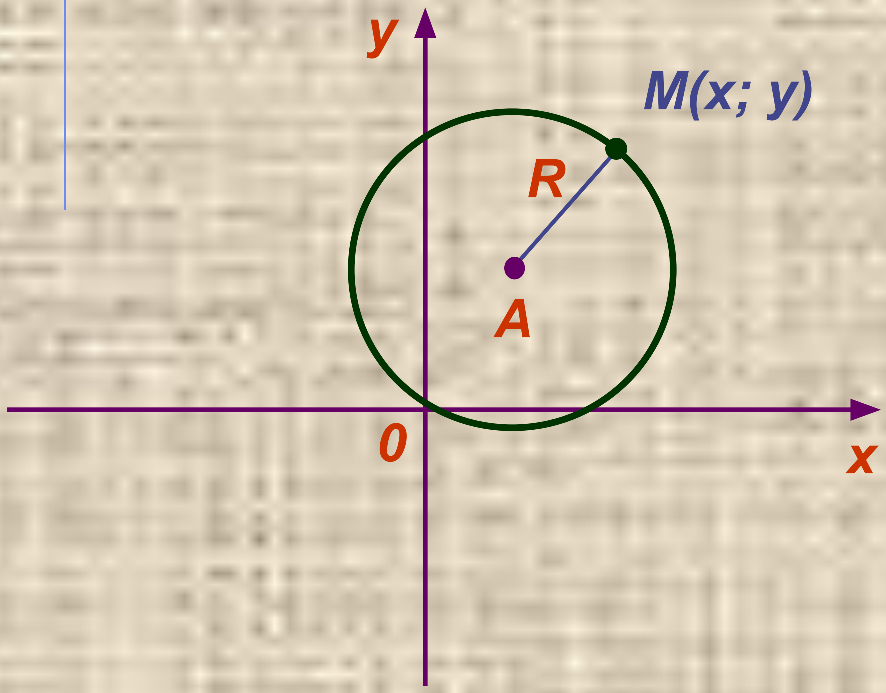
Общее уравнение кривой второго порядка

В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от точки ***A(a; b)*** на расстояние ***R***.

Для любой точки ***M*** справедливо:



$$\left|\overline{AM}\right| = R \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \quad \Rightarrow$$

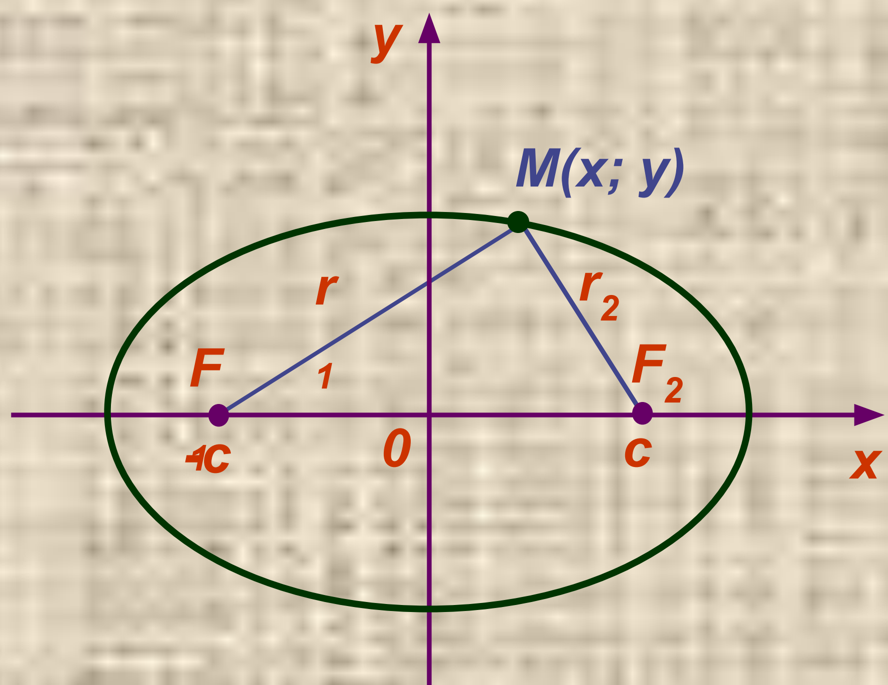
$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Каноническое уравнение окружности

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная **2a.**

Зададим систему координат и начало координат выберем в середине отрезка $[F_1 F_2]$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Эллипс

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+\cancel{y^2} \Rightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}-\cancel{x^2}-2xc-\cancel{c^2} \Rightarrow$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-xc\right)^2 \quad :4 \Rightarrow$$

$$a^2x^2-\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2=a^4-\cancel{2a^2xc}+x^2c^2 \Rightarrow$$

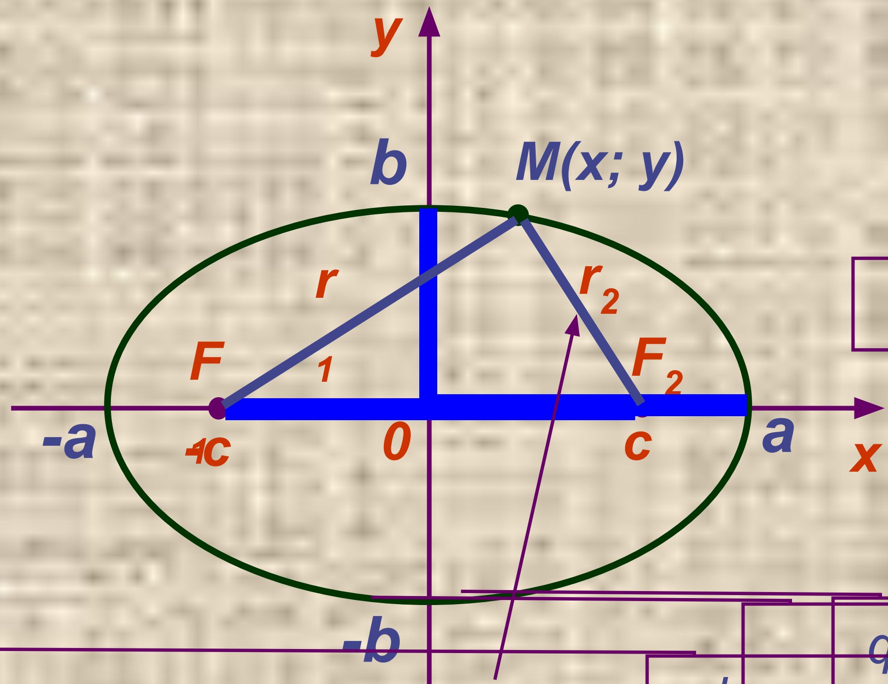
$$b^2$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad :(a^2b^2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Каноническое уравнение эллипса

Эллипс



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

малая полуось

$$|F_1F_2| = 2c$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

большая полуось

фокальное расстояние

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

фокальные радиусы точки М

$$r_1 = a + \varepsilon x; \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

эксцентриситет эллипса

Эксцентриситет характеризует форму эллипса (ε = 0 – окружность)

Для эллипса справедливы следующие неравенства:

$$a > c; \quad a > b; \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Пример

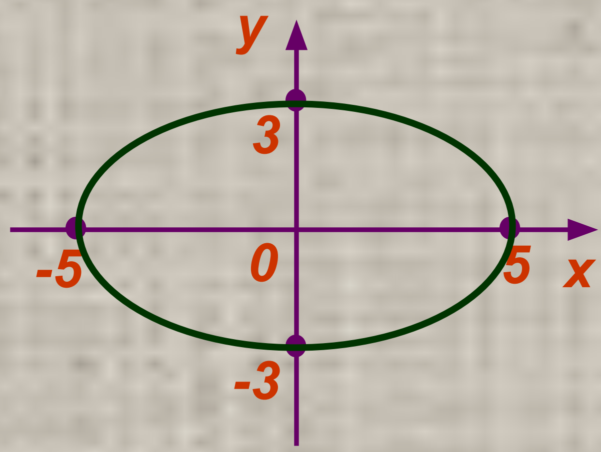
Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат в точках $F_1(-4;\ 0)$ $F_2(4;\ 0)$, а эксцентриситет равен 0,8.

$$c = 4 \qquad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{0.8} = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \qquad b = 3$$

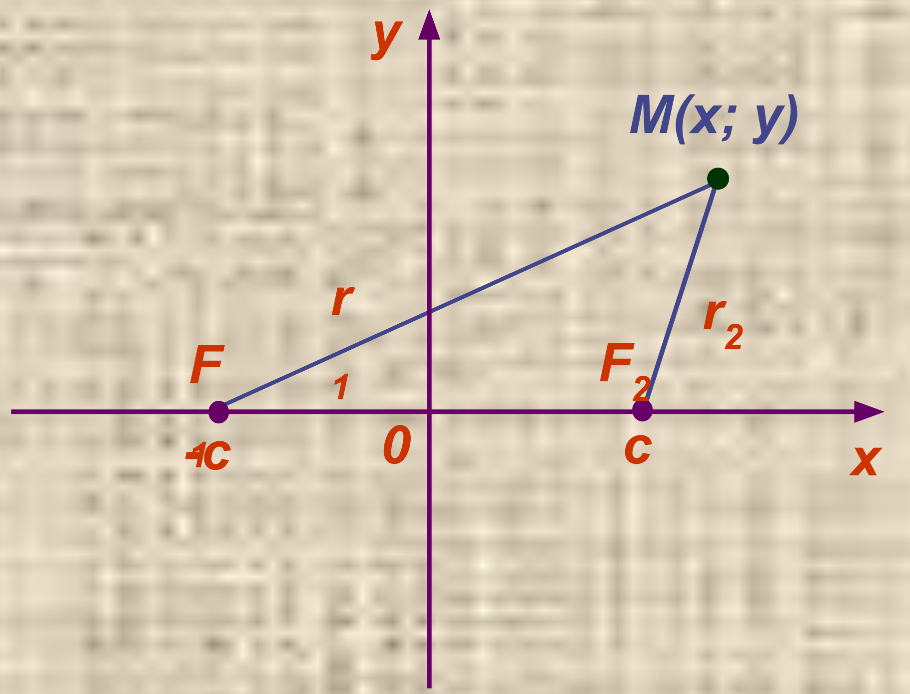
Каноническое уравнение эллипса:

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$$



Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная **2a.**



$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Гипербола

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

После тождественных преобразований уравнение примет вид:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \quad :(a^2b^2)$$

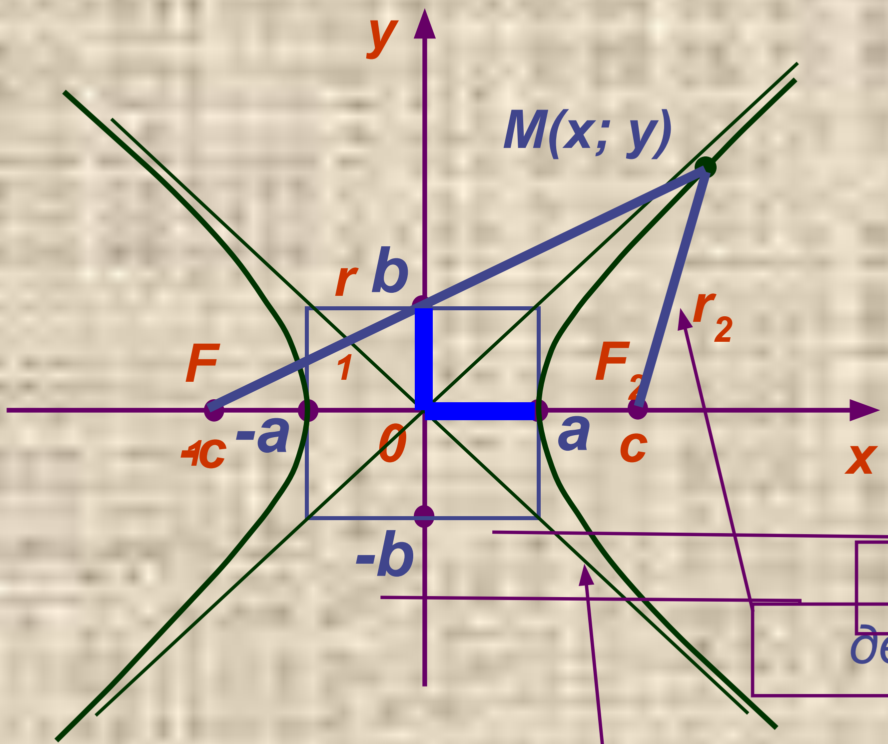
b^2

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Каноническое уравнение гиперболы

Гипербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

мнимая полуось

действительная полуось

фокальные радиусы точки М

Для гиперболы справедливо: $\varepsilon > 1$

эксцентриситет гиперболы

асимптоты гиперболы

Пример

Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку A(6; -4), если ее асимптоты заданы уравнениями:

$$y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 3b = \sqrt{6}a$$

Точка A лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{6^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2$$

Решим систему: $\begin{cases} 3b = \sqrt{6}a \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 24a^2 - 16a^2 = \frac{2}{3}a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Пример

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\boxed{\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1}$$