Алгебра предикатов

Определение.

Алгеброй предикатов называется множество всех предикатов ***P*** с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ и операциями квантификации $(\forall x), (\exists x)$ для всех предметных переменных x.

Формулы алгебры предикатов

Свойства алгебры предикатов ***P*** описываются с помощью специальных формул, которые строятся из символов предикатов и предметных переменных с помощью специальных вспомогательных символов – скобок и знаков логических операций над предикатами.

Алфавит алгебры предикатов состоит из следующих символов:

1) *предметные переменные* $x_1, x_2, \dots$, которые используются для обозначения элементов множества допустимых значений,

2) *n*-местные *предикатные символы* $P, Q, \dots$, которые используются для обозначения *n*-местных предикатов на множестве допустимых значений,

3) символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$,

4) вспомогательные символы (,) и другие.

Формулы алгебры предикатов определяются по индукции следующим образом:

1) для любого n-местного предикатного символа P и любых n предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$ выражение $P(x_1,\ldots,x_n)$ есть формула, которая называется *элементарной* (или *атомарной*) *формулой*;

2) если Φ,Ψ – формулы, то формулами являются также выражения

$$(\neg\Phi),\ (\Phi\wedge\Psi),\ (\Phi\vee\Psi),\ (\Phi\Rightarrow\Psi),\ (\Phi\Leftrightarrow\Psi);$$

3) если Φ – формула и x – предметная переменная, то формулами являются также выражения $(\forall x)\Phi$, $(\exists x)\Phi$; при этом переменная x и формула Φ называется *областью действия* соответствующего *квантора*.

Если в формулу Ф входят переменные $x_1,\dots,x_n$, то записывают $\Phi = \Phi(x_1,\dots,x_n)$.

Вхождение предметной переменной x в формулу Ф называется *связным*, если она находится в области действия одного из этих кванторов; в противном случае вхождение предметной переменной x в формулу Ф называется *свободным*.

Формула без свободных вхождений переменных называется *замкнутой формулой* или *предложением*.

Интерпретации формул алгебры предикатов

Область интерпретации – непустое множество M, которое является областью возможных значений всех предметных переменных.

n-местным предикатным символам P присваиваются конкретные значения P_M n-местных предикатов на множестве M.

Соответствие β: $P \to P_M$ называется *интерпретацией предикатных символов*.

Область интерпретации M вместе с интерпретацией предикатных символов β называется *интерпретацией формул алгебры предикатов* и обозначается (M, β) или просто M.

При наличии интерпретации M конкретные значения предметным переменным формул алгебры предикатов присваиваются с помощью отображения α множества всех предметных переменных X в область интерпретации M.

Такие отображения называются *оценками* предметных переменных.

Выполнимость формулы Φ в интерпретации M при оценке α обозначается $M \models_\alpha \Phi$ и определяется следующим образом:

1) если $\Phi = P(x_1,\dots,x_n)$ для n-местного предикатного символа P и предметных переменных $x_1,\dots,x_n$, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда высказывание $P_M(\alpha(x_1),\dots,\alpha(x_n))$ истинно;

2) если $\Phi = \neg\Psi$ для формулы Ψ, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда неверно, что $M \models_\alpha \Psi$;

3) если $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_\alpha \Phi_1$ и $M \models_\alpha \Phi_2$;

4) если $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_\alpha \Phi_1$ или $M \models_\alpha \Phi_2$;

5) если $\Phi = \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда неверно, что $M \models_\alpha \Phi_1$ и $M \models_\alpha \neg\Phi_2$;

6) если $\Phi = \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_\alpha \Phi_1$, $M \models_\alpha \Phi_2$ одновременно верны или нет;

7) если $\Phi = (\forall x)\Psi$ для некоторой формулы Ψ, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_{\alpha'} \Psi$ для всех оценок α', отличающихся от оценки α возможно только на элементе x;

8) если $\Phi = (\exists x)\Psi$ для некоторой формулы Ψ, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_{\alpha'} \Psi$ для некоторой оценки α', отличающейся от оценки α возможно только на элементе x.

<u>Определение</u>. В интерпретации M формула Φ называется:

– *общезначимой* (или *тождественно истинной*), если $M \models_{\alpha} \Phi$ при любых оценках α;

– *выполнимой*, если $M \models_{\alpha} \Phi$ для некоторой оценки α;

– *опровержимой*, если для некоторой оценки α неверно, что $M \models_{\alpha} \Phi$;

– *тождественно ложной*, если для любой оценки α неверно, что $M \models_{\alpha} \Phi$.

Формула Φ общезначима в интерпретации M, если при подстановке в нее вместо n-арных предикатных символов P их интерпретаций P_M она превращается в тождественно истинный на множестве M предикат. Символическая запись $M \models \Phi$.

Формула Φ в интерпретации M выполнима, опровержима или тождественно ложна, если при подстановке в нее вместо n-арных предикатных символов P их интерпретаций она превращается соответственно в выполнимый, опровержимый или тождественно ложный на множестве M предикат P_M.

Проблема общезначимости формул алгебры предикатов

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *тождественно истинной*, если она тождественно истина в любой интерпретации *M*. Такая формула называется также *общезначимой формулой*, или *тавтологией алгебры предикатов* и обозначается $\models \Phi$. Множество всех тавтологий алгебры предикатов обозначим $\boldsymbol{T}_{\text{АП}}$.

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *тождественно ложной* или *противоречием*, если она тождественно ложна в любой интерпретации *M*.

По определению противоречивость формулы Ф равносильна условию $\models \neg\Phi$.

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *выполнимой*, если она выполнима хотя бы в одной интерпретации *M*, которая называется *моделью* этой формулы.

Таким образом, формула Φ :

– *общезначимая* (или *тождественно истинная*, *тавтология*), если $M \models_\alpha \Phi$ в любой интерпретации M при любых оценках α; запись $\models \Phi$;

– *выполнимая*, если $M \models_\alpha \Phi$ в некоторой интерпретации M для некоторой оценки α;

– *опровержимая*, если в некоторой интерпретации M для некоторой оценки α неверно, что $M \models_\alpha \Phi$;

– *тождественно ложная*, если в любой интерпретации M для любой оценки α неверно, что $M \models_\alpha \Phi$.

Замечание 1.

Если формула Ф является предложением, то она не содержит свободных вхождений переменных и, следовательно, не зависит от оценок α предметных переменных в области интерпретации M.

Значит, предложение Ф в интерпретации M общезначимо в том и только том случае, если оно выполнимо (т.е. выполняется хотя бы при одной оценке α предметных переменных в области интерпретации M).

Замечание 2.

Для формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ справедливы следующие утверждения:

1) $\models \Phi(x_1, \dots, x_n)$ равносильно $\models (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\Phi(x_1, \dots, x_n)$;
2) $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ выполнима в том и только том случае, если выполнима формула $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)\Phi(x_1, \dots, x_n)$;
3) $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ выполнима в любой интерпретации в том и только том случае, если $\models (\exists x_1) \dots (\exists x_n)\Phi(x_1, \dots, x_n)$.

Тавтологии алгебры предикатов

Любая тавтология алгебры высказываний является тавтологией алгебры предикатов. Более того, тавтологии алгебры высказываний дают возможность легко получать тавтологии алгебры предикатов с помощью следующего очевидного результата.

Лемма 1. Если $\Phi(X_1,\ldots,X_n)$ – тавтология алгебры высказываний, то для любых формул алгебры предикатов $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ формула $\Phi(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ является тавтологией алгебры предикатов.

С другой стороны, в алгебре предикатов можно получить много принципиально новых тавтологий с помощью следующих свойств кванторов.

Лемма 2. Для любых формул Φ, Ψ следующие формулы являются тавтологиями:

1. $\neg(\forall x)\Phi \Leftrightarrow (\exists x)\neg\Phi$, $\neg(\exists x)\Phi \Leftrightarrow (\forall x)\neg\Phi$,

$$(\forall x)\Phi \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg\Phi, \quad (\exists x)\Phi \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\Phi;$$

2. $(\forall x)(\forall y)\Phi \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\Phi$, $(\exists x)(\forall y)\Phi \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\Phi$;

3. $(\forall x)(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi \wedge (\forall x)\Psi$,

$$(\exists x)(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi;$$

4. $(\forall x)(\Phi\ \pi\ \Psi) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi\ \pi\ \Psi$, где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$;

5. $(\exists x)(\Phi\ \pi\ \Psi) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi\ \pi\ \Psi$, где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$,

если в формулу Ψ предметная переменная x не входит свободно; а также

6. $(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow ((\exists x)\Phi \Rightarrow \Psi)$,

$(\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow ((\forall x)\Phi \Rightarrow \Psi)$,

7. $(\forall x)(\Psi \Rightarrow \Phi) \Leftrightarrow (\Psi \Rightarrow (\forall x)\Phi)$,

$(\exists x)(\Psi \Rightarrow \Phi) \Leftrightarrow (\Psi \Rightarrow (\exists x)\Phi)$.

8. $(\forall x)\Phi(x) \Rightarrow \Phi(y)$, $\Phi(y) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x)$,

если формула $\Phi(x)$ не содержит предметную переменную y и формула $\Phi(y)$ получается из $\Phi(x)$ заменой всех свободных вхождений переменной x на предметную переменную y.