МАТРИЦЫ

Ма́трица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов, которая представляет собой совокупность строк — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы.

Количество строк и столбцов матрицы задают размер матрицы. Хотя исторически рассматривались, например, треугольные матрицы, в настоящее время говорят исключительно о матрицах прямоугольной формы, так как они являются наиболее удобными и общими.

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае, количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов — количеству неизвестных. В результате, решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.

Матрицы допускают следующие алгебраические операции:
сложение матриц, имеющих один и тот же размер;
умножение матриц подходящего размера (матрицу, имеющую *n* столбцов, можно умножить справа на матрицу, имеющую *n* строк);

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

- **Определи́тель** (или **детермина́нт**) — одно из основных понятий линейной алгебры) — одно из основных понятий линейной алгебры. Определитель матрицы) — одно из основных понятий линейной алгебры. Определитель матрицы является многочленом) — одно из основных понятий линейной алгебры. Определитель матрицы является многочленом от элементов квадратной матрицы (то есть такой, у которой

Для матрицы первого порядка **детерминантом** является сам единственный элемент этой матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$

Для матрицы 2×2 детерминант определяется как

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Для матрицы $n \times n$ определитель задаётся рекурсивно:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1$$

где $\bar{M}_j^1$ — дополнительный минор к элементу $a1j$.

Эта формула называется **разложением по строке**.
В частности, формула вычисления определителя матрицы 3×3 такова:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Раскладывать (раскрывать) определитель можно по элементам **любой строки или любого столбца**

Правило Крамера решения систем линейных уравнений

- Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Назовем его определителем системы. Если D≠0, то система совместна, т.е. имеет единственное решение

Далее составим три вспомогательных определителя, заменив, соответственно, столбец с коэффициентами неизвестных на столбец свободных членов:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$Dx_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Решение системы находим по формулам:

$$\boxed{x_1 = \frac{Dx_1}{D}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{Dx_2}{D}}$$

$$\boxed{x_3 = \frac{Dx_3}{D}}$$

которые называют [формулами Крамера].

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 30. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

<u>Система совместна,</u> так как D≠0.

Вычислим теперь вспомогательные определители:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 20 & 1 & 1 \\ 30 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 30$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 20 & 1 \\ 1 & 30 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

$$Dx_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 30 \end{vmatrix} = -60$$

Тогда

$$x_1 = 30$$

$$x_2 = 20$$

$$x_3 = -60$$