

Лекция 2

Бегущие волны.

Вторичные параметры

В общем случае решение дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

представляет комбинацию так называемых **бегущих волн**, являющихся функциями времени t и координаты x .

Синусоидальный режим линии также характеризуется наличием бегущих волн, структуру которых легко установить на основе соотношений **(5)**:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_B + I_1 Z) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_B - I_1 Z) e^{\gamma x}; \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2Z_B}(\dot{U}_B + I_1 Z) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2Z_B}(\dot{U}_B - I_1 Z) e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Воспользуемся первым уравнением системы и перейдем от комплексного значения напряжения к мгновенному.

Поскольку выражения в скобках представляют собой комплексные числа, не зависящие от x , то вводим обозначения:

$$\frac{1}{2}(\dot{U}_{\text{в}} + I_1 Z_{\text{п1}}) = \dot{U}_{\text{п1}} = U e^{j\psi_{\text{п}}};$$

$$\frac{1}{2}(\dot{U}_{\text{в}} - I_1 Z_{\text{о1}}) = \dot{U}_{\text{о1}} = U e^{j\psi_{\text{о}}}$$

и представим комплексы составляющих правой части в форме:

$$\underline{\dot{U}_{\text{п}}(x) = \dot{U}_{\text{п1}} e^{-\gamma x}}; \quad \underline{\dot{U}_{\text{о}}(x) = \dot{U}_{\text{о1}} e^{\gamma x}}.$$

прямая волна

обратная волна

Учитывая, что $\gamma = \alpha + j\beta$, можно записать:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\Pi}(x) + \dot{U}_{\text{о}}(x) = \\ &= e^{-\alpha x} U_{\Pi 1} e^{j(\psi_{\Pi} - \beta x)} + e^{\alpha x} U_{\text{о}1} e^{j(\psi_{\text{о}} + \beta x)} \end{aligned}$$

и перейти к мгновенным значениям:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_{\Pi}(x, t) + u_{\text{о}}(x, t) = \\ &= e^{-\alpha x} U_{\Pi m} \sin(\omega t + \psi_{\Pi} - \beta x) + \\ &\quad + e^{\alpha x} U_{\text{о}m} \sin(\omega t + \psi_{\text{о}} + \beta x), \end{aligned}$$

где $U_{\Pi m} = \sqrt{2}U_{\Pi 1}$; $U_{\text{о}m} = \sqrt{2}U_{\text{о}1}$.

Функция $u_{\Pi} = e^{-\alpha x} U_{\Pi m} \sin(\omega t + \psi_{\Pi} - \beta x)$

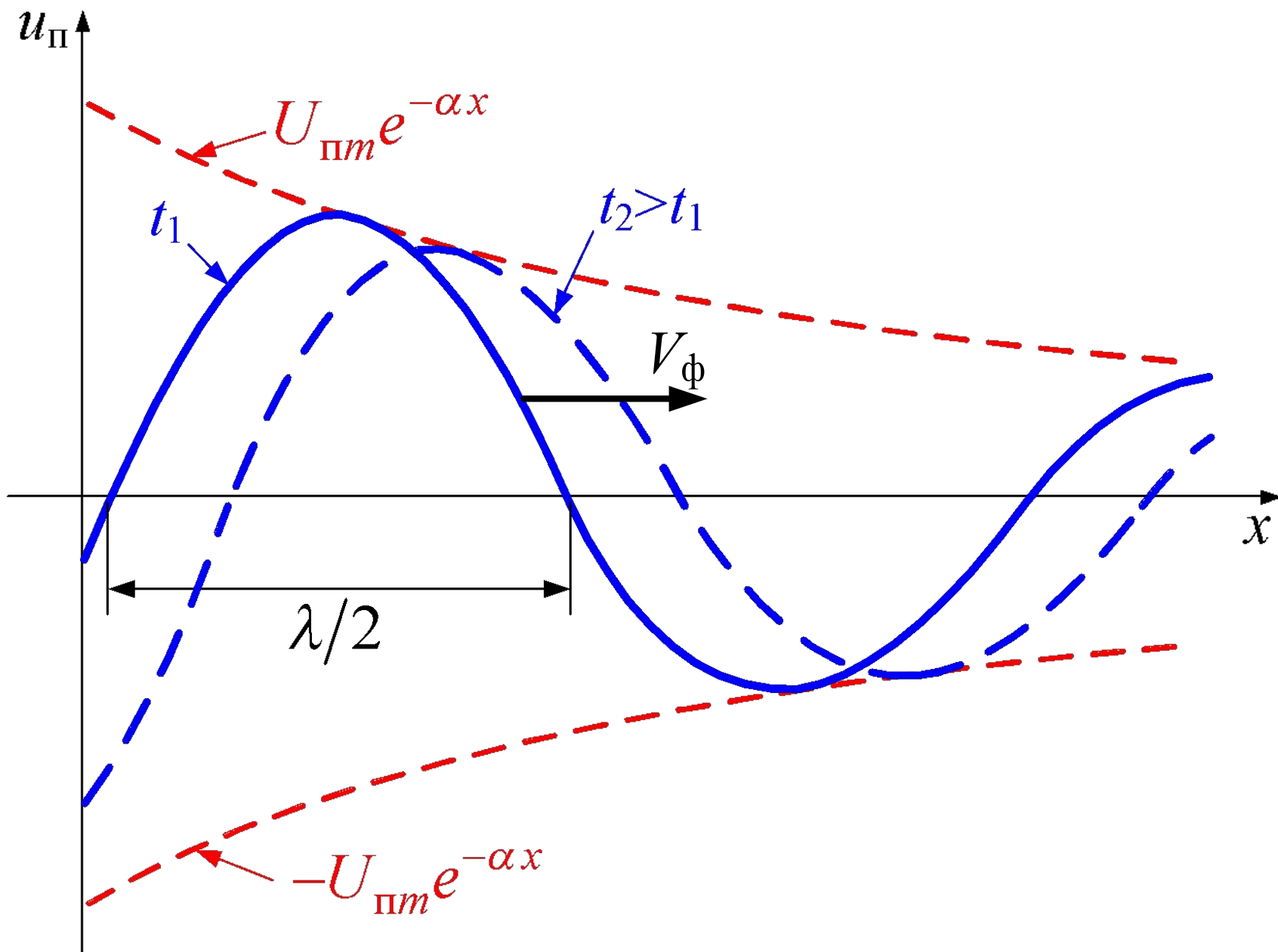
есть математическое выражение **прямой волны**, которая является затухающей синусоидой по координате x .

Это распределение не является стационарным.

С течением времени оно непрерывно перемещается по координате x вдоль линии от начала к концу.

Степень затухания прямой волны u_{Π} вдоль линии определяет множитель $e^{-\alpha x}$.

Фаза прямой волны u_{Π} при фиксированном моменте времени изменяется на единице длины линии на величину β .



Убывание амплитуды прямой волны вдоль линии обусловлено потерями в линии,

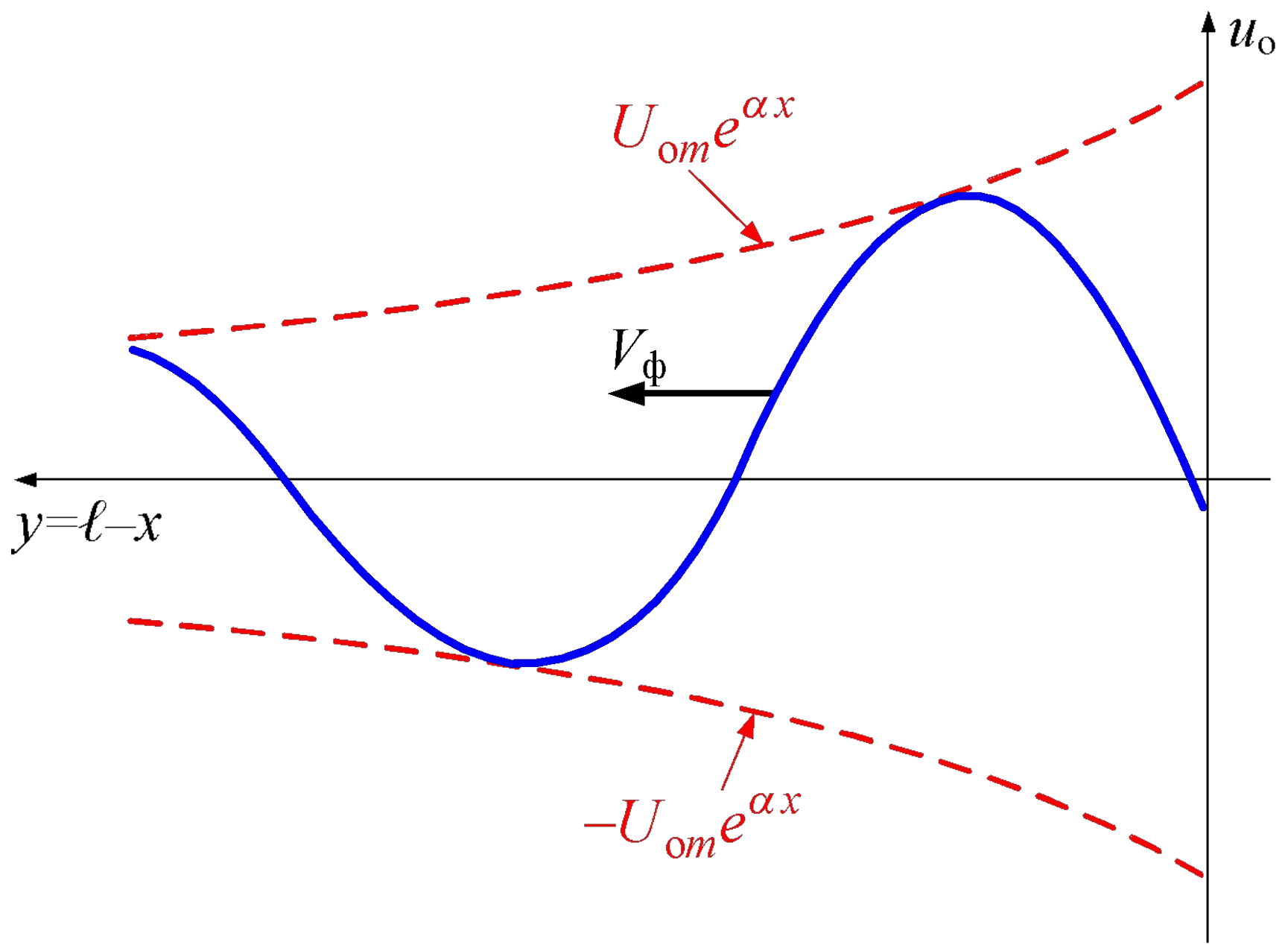
изменение фазы – конечной скоростью ее распространения.

Функция $u_0 = e^{\alpha x} U_{om} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x)$

представляет собой бегущую волну напряжения, перемещающуюся в обратном направлении: от конца линии к ее началу.

Она называется **обратной волной**.

Результирующее напряжение в любой точке линии в любой момент времени формируется в виде суммы прямой и обратной волн.



В соответствии с выражением (5)

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_B + I_1 Z) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_B - I_1 Z) e^{\gamma x}; \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2Z_B}(\dot{U}_B + I_1 Z) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2Z_B}(\dot{U}_B - I_1 Z) e^{\gamma x} \end{cases}$$

для получения выражения мгновенных значений
тока необходимо:

- комплексы прямой и обратной волн разделить на волновое сопротивление;
- изменить знак второй составляющей.

В этом случае мгновенное значение тока будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 i(x, t) &= i_{\Pi}(x, t) - i_o(x, t) = \\
 &= e^{-\alpha x} I_{\Pi m} \sin(\omega t + \psi_{\Pi i} - \beta x) - \\
 &\quad - e^{\alpha x} I_{om} \sin(\omega t + \psi_{oi} + \beta x),
 \end{aligned}$$

где
$$I_{\Pi m} = \frac{U_{\Pi m}}{|Z_B|}; \quad I_{om} = \frac{U_{om}}{|Z_B|};$$

$$\Psi_{\Pi i} = \Psi_{\Pi} - \arg Z_B; \quad \Psi_{oi} = \Psi_o - \arg Z_B.$$

В отличие от напряжения прямая и обратная волны тока не складываются, а вычитаются.

Общий характер имеют соотношения

$$\begin{cases} u = u_{\Pi} + u_{\text{O}}; \\ i = i_{\Pi} - i_{\text{O}}. \end{cases}$$

Волны напряжения и тока перемещаются вдоль линии с определенной скоростью.

В однородной линии скорость неизменна по всей длине.

При анализе синусоидальных процессов в линиях за скорость движения волны принимают **фазовую скорость $V_{\text{ф}}$** .

Это скорость перемещения вдоль линии какой-то фиксированной фазы.

Фаза функции $\sin(\omega t + \psi_{\Pi} - \beta x)$ будет постоянна, если не изменяется ее аргумент $\omega t + \psi_{\Pi} - \beta x$.

Для нахождения V_{ϕ} это условие представляется в виде:

$$\omega t + \psi_{\Pi} - \beta x = \text{const}$$

и берется производная по времени от обеих частей равенства:

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0.$$

Фазовая скорость $V_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$.

Вторым параметром бегущих волн является **длина волны λ** – расстояние между двумя ближайшими точками, разность фаз колебаний в которых равна 2π :

$$\beta\lambda = 2\pi; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

$$\lambda = V_{\phi}T = \frac{\omega}{\beta}T = \frac{2\pi f}{\beta} \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Параметр β , определяемый из выражения

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta,$$

называется **коэффициентом фазы**.

Он характеризует изменение фазы напряжения или тока на единице длины линии.

Фазовая скорость волн напряжения и тока **в воздушных линиях** близка к скорости распространения электромагнитного поля в вакууме (чистом в воздухе), которая составляет величину

$$V_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с},$$

т. е. равна скорости света в вакууме **c**.

$$\text{Здесь } \epsilon_0 = \frac{\Phi}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ м}} \text{ и } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} -$$

соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума (воздуха).

Фазовая скорость в кабелях (в диэлектрике)

В электрических кабелях применяется изоляция из различных диэлектриков.

Их диэлектрическая проницаемость больше ϵ_0 , поэтому для кабелей

$$V_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}}$$

может быть значительно меньше величины $c = 3 \cdot 10^8$ км/с.

Вторичные параметры однородной линии

(коэффициент распространения γ и волновое сопротивление Z_B) определяются по формулам:

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta;$$

$$Z_B = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}.$$

Эти параметры входят в основные соотношения, описывающие процессы в линиях, и выражаются через первичные параметры r_0 , L_0 , g_0 и C_0 .

Коэффициент распространения γ характеризует изменение амплитуд (действующих значений) и фаз напряжения (тока) прямой (обратной) волны на единице длины линии.

Его действительная часть α называется **коэффициентом затухания**,
а мнимая часть β – **коэффициентом фазы**.

Выразим коэффициент распространения через напряжения прямой волны.

Комплексы прямой волны для начала ($x=0$) и конца ($x=l$) линии определяются как

$$\dot{U}_{\Pi}(x) = \dot{U}_{\Pi 1} e^{-\gamma x}; \quad \dot{U}_{\text{шр}} = \dot{U}_{\Pi 1}; \quad \dot{U}_{\text{зр}} = \dot{U}_{\Pi 1} e^{-\gamma l}.$$

Отношение этих величин

$$\frac{\dot{U}_{\text{шр}}}{\dot{U}_{\text{зр}}} = \frac{1}{e^{-\gamma l}} = e^{\gamma l}$$

позволяет выразить коэффициент распространения в следующем виде:

$$\gamma = \frac{1}{l} \ln \frac{\dot{U}_{\text{шр}}}{\dot{U}_{\text{зр}}}.$$

Пусть далее

$$\dot{U}_{\text{пр}} = U_{1\text{пр}} e^{j\beta_{1\text{пр}}} ; \quad \dot{U}_{\text{вр}} = U_{2\text{пр}} e^{j\beta_{2\text{пр}}} .$$

где $U_{1\text{пр}}$ и $U_{2\text{пр}}$ – действующие значения прямой волны соответственно в начале и в конце линии, а $\beta_{1\text{пр}}$ и $\beta_{2\text{пр}}$ – начальные фазы.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{\ell} \ln \frac{U_{\text{пр}}}{U_{\text{вр}}} + j \frac{1}{\ell} (\beta_{\text{пр}} - \beta_{\text{вр}}) ,$$

$$\alpha = \frac{1}{\ell} \ln \frac{U_{\text{пр}}}{U_{\text{вр}}} \text{ Нп/км} ; \quad \beta = \frac{1}{\ell} (\beta_{\text{пр}} - \beta_{\text{вр}}) \text{ рад/км} ,$$

Затуханию в один непер соответствует изменение амплитуд или действующих значений напряжения (тока) прямой волны в $e = 2,718$ раза.

Произведение $\alpha \ell$ – **собственное затухание линии** – определяется по формуле:

$$\alpha \ell = \frac{U_{\text{пр}}}{U_{\text{вр}}},$$

Произведение $\beta \ell = \beta_{\text{пр}} - \beta_{2\text{пр}}$ – **полное изменение фазы** прямой волны напряжения (тока) по длине всей линии.

Волновое сопротивление

$$Z_{\text{В}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = Z_{\text{В}} e^{j\psi_{\text{В}}}$$

определяется отношением комплексов
одноименных волн напряжения и тока в любой
точке линии:

$$Z_{\text{В}} = \frac{\dot{U}_{\text{П}}(x)}{I_{\text{П}}(x)} = \frac{\dot{U}_{\text{О}}(x)}{I_{\text{О}}(x)}.$$

В однородной линии эта величина не зависит от
координаты x .