# Лекция 2

## Бегущие волны.

## Вторичные параметры

В общем случае решение дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = r_0 i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = g_0 u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

представляет комбинацию так называемых **бегущих волн,** являющихся функциями времени *t* и координаты *x*.

**Синусоидальный режим** линии также характеризуется наличием бегущих волн, структуру которых легко установить на основе соотношений ***(5)***:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dfrac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_{\text{в}})e^{-\gamma x} + \dfrac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_{\text{в}})e^{\gamma x}; \\ \dot{I}(x) = \dfrac{1}{2Z_{\text{в}}}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_{\text{в}})e^{-\gamma x} - \dfrac{1}{2Z_{\text{в}}}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_{\text{в}})e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Воспользуемся первым уравнением системы и перейдем от комплексного значения напряжения к мгновенному.

Поскольку выражения в скобках представляют собой комплексные числа, не зависящие от *x*, то вводим обозначения:

$$\frac{1}{2}(\dot{U}_{1\text{в}} + \dot{I}_1 Z_{\text{п}1}) = \dot{U}_{\text{п}1} = U \quad e^{j\psi_{\text{п}}};$$

$$\frac{1}{2}(\dot{U}_{1\text{в}} - \dot{I}_1 Z_{\text{о}1}) = \dot{U}_{\text{о}1} = U \quad e^{j\psi_{\text{о}}}$$

и представим комплексы составляющих правой части в форме:

$$\underbrace{\dot{U}_{\text{п}}(x) = \dot{U}_{\text{п}1} e^{-\gamma x}}_{\text{прямая волна}}; \qquad \underbrace{\dot{U}_{\text{о}}(x) = \dot{U}_{\text{о}1} e^{\gamma x}}_{\text{обратная волна}}.$$

Учитывая, что $\gamma = \alpha + j\beta$, можно записать:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{п}}(x) + \dot{U}_{\text{о}}(x) =$$

$$= e^{-\alpha x} U_{\text{п}1} e^{j(\psi_{\text{п}} - \beta x)} + e^{\alpha x} U_{\text{о}1} e^{j(\psi_{\text{о}} + \beta x)}$$

и перейти к мгновенным значениям:

$$u(x,t) = u_{\text{п}}(x,t) + u_{\text{о}}(x,t) =$$

$$= e^{-\alpha x} U_{\text{п}m} \sin(\omega t + \psi_{\text{п}} - \beta x) +$$

$$+ e^{\alpha x} U_{\text{о}m} \sin(\omega t + \psi_{\text{о}} + \beta x),$$

где $U_{\text{п}m} = \sqrt{2} U_{\text{п}1}; \quad U_{\text{о}m} = \sqrt{2} U_{\text{о}1}.$

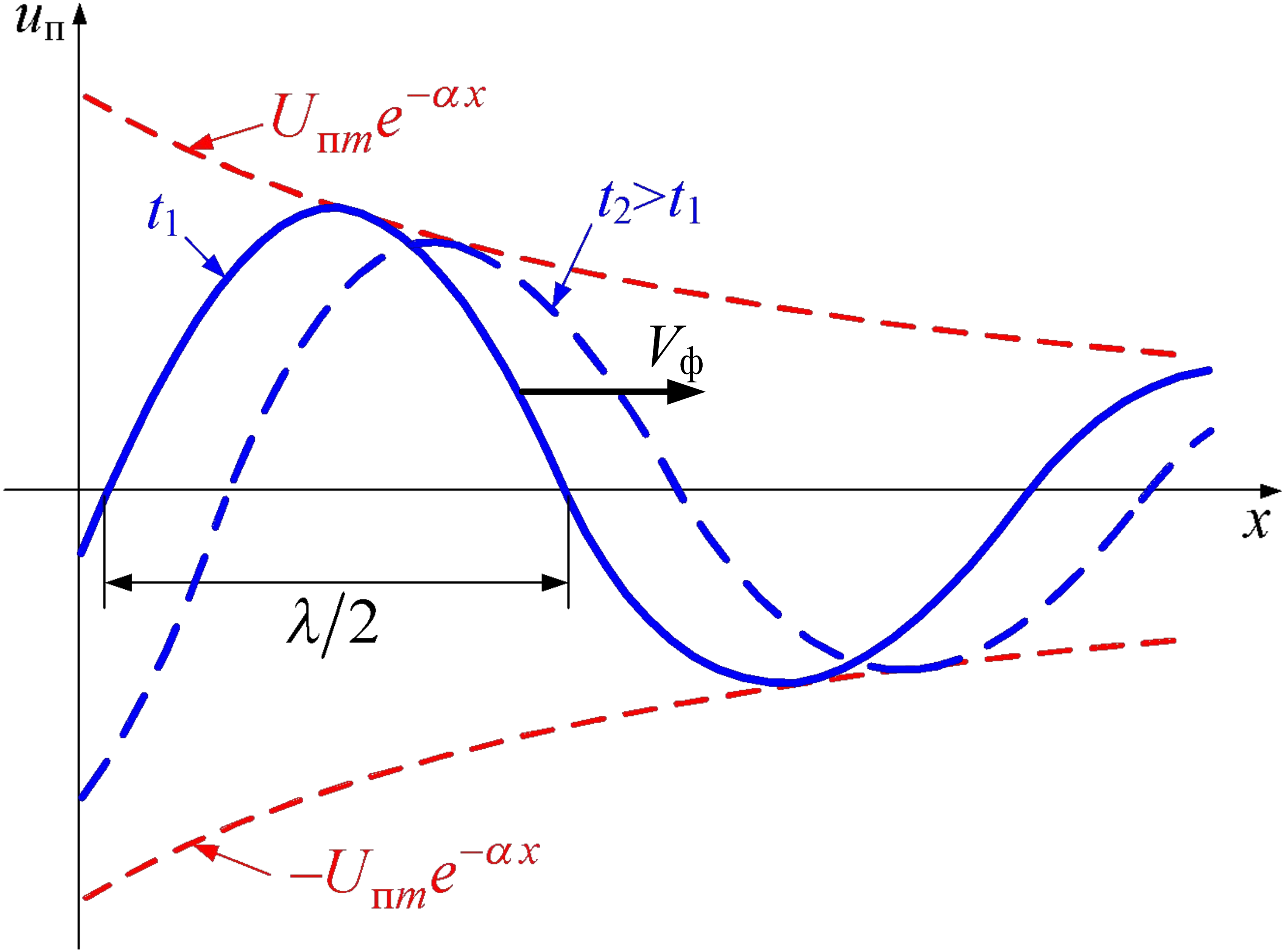
Функция $u_{\text{п}} = e^{-\alpha x} U_{\text{п}m} \sin(\omega t + \psi_{\text{п}} - \beta x)$

есть математическое выражение **прямой волны,** которая является затухающей синусоидой по координате *x.*

Это распределение не является стационарным. С течением времени оно непрерывно перемещается по координате *x* вдоль линии от начала к концу.

Степень затухания прямой волны $u_{\text{п}}$ вдоль линии определяет множитель $e^{-\alpha x}$.

Фаза прямой волны $u_{\text{п}}$ при фиксированном моменте времени изменяется на единице длины линии на величину $\beta$.


$u_п$
$U_{пm}e^{-\alpha x}$
$t_1$
$t_2>t_1$
$V_ф$
$x$
$\lambda/2$
$-U_{пm}e^{-\alpha x}$

Убывание амплитуды прямой волны вдоль линии обусловлено потерями в линии,

изменение фазы – конечной скоростью ее распространения.

Функция $u_{о} = e^{\alpha x} U_{om} \sin(\omega t + \psi_{о} + \beta x)$

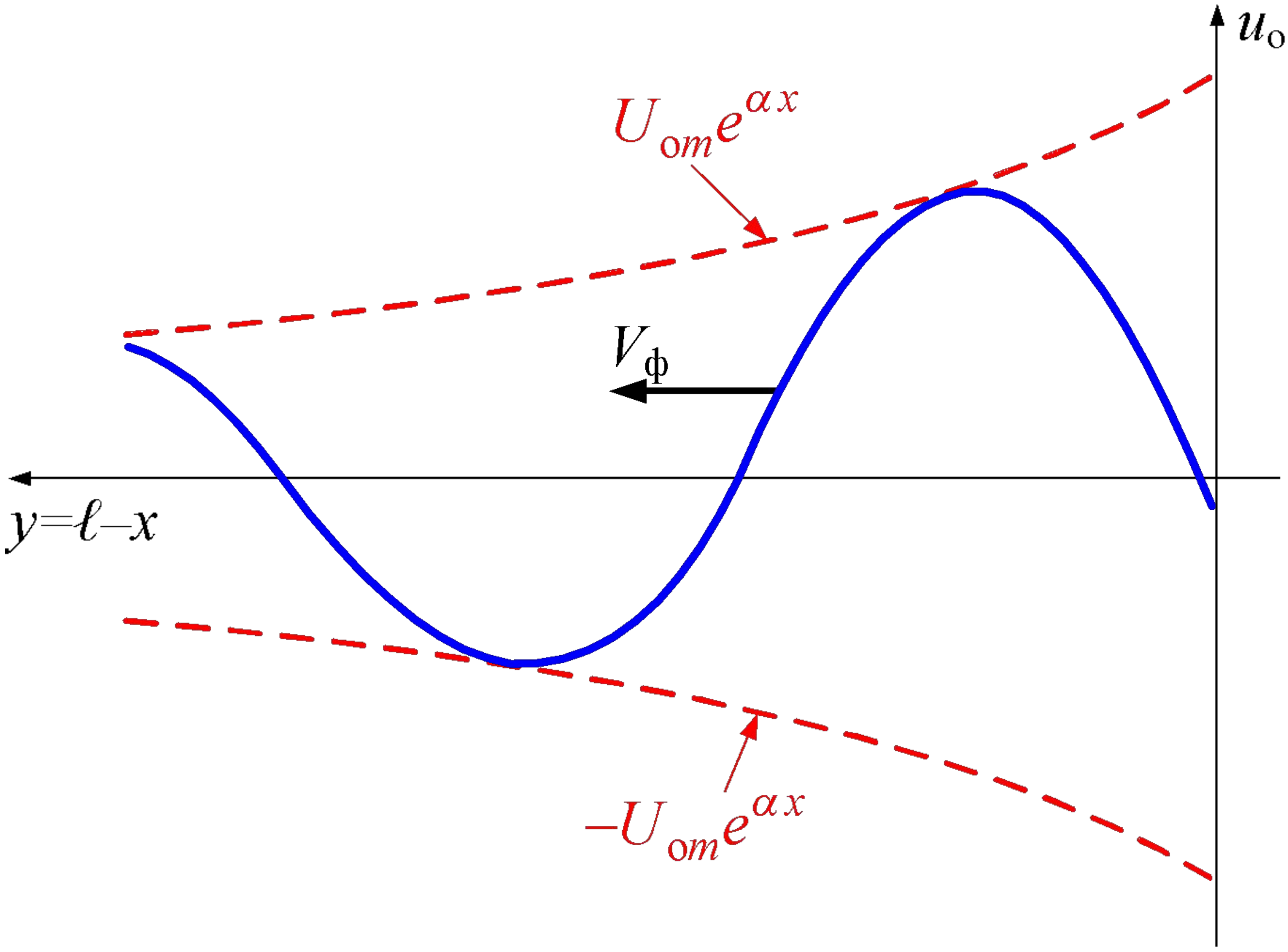
представляет собой бегущую волну напряжения,

перемещающуюся в обратном направлении:

от конца линии к ее началу.

Она называется **обратной волной.**

**Результирующее** напряжение в любой точке линии в любой момент времени формируется в виде суммы прямой и обратной волн.


$u_{\text{о}}$
$U_{om}e^{\alpha x}$
$V_{\text{ф}}$
$y=\ell-x$
$-U_{om}e^{\alpha x}$

В соответствии с выражением ***(5)***

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dfrac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_{\text{в}})e^{-\gamma x} + \dfrac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_{\text{в}})e^{\gamma x}; \\ \dot{I}(x) = \dfrac{1}{2Z_{\text{в}}}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_{\text{в}})e^{-\gamma x} - \dfrac{1}{2Z_{\text{в}}}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_{\text{в}})e^{\gamma x} \end{cases}$$

для получения выражения мгновенных значений тока необходимо:

– комплексы прямой и обратной волн разделить на волновое сопротивление;

– изменить знак второй составляющей.

В этом случае мгновенное значение тока будет иметь вид:

$$i(x,t) = i_{\text{п}}(x,t) - i_{\text{о}}(x,t) =$$

$$= e^{-\alpha x} I_{\text{п}m} \sin(\omega t + \psi_{\text{п}i} - \beta x) -$$

$$-e^{\alpha x} I_{\text{о}m} \sin(\omega t + \psi_{\text{о}i} + \beta x),$$

где $I_{\text{п}m} = \dfrac{U_{\text{п}m}}{|Z_{\text{в}}|}; \quad I_{\text{о}m} = \dfrac{U_{\text{о}m}}{|Z_{\text{в}}|};$

$$\Psi_{\text{п}i} = \Psi_{\text{п}} - \arg Z_{\text{в}}; \qquad \Psi_{\text{о}i} = \Psi_{\text{о}} - \arg Z_{\text{в}}.$$

В отличие от напряжения прямая и обратная волны тока не складываются, а вычитаются.

Общий характер имеют соотношения

$$\begin{cases} u = u_{\text{п}} + u_{\text{о}}; \\ i = i_{\text{п}} - i_{\text{о}}. \end{cases}$$

Волны напряжения и тока перемещаются вдоль линии с определенной скоростью.

В однородной линии скорость неизменна по всей длине.

При анализе синусоидальных процессов в линиях за скорость движения волны принимают **фазовую скорость $V_{ф}$.**

Это скорость перемещения вдоль линии какой-то фиксированной фазы.

Фаза функции $\sin(\omega t + \psi_{\text{п}} - \beta x)$ будет постоянна, если не изменяется ее аргумент $\omega t + \psi_{\text{п}} - \beta x$.

**Для нахождения V$_{\text{ф}}$** это условие представляется в виде:

$$\omega t + \psi_{\text{п}} - \beta x = \text{const}$$

и берется производная по времени от обеих частей равенства:

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0.$$

**Фазовая скорость** $V_{\text{ф}} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\omega}{\beta}.$

Вторым параметром бегущих волн является **длина волны λ** – расстояние между двумя ближайшими точками, разность фаз колебаний в которых равна $2\pi$:

$$\beta\lambda = 2\pi; \qquad \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}.}$$

$$\lambda = V_{\text{ф}} T = \frac{\omega}{\beta} T = \frac{2\pi f}{\beta} \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Параметр $\beta$, определяемый из выражения

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta,$$

называется **коэффициентом фазы.**

Он характеризует изменение фазы напряжения или тока на единице длины линии.

**Фазовая скорость** волн напряжения и тока **в воздушных линиях** близка к скорости распространения электромагнитного поля в вакууме (чистом в воздухе), которая составляет величину

$$V_\text{ф} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с},$$

т. е. равна скорости света в вакууме ***c***.

Здесь $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$ –

соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума (воздуха).

# Фазовая скорость в кабелях (в диэлектрике)

В электрических кабелях применяется изоляция из различных диэлектриков.

Их диэлектрическая проницаемость больше $\varepsilon_0$, поэтому для кабелей

$$V_\text{ф} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}}$$

может быть значительно меньше величины $c = 3 \cdot 10^5$ км/с.

# Вторичные параметры однородной линии

(коэффициент распространения ***γ*** и волновое сопротивление $Z_в$) определяются по формулам:

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta;$$

$$Z_в = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}.$$

Эти параметры входят в основные соотношения, описывающие процессы в линиях, и выражаются через первичные параметры $r_0$, $L_0$, $g_0$ и $C_0$.

**Коэффициент распространения** $\gamma$ характеризует изменение амплитуд (действующих значений) и фаз напряжения (тока) прямой (обратной) волны на единице длины линии.

Его действительная часть $\alpha$ называется **коэффициентом затухания,**
а мнимая часть $\beta$ – **коэффициентом фазы.**

Выразим коэффициент распространения через напряжения прямой волны.

Комплексы прямой волны для начала ($x$=0) и конца ($x$=$\ell$) линии определяются как

$$\dot{U}_{\text{п}}(x) = \dot{U}_{\text{п}1} e^{-\gamma x}; \qquad \dot{U}_{1\text{пр}} = \dot{U}_{\text{п}1}; \qquad \dot{U}_{2\text{пр}} = \dot{U}_{\text{п}1}\, e^{-\gamma \ell}.$$

Отношение этих величин

$$\frac{\dot{U}_{1\text{пр}}}{\dot{U}_{2\text{пр}}} = \frac{1}{e^{-\gamma \ell}} = e^{\gamma \ell}$$

позволяет выразить коэффициент распространения в следующем виде:

$$\gamma = \frac{1}{\ell} \ln \frac{\dot{U}_{1\text{пр}}}{\dot{U}_{2\text{пр}}}.$$

Пусть далее

$$\dot{U}_{1пр} = U_{1пр}\, e^{j\beta_{1пр}}; \qquad \dot{U}_{2пр} = U_{2пр}\, e^{j\beta_{2пр}}.$$

где $U_{1пр}$ и $U_{2пр}$ – действующие значения прямой волны соответственно в начале и в конце линии, а $\beta_{1пр}$ и $\beta_{2пр}$ – начальные фазы.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{\ell}\ln\frac{U_{1пр}}{U_{2пр}} + j\frac{1}{\ell}(\beta_{1пр} - \beta_{2пр}),$$

$$\alpha = \frac{1}{\ell}\ln\frac{U_{1пр}}{U_{2пр}}, \text{ Нп/км}; \qquad \beta = \frac{1}{\ell}(\beta_{1пр} - \beta_{2пр}), \text{ рад/км.}$$

Затуханию в один непер соответствует изменение амплитуд или действующих значений напряжения (тока) прямой волны в *e* = 2,718 раза.

Произведение $\alpha\ell$ – **собственное затухание линии** – определяется по формуле:

$$\alpha\ell = \ln\frac{U_{1\text{пр}}}{U_{2\text{пр}}},$$

Произведение $\beta\ell = \beta_{1\text{пр}} - \beta_{2\text{пр}}$ – **полное изменение фазы** прямой волны напряжения (тока) по длине всей линии.

# Волновое сопротивление

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = Z_{\text{в}} e^{j\psi_{\text{в}}}$$

определяется отношением комплексов одноименных волн напряжения и тока в любой точке линии:

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{U}_{\text{п}}(x)}{\dot{I}_{\text{п}}(x)} = \frac{\dot{U}_{\text{о}}(x)}{\dot{I}_{\text{о}}(x)}.$$

В однородной линии эта величина не зависит от координаты *x*.