



Координатный метод

Геометрия
9класс

Уравнение окружности

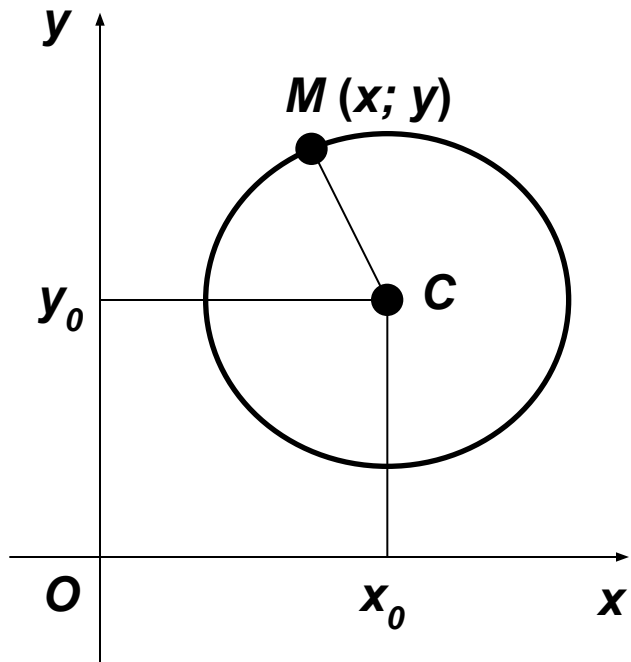
Рассмотрим вопрос об уравнении окружности.

Уравнение с двумя переменными называется **уравнением фигуры**, если ему удовлетворяют координаты любой точки этой фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной фигуре.

Составим уравнение окружности с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и радиусом R .

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит окружности. Тогда в силу определения окружности $CM = R$. Следовательно, квадрат расстояния между точками C и M равен квадрату радиуса:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$



Пусть точка $M_1(x_1; y_1)$ не принадлежит окружности, тогда $CM_1 \neq R$, а значит, $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \neq R^2$, т. е. если точка не принадлежит окружности, то ее координаты не удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

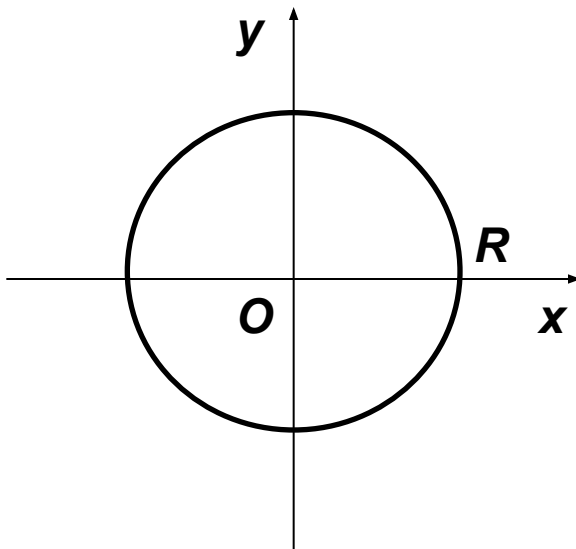
Таким образом, уравнение

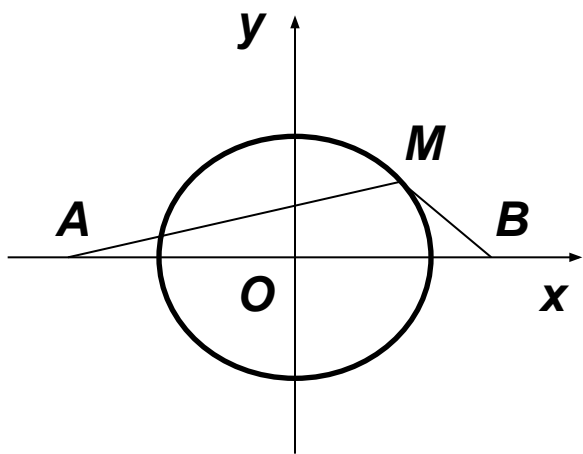
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

есть **уравнение окружности** с центром в точке $C(x_0; y_0)$ и радиусом R .

Заметим, что если центр окружности совпадает с началом системы координат, то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2$$





Задача. Составьте уравнение фигуры на плоскости, состоящей из всех точек, сумма квадратов расстояний которых от точек $A(-6; 0)$ и $B(6; 0)$ равна 104.

Решение.

1) Пусть $M(x; y)$ – точка, принадлежащая фигуре, уравнение которой необходимо составить. Тогда по условию задачи $AM^2 + BM^2 = 104$.

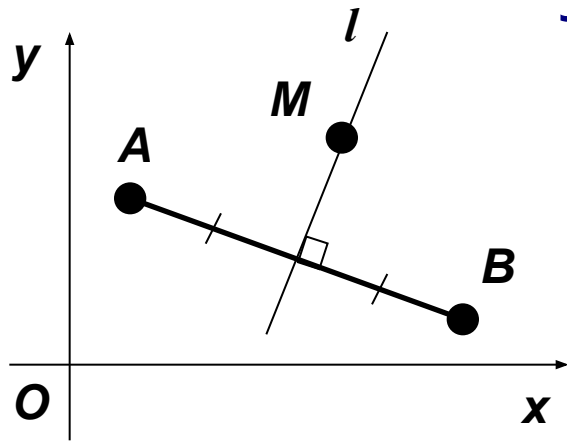
2) Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, координаты которых известны. Получаем:

$$AM = \sqrt{(x+6)^2 + y^2}; BM = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}.$$

3) По условию задачи $(x+6)^2 + y^2 + (x-6)^2 + y^2 = 104$. После упрощения получаем $x^2 + y^2 = 16$.

Если точка $M(x; y)$ не принадлежит фигуре, о которой идет речь в задаче, то $AM^2 + BM^2 \neq 104$, а значит, координаты точки $M(x; y)$ не удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 16$. Таким образом, уравнение фигуры имеет вид $x^2 + y^2 = 16$ и фигура является окружностью с центром в начале координат и радиусом 4.

Уравнение прямой



Выведем уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты которых известны.

Пусть на плоскости дана прямая l и выбрана прямоугольная система координат. Рассмотрим две различные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ такие, что прямая l является серединным перпендикуляром для отрезка AB .

1) Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой l , то $AM = BM$. Следовательно, координаты точки M удовлетворяют уравнению

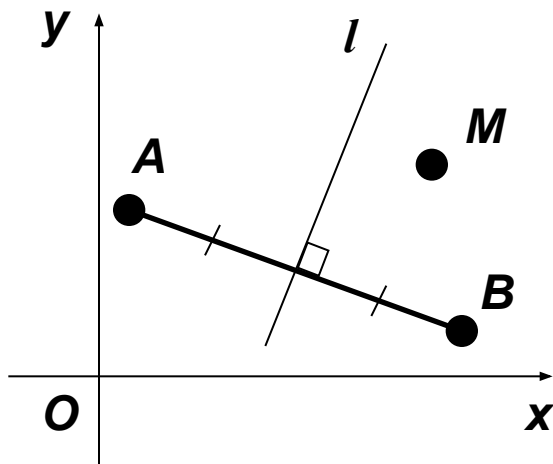
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

которое после преобразования принимает вид

$$ax + by + c = 0,$$

где $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$. Заметим, что хотя бы один из коэффициентов a , b уравнения $ax + by + c = 0$ не равен нулю, т. к. точки A и B различные, а значит, хотя бы одна из разностей $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ не равна нулю.

Таким образом, если точка M лежит на прямой l , то ее координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, где коэффициенты a и b одновременно не равны нулю.



2) Если точка $M(x; y)$ не лежит на прямой l , то $AM \neq BM$ и $AM^2 \neq BM^2$, а следовательно, координаты точки M не удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$.

Таким образом, **уравнением прямой** в прямоугольной системе координат является уравнение первой степени

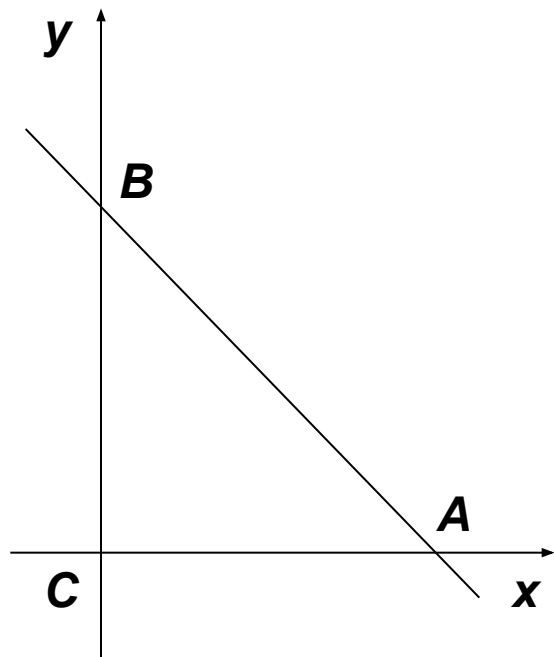
$$ax + by + c = 0,$$

где a и b одновременно не равны нулю.

- ✓ Если $a = 0$, то $y = c_1$ – прямая $\parallel O_x$.
- ✓ Если $b = 0$, то $y = c_2$ – прямая $\parallel O_y$.
- ✓ Если $c = 0$, то прямая проходит через $O(0; 0)$.

Задача. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ACB с прямым углом при вершине C . Найдите множество точек M плоскости, для каждой из которых выполняется условие $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$.

Решение.



Рассмотрим систему координат, начало которой совпадает с вершиной C , а вершины A и B расположены на осях Ox и Oy , как показано на рисунке. Если катет данного треугольника равен a , тогда $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a)$ – координаты точек C , A и B в выбранной системе координат соответственно. Пусть $(x; y)$ – координаты точки M , принадлежащей искомому множеству точек.

Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, если известны их координаты:

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}, \quad CM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

По условию задачи $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$, следовательно,

$$(x-a)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Отсюда получаем уравнение $x + y - a = 0$.

Если точка $M(x; y)$ не принадлежит искомому множеству точек, то $AM^2 + BM^2 \neq 2CM^2$, а значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению $x + y - a = 0$. Таким образом, $x + y - a = 0$ есть уравнение искомого множества точек и это множество есть прямая, на которой лежит гипотенуза AB данного треугольника.

Заключение

Суть координатного метода заключается в том, что введение системы координат позволяет записать условие задачи в координатах и решать ее, используя знания по алгебре.