Линейная алгебра

Лекция 7

Экономические приложения

Межотраслевой баланс

Межотраслевой баланс (МОБ) — экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны между выпуском продукции в одной отрасли и затратами продукции всех участвующих отраслей, необходимыми для обеспечения этого выпуска.

Межотраслевой баланс

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	n		
1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{nn}	Y_n	X_n
Условно чистая продукция	Z_1	Z_2	…	Z_n	$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Столбцы отражают состав валового выпуска отраслей экономики по элементам промежуточного потребления и добавленной стоимости.

Строки - направления использования ресурсов каждой отрасли.

Применения МОБ

Основные задачи применения МОБ:

Определить объем валового продукта производственного сектора экономики по известному конечному спросу.

Распределить по отраслям производства промежуточный продукт каждой отрасли.

Пример составления модели

Некоторый экономический регион производит n видов продуктов (только своими силами и только для населения данного региона).

Технологический процесс отработан, а спрос населения на эти товары изучен.

Введем обозначения

<u>для известных величин:</u>

y_i - спрос населения на *i*-й продукт (i=1,...,n);

a_{ij} - количество *i*-го продукта, необходимое для выпуска единицы *j*-го продукта по данной технологии (i=1,...,n ; j=1,...,n);

<u>для неизвестных величин:</u>

x_i - объем выпуска i-го продукта (i=1,...,n).

Стоимостной баланс

Для каждого i должно выполняться равенство

$$x_i - y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

воспроизводство

конечное потребление

величина выпуска i-го продукта, необходимая для всего выпуска

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2 - y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (*)$$

Модель Леонтьева

Определим технологическую матрицу (матрицу прямых затрат) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

вектор спроса $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ и вектор выпуска $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$X - AX = Y$, или $X = AX + Y$ - классическая модель «затраты-выпуск».

Формулировки модели Леонтьева

Эквивалентные формулировки уравнения межотраслевого баланса:

$$AX + Y = X$$

канонической форма

$$\Leftrightarrow$$

$$X = (E - A)^{-1} Y$$

- приведенная форма

Задачи

межотраслевого баланса:

ЗАДАЧА 1. Найти матрицу A - прямых затрат.

ЗАДАЧА 2. Дана матрица $\mathbf{A}$ прямых затрат и вектор $\mathbf{X}$ валового выпуска. Найти вектор конечного продукта $\mathbf{Y}$**.**

Решение:

$$\mathbf{Y = (E\text{-}A)X}$$

Задачи

ЗАДАЧА 3 (основная).

Дана матрица $\mathbf{A}$ прямых затрат и вектор $\mathbf{Y}$ конечного продукта. Найти вектор $\mathbf{X}$ валового выпуска.

Решение:

1-й способ - решение СЛУ $\mathbf{(E-A)X=Y}$

2-й способ - нахождение $\mathbf{X=(E-A)^{-1}Y}$

Продуктивность матрицы прямых затрат модели Леонтьева

Определение.

Матрица прямых затрат модели Леонтьева (все элементы неотрицательны) называется <u>*продуктивной,*</u> если для любого неотрицательного вектора конечного выпуска Y найдётся неотрицательный вектор валового выпуска X с данной матрицей прямых затрат.

В этом случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Теорема (первый критерий продуктивности)

Модель Леонтьева с неотрицательной матрицей **A** продуктивна тогда и только тогда, когда существует неотрицательная матрица $\mathbf{(E-A)^{-1}}$.

Теорема (второй критерий продуктивности)

Матрица А с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$$

Причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Пример 1

	Отрасль	Производств. потребление					Конечный продукт	Валовый выпуск
		1	2	3	4	5		
1	Добыча и переработка	15	12	24	23	16	50	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленость	10	5	10	5	5	15	50
5	Станкостроение	7	15	15	10	3	10	100

Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной.

Пример 1 (продолжение)

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \;\; i, j = 1,2,\ldots,n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}48 & 0{,}46 & 0{,}16 \\ 0{,}10 & 0{,}03 & 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

Пример 1 (продолжение)

Все элементы матрицы *A* положительны. Сумма элементов третьего и четвертого столбцов больше единицы.

Следовательно, условия второго критерия продуктивности не соблюдены, **матрица *A* не является продуктивной.**

<u>Экономическая причина:</u> внутреннее потребление отраслей 3 и 4 слишком велико в соотношении с их валовыми выпусками.

Пример 2

	Отрасль	Производств. потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
		1	2	3		
1	Тяжелая промышленность	5	35	20	40	100
2	Легкая промышленность	10	10	20	60	100
3	Сельское хозяйство	20	10	10	10	50

1. Построить матрицу полных затрат.
2. Найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно на 60, 70, 30 усл.ед.

Пример 2 (продолжение)

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

Матрица *A* удовлетворяет обоим критериям продуктивности.
В случае заданного увеличения конечного потребления
новый вектор конечного продукта Y* будет иметь вид

$$Y^* = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Новый вектор валового выпуска X* найдем из

$$X^* = AX^* + Y^*$$, или $$(E - A)X^* = Y^*$$

Пример 2 (продолжение)

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,40 \\ -0,10 & 0,90 & -0,40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{pmatrix}$$

Решаем систему $(E - A)X^* = Y^*$, получаем $X^* = \begin{pmatrix} 152,6 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}$

Таким образом, для заданного увеличения компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: тяжелой промышленности на 52,2%, легкой промышленности — на 35,8% и сельского хозяйства — на 85%.

Пример 3

Дано уравнение межотраслевого баланса для двух отраслей:

$$x_i = \sum_{i=1}^{2} x_{ij} + y_i\,,\ \ i = 1,2$$

$$\begin{cases} 500 = 100 + 160 + 240 \\ 400 = 275 + 40 + 85 \end{cases}$$

Требуется определить, каким должен быть вектор валового выпуска, чтобы конечный продукт 1-й отрасли увеличился вдвое, а 2-й – на 20%.

Пример 3 (продолжение)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{100}{500} & \frac{160}{400} \\ \frac{275}{500} & \frac{40}{400} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.55 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 480 \\ 102 \end{pmatrix}; \ (E - A) = \begin{pmatrix} 1-0.2 & -0.4 \\ -0.55 & 1-0.1 \end{pmatrix};$$

$$X_0 = (E - A)^{-1} \cdot Y_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.55 & 0.9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 480 \\ 102 \end{pmatrix} =$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.8 \\ 1.1 & 1.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 480 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 945.6 \\ 691.2 \end{pmatrix}$$

Пример 3 (продолжение)

Даны матрица A прямых затрат и вектор конечного продукта Y :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор валового выпуска X.

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y,$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Модель международной торговли

Пусть x_1, x_2, … , x_n – бюджеты торгующих стран,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– структурная матрица торговли,

x_{ij} - часть бюджета i-й страны, которую она тратит на торговлю с j-й страной. Тогда выручка i-й страны составит

$$p_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n$$

Модель международной торговли

Какими должны быть соотношения между бюджетами торгующих между собой стран, чтобы торговля была взаимовыгодной?

$$p_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n \geq x_1$$

$$p_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n \geq x_2$$

$$\vdots$$

$$p_n = a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + ... + a_{nn} \cdot x_n \geq x_n$$

Замечание о модели международной торговли

Модель международной торговли является частным случаем модели МОБ.

Роль отраслей играют государства.

Все товары, которые государство производит идут в потребление либо в своей стране, либо в странах-партнерах (все товары рассматриваются как конечные).

Теорема (условие бездефицитности торговли)

Пусть $\mathbf{A}$ – структурная матрица торговли,

$\mathbf{X}$ – вектор бюджетов торгующих стран.

Тогда условием бездефицитной торговли является следующее равенство:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{X}\,,$$

т.е. вектор $\mathbf{X}$ должен быть собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, отвечающим собственному числу $\mathbf{1}$.