

Расчёт электрических цепей

Список литературы

а) основная

литература:

1. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 1985. –496 с.
2. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 544 с.
3. Дмитриков В.Ф., Бакалов В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей: Горячая линия - Телеком, 2009. – 596 с.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов по спец. “Радиотехника”. - М.: Высшая школа, 1988. - 448 с.
5. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей.- М.: Радио и связь, 1982.- 280 с.
6. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. –М: Высшая школа, 1986. –596 с.

б) дополнительная литература

1. Фриск В.В. Основы теории цепей./ Учебное пособие. – М.: ИП РадиоСофт, 2002.
– 288 с.

2. Плис А.И., Сливина Н.А. МATHCAD математический практикум для инженеров и экономистов - М.: Финансы и статистика, 2003. - 655 с.
3. Розевиг В.Д. Система схемотехнического проектирования Micro-CAP VII – М.: СОЛОН, 1997 – 273 с.
4. Денисенко А.Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника - М.: Горячая линия-Телеком, 2005. – 704 с.

Переходные процессы в электрических цепях

Понятие о переходном режиме. Законы коммутации.

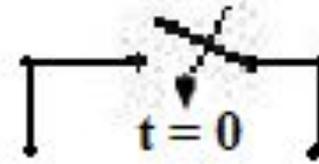
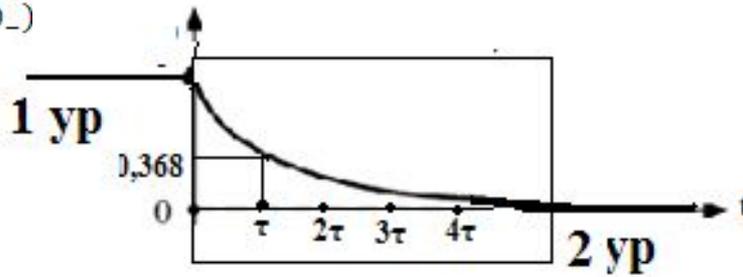
Режим работы электрической цепи, при котором напряжения и токи всех ветвей цепи являются периодическими функциями времени или сохраняют неизменные значения, называется установившимся (вынужденным, принуждённым).

Если токи и напряжения в цепи изменяются не по периодическому закону, то режим работы цепи называется неустановившимся.

Переходные процессы – частный вид процессов, протекающих во втором режиме работы электрической цепи. Они имеют место при переходе от одного установившегося режима работы цепи к другому.

Любое изменение в цепи, приводящее к изменению установившегося режима работы, называется **коммутацией**.

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$



$t = 0$ – момент коммутации, $t = 0_-$ - момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, $t = 0_+$ - момент времени, непосредственно следующий за моментом коммутации.

Закон коммутации

1. В начальный момент времени после коммутации ток индуктивности сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией, т.е.

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

а затем плавно меняется, начиная с этого

2. В начальный момент времени после коммутации напряжение на ёмкости

сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией, т.е.

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

а затем плавно меняется, начиная с этого значения.

Применение чрезмерно упрощенных моделей электрических цепей может приводить к нарушению законов коммутации. Коммутации, при которых это наблюдается, называются некорректными. Уточнение используемой модели цепи – путь к устранению некорректных коммутаций.

Приме



КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Дифференциальное уравнение цепи после коммутации

имеет вид

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 \quad (*)$$

n - порядок электрической цепи,

b_n, a_n - коэффициенты, определяемые параметрами элементов цепи.

Общее решение этого уравнения имеет

вид:

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{пр}}(t)$$

$y_{\text{св}}(t)$ - общее решение однородного дифференциального уравнения

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 = 0 \quad (**)$$

$y_{\text{св}}(t)$ описывает свободные процессы в исследуемой цепи.

$y_{\text{пр}}(t)$ описывает принуждённый режим работы цепи.

Общее решение однородного дифференциального уравнения (**), $y_{\text{св}}(t)$ определяется

корнями его характеристического

ур: $b_n p^n + b_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$

а) простые (различные) вещественные корни $A_k e^{p_k t}$

б) равные вещественные корни

в) попарно комплексно-сопряжённые корни $A_k e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$

Общее решение дифференциального уравнения цепи содержит n неизвестных постоянных интегрирования A_k . Для их определения необходимо располагать значениями искомой функции $y(t)$ и её $(n-1)$ первых производных при $t = 0_+$

Совокупность этих значений называется зависимыми начальными условиями цепи.

Совокупность начальных значений в независимо включённых индуктивностях и напряжений на независимо включённых ёмкостях называют независимыми начальными условиями цепи.

Независимые начальные условия определяются на основе анализа цепи до коммутации, при $t = 0_-$ и законов коммутации.

Для определения принуждённой составляющей $y_{пр}(t)$ следует пользоваться методами анализа электрических цепей в установившемся режиме работы.

Общая схема (алгоритм) классического метода анализа переходных процессов

1. Анализ цепи до коммутации.

Цель его - определить токи индуктивностей и напряжения ёмкостей для момента $t = 0_-$ времени

2. Определение независимых начальных условий.

Это напряжения и токи независимо включённых ёмкостей и индуктивностей в момент времени

$t = 0_-$. Находят их при помощи законов коммутации.

3. Составление дифференциального уравнения цепи после коммутации.

На основе системы уравнений электрического равновесия цепи после коммутации.

4. Анализ установившегося режима работы цепи после коммутации.

Цель его – определение принуждённой составляющей реакции цепи - $y_{пр}(t)$

5. Определение общего вида свободной составляющей реакции цепи путём решения (**).

6. Определение общего вида реакции цепи путём суммирования общего вида решения (**) и принуждённой составляющей реакции цепи.

7. Определение реакции цепи при заданных начальных условиях

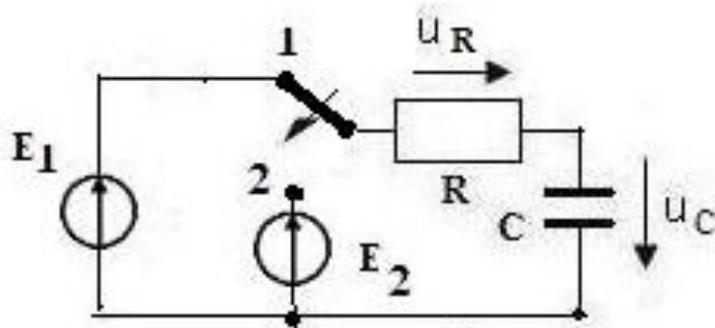
При этом по зависимым начальным условиям определяют постоянные интегрирования.

Для определения зависимых начальных условий используют независимые начальные

условия и уравнения электрического цепи после коммутации. Подставляя постоянные

интегрирования в общее решение дифференциального уравнения (), находят частное

решени



начальных условиях.

1) $U_C(0_-) = E_1$

2) $u_C(0_+) = U_C(0_-) = E_1$

$e^{-\frac{t}{\tau_{\text{II}}}}$

$$3) \quad U_R + U_C = E_2 \quad i_R = i_C = i = C \frac{dU_C}{dt} \quad U_R = RC \frac{dU_C}{dt}$$

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = E_2$$

$$4) \quad U_{C\text{пр}} = E_2$$

5) Характеристическое уравнение

$$RCp + 1 = 0, \quad p_1 = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau_{\text{II}}}$$

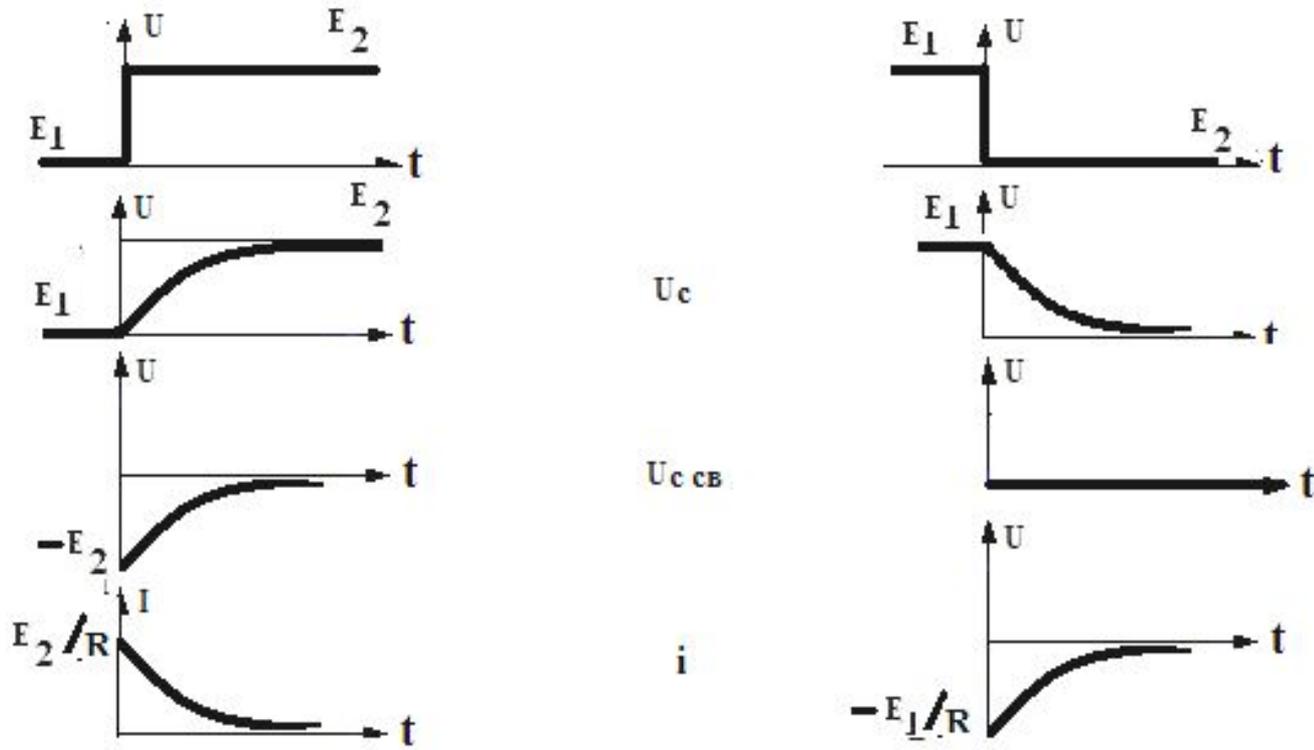
$$U_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-\frac{t}{RC}} = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{II}}}}$$

$$6) \quad U_C = E_2 + A_1 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{II}}}}$$

$$7) \quad u_C(0) = E_2 + A_1 = E_1, \quad A_1 = E_1 - E_2$$

$$U_C = E_2 - (E_2 - E_1) e^{-\frac{t}{\tau_{\text{II}}}}$$

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{E_2 - E_1}{R} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{II}}}}$$



В начальный, после коммутации, момент времени ёмкость ведёт себя как идеализированный источник напряжения, задающее напряжение которого равно начальному напряжению на ёмкости, сопротивление ёмкости в этот момент времени равно нулю.

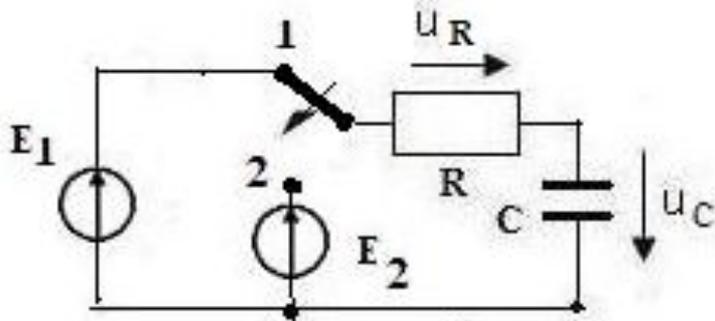
Переходный процесс считается практически завершённым через промежуток времени, равный (4-5) T_c после коммутации.

Операторный метод анализа переходных процессов в электрической цепи

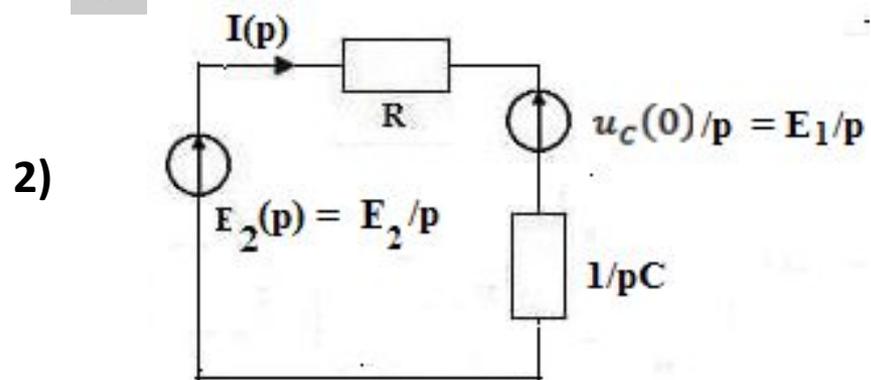
Алгоритм анализа переходных процессов операторным методом выглядит следующим образом:

1. Анализ цепи до коммутации и определение независимых начальных условий.
2. Составление операторной схемы замещения цепи после коммутации
3. Составление уравнений электрического равновесия цепи в операторной форме
4. Решение системы уравнений электрического равновесия цепи
5. Определение оригиналов искомых токов и напряжений

Анализ переходного процесса в последовательной RC цепи при скачкообразном изменении ЭДС



1) $u_C(0_+) = U_C(0_-) = E_1$



$$3) \quad I(p) \left[R + \frac{1}{pC} \right] = \frac{E_2 - E_1}{p}$$

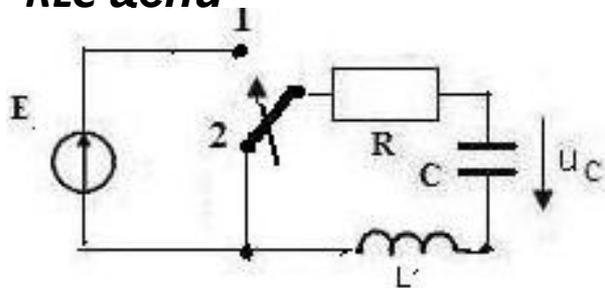
$$4) \quad U_C(p) = \frac{E_2 - E_1}{p(pRC + 1)}$$

$$5) \quad U_C(t) = (E_2 - E_1) - (E_2 - E_1) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Это падение напряжения на незаряженной ёмкости. Полное же выражение для закона изменения напряжения на ёмкости представляет собой $u_C(0_+) + U_C(t)$ и равно

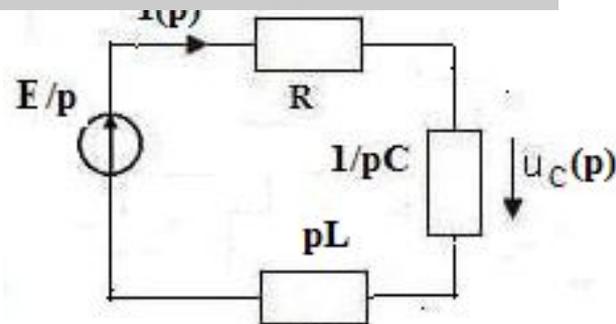
$$U_C(t) = E_2 - (E_2 - E_1) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Коммутация источника постоянной ЭДС в последовательной RLC цепи



$$1) \quad \begin{aligned} u_C(0_-) &= u_C(0_+) = 0 \\ i_L(0_-) &= i_L(0_+) = 0 \end{aligned}$$

2)



$$3) \quad I(p) \left[R + pL + 1/pC \right] = \frac{E}{p} \quad I(p) = \frac{EC\omega_p^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_p^2}$$

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$4) \quad U_C(p) = I(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{E\omega_p^2}{p(p^2 + 2\delta p + \omega_p^2)}$$

$$5) \quad U_C(t) = E\omega_p^2 \left[\frac{1}{\omega_p^2} + \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)} e^{p_2 t} \right]$$

$$p_0 = 0, \quad p_{1,2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_p^2} = -\delta \mp D$$

$$U_C(t) = E \left[1 + \frac{\omega_p^2}{2D(-\delta + D)} e^{-(\delta - D)t} - \frac{\omega_p^2}{2D(-\delta - D)} e^{-(\delta + D)t} \right]$$

а) добротность контура $Q >$

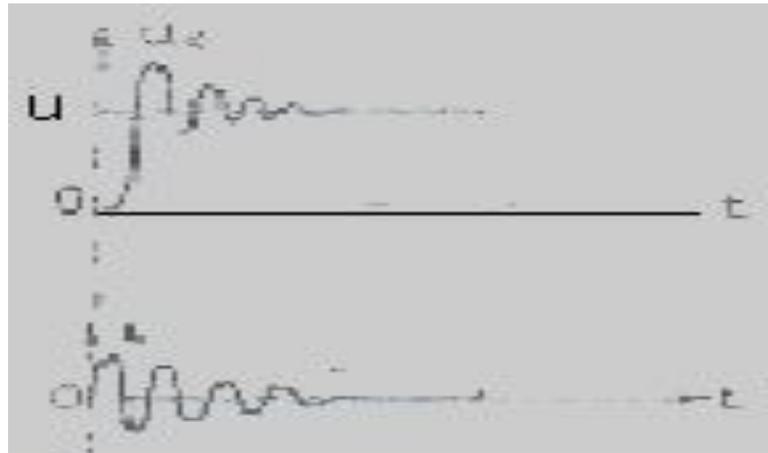
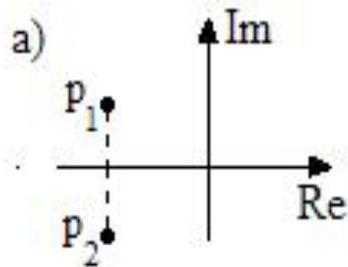
При этом

$$\delta < \omega_p \text{ и } D = j\omega_{CB}, \quad \omega_{CB}^2 = \omega_p^2 - \delta^2$$

и

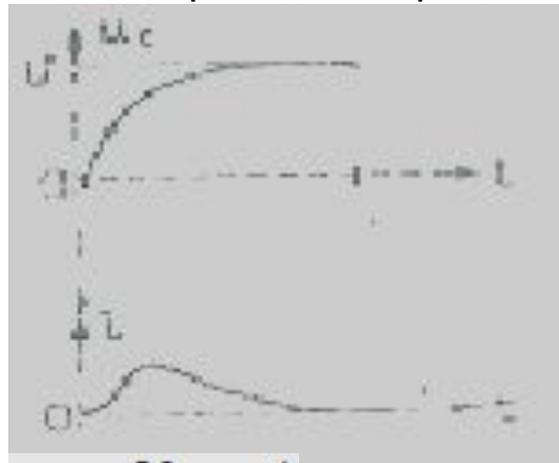
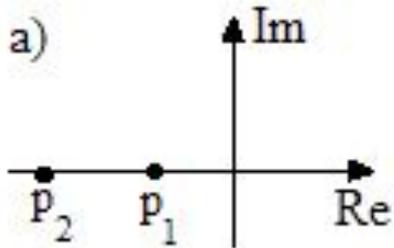
$$U_C(t) = E \left[1 + \frac{\omega_p^2}{2j\omega_{CB}(-\delta + j\omega_{CB})} e^{-(\delta - j\omega_{CB})t} - \frac{\omega_p^2}{2j\omega_{CB}(-\delta - j\omega_{CB})} e^{-(\delta + j\omega_{CB})t} \right]$$

$$U_C(t) = E \left[1 - \frac{1}{\sin \varphi} e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t + \varphi) \right] \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_{CB}}{\delta}$$



б) добротность контура $Q < 1$

При этом ($\delta > \omega_p$ и $D^2 > 0$), т.е. все корни вещественные, расположение их на плоскости комплексной переменной p имеет вид и переходный процесс носит аperiodический характер



Постоянная времени RLC цепи

$$\tau_{\text{ц}} = \frac{2L}{R} = \frac{1}{\delta}$$

Скорость затухания свободных процессов в цепи

Определяется также значением логарифмического декремента затухания, который равен

Натуральному логарифму отношения двух максимальных значений тока или напряжения, взятых через период свободных колебаний

$$\theta = \ln \frac{U_m(t_1)}{U_m(t_1 + T_{св})} = \delta \cdot T_{св} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - 0,25}}$$

Активные электрические цепи с обратной связью.

Устойчивость

Определени

электрических цепей.

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{[m-1]} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + b_1 p + b_0}$$

$$H(p) = \frac{\prod_{i=1}^m (p - \tilde{p}_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

$\tilde{p}_i, \quad i = \overline{1, m}$ — нули $H(p)$

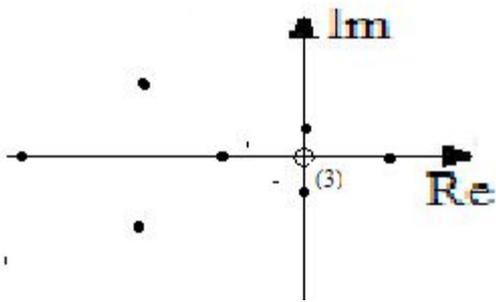
$p_i, \quad i = \overline{1, n}$ — полюсы $H(p)$

Нули и полюсы дробно-рациональной функции с вещественными коэффициентами могут быть

Комплексными (попарно-сопряжёнными), мнимыми (попарно-сопряжёнными) и вещественными.

Нули и полюсы могут быть простыми и кратными. $H(p)$ на комплексной плоскости переменной p

может быть представлена изображениями её полюсов и нулей. Такое представление $H(p)$



Если у операторной передаточной функции цепи все полюсы расположены только в левой полуплоскости переменной p , то цепь, к которой относится передаточная функция, называется устойчивой.

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

Т.е. в устойчивой электрической цепи свободные процессы носят затухающий характер $t \rightarrow \infty$

при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Электрическая цепь устойчива, если знаменатель её операторной передаточной функции

представляет собой полином Гурвица, т.е. такой полином с вещественными коэффициентами,

Все нули которого расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости переменной p .

Цепь будет неустойчивой.

Критерии

а) Критерий устойчивости Рауса-Гурвица

Относится к группе алгебраических критериев устойчивости электрических цепей.

Формулируется следующим образом:

Для того, чтобы уравнение с вещественными

коэффициентами:

$$N(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + b_1 p^1 + b_0 = 0$$

имело корни, расположенные в левой полуплоскости переменной p , необходимо и достаточно, чтобы были положительными:

определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \dots & 0 \\ b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_0 \end{vmatrix}$$

и все главные миноры этого определителя.

Правило составления определителя Гурвица заключается в следующем.

$$N(p) = 0$$

В первой строке определителя записываются коэффициенты уравнения

один, начиная с первого. Вторая пара строк формируется путём смещения первой пары

строк на одну позицию вправо, причём освободившиеся позиции заполняют

главные миноры получают вычёркиванием правого столбца и нижней

строки пара строк – смещение первой пары на две позиции вправо и т.д.

Определителя или предыдущего минораю

Пример

$$N(p) = p^4 + 7p^3 + 18p^2 + 22p + 12 = 0$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 7 & 22 & 0 & 0 \\ 1 & 18 & 12 & 0 \\ 0 & 7 & 22 & 0 \\ 0 & 1 & 18 & 12 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 22 & 0 \\ 1 & 18 & 12 \\ 0 & 7 & 22 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 22 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} \quad D_1 = 7$$

Все определители больше нуля. Цепь

устойчива.

б) Критерий устойчивости

От **Михайлова** группы частотных критериев устойчивости электрических цепей.

Формулируется следующим

Элементарная цепь устойчива, если при изменении частоты ω от 0 до ∞ аргумент полинома $N(j\omega)$, стоящего в знаменателе комплексной передаточной функции цепи, возрастает на угол $0.5n$ пт радиан. где n – степень полинома.

$$N(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i), \quad p_i, \quad i = \overline{1, n} - \text{полюсы } H(p). \quad (*)$$

Если $p_i, i = \overline{1, n}$, - вещественный корень $(-\delta_i)$, то в произведении (*) присутствует линейный член, паре комплексно-сопряжённых корней в $(-b_i \pm j\omega_i)$ соответствует квадратичный член.

Полином Гурвица можно представить в виде произведений полиномов первой и второй

$$N(p) = \prod_{i=1}^{n-2r} (p + \delta_i) \prod_{j=1}^r (p^2 + \alpha_j p + \beta_j) \quad \alpha_j = 2b_j \quad \beta_j = b_j^2 + \omega_j^2 \quad (**)$$

$$p_j, \dot{p}_j = -b_j \mp j\omega_j$$

r — число пар комплексно-сопряженных корней полинома

$$p_i = -\delta_i, \quad (p - p_j)(p - \dot{p}_j) = (p^2 + \alpha_j p + \beta_j), \quad \alpha_j \geq 0$$

Пусть $p = j\omega$,

$$N(j\omega) = \prod_{i=1}^{n-2r} (j\omega + \delta_i) \prod_{k=1}^r (-\omega^2 + j\omega \alpha_k + \beta_k) = |N(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

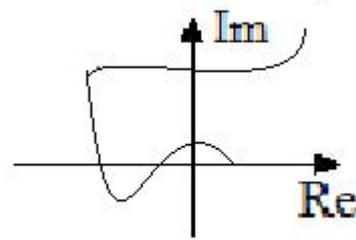
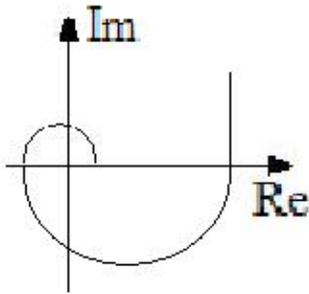
Для линейных сомножителей в (**)

$$\varphi_i = \arctg \frac{\omega}{\delta_i} \text{ и}$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\sqrt{\beta_k}}{b_k} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\beta_k}} - \frac{\sqrt{\beta_k}}{\omega} \right)$$

для квадратных сомножителей

$$\varphi(\omega = \infty) - \varphi(\omega = 0) = n \frac{\pi}{2}$$



Электрические цепи с обратной связью

Обратной связью называется передача электромагнитной энергии с выхода цепи на её в



Операторная передаточная характеристика цепи, охваченной обратной связью

Пусть операторная передаточная характеристика основной цепи $G(p) = \frac{U_{oc}(p)}{U_2(p)}$ а цепи обратной связи $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_{1oc}(p)}$

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_{1oc}(p)}$$

Требуется определить операторную передаточную функцию цепи, охваченной обратной связью

$$H_{oc}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$$

$$H_{oc}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{U_2(p)}{U_{1oc}(p) - U_{oc}(p)} = \frac{U_2(p)/U_{1oc}(p)}{1 - U_{oc}(p)/U_{1oc}(p)} = \frac{H(p)}{1 - \frac{U_{oc}(p)}{U_2(p)} \frac{U_2(p)}{U_{1oc}(p)}}$$

$$H_{oc}(p) = \frac{H(p)}{1 - G(p) \cdot H(p)}$$

Заменяв p на $j\omega$, получим выражение для комплексной передаточной функции цепи,

охваченной обратной связью

$$H_{oc}(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 - G(j\omega) \cdot H(j\omega)}$$

Если
и

$$|1 - G(j\omega) \cdot H(j\omega)| > 1,$$

то введение обратной связи уменьшает модуль коэффициента передачи системы. Такую

связь называют отрицательной обратной связью.

Если же

$$|1 - G(j\omega) \cdot H(j\omega)| < 1$$

то обратная связь называется положительной

Основная цепь и цепь обратной связи – четырёхполюсники, поэтому они

могут

соединяться между собой всеми способами соединения

четырёхполюсников (см

Глубокая отрицательная обратная

связь

$$|1 - G(j\omega) \cdot H(j\omega)| \gg 1$$

$$H_{oc}(j\omega) \approx -\frac{1}{G(j\omega)}$$

Комплексная передаточная функция цепи с глубокой отрицательной обратной связью

определяется параметрами цепи обратной связи и не зависит от комплексной передаточной функции основной цепи.

Если $1 - G(p) \cdot H(p) = 0$, $H_{oc}(p) = \infty$, то любое случайное воздействие на входе цепи приведет к возникновению незатухающих колебаний на выходе цепи. Самопроизвольное появление таких колебаний называется самовозбуждением цепи. Таким образом, если найдётся такая частота ω , при которой

$$H_{\pi}(p) = G(p) \cdot H(p)$$

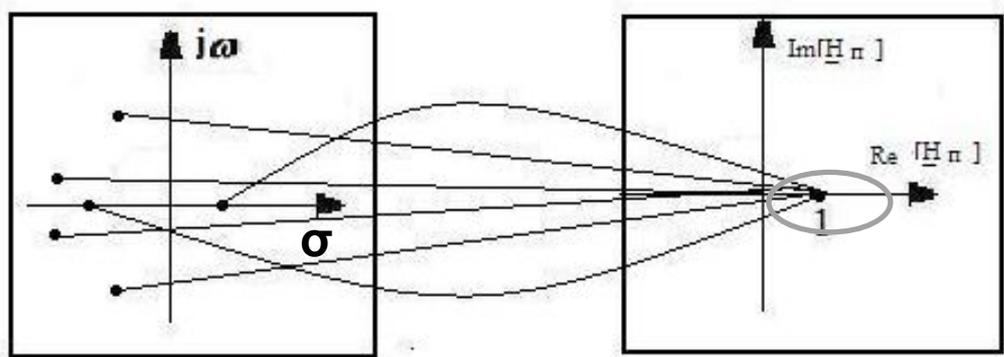
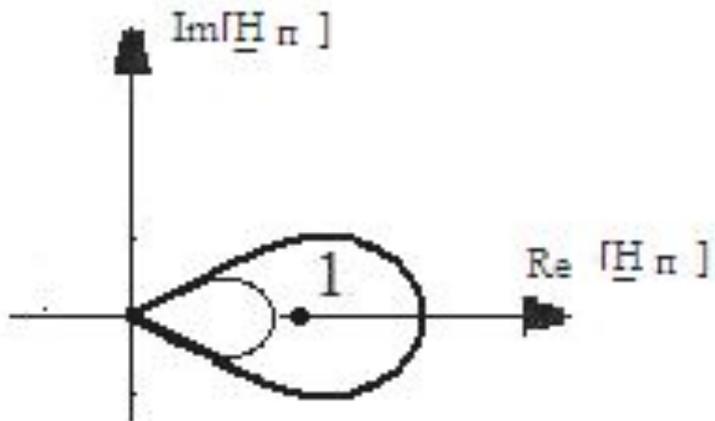
конец вектора попадёт в точку с координатами $(1, j0)$, то в цепи

произойдёт самовозбуждение. На этом факте основан критерий устойчивости Найквиста,

который основан на следующем утверждении:

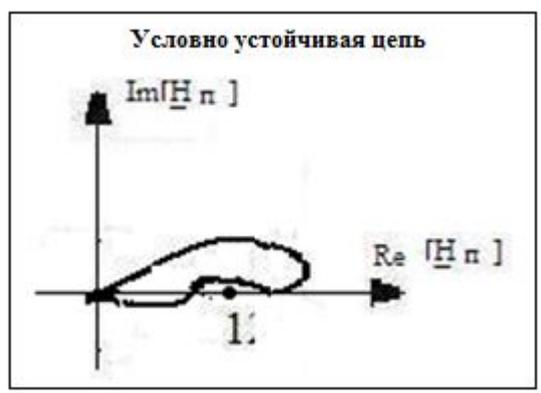
Если годограф петлевой комплексной передаточной функции $H_{\pi}(p) = G(p) \cdot H(p)$ не охватывает точку с координатами $(1, j0)$, то при цепи обратной связи, замкнутая цепь будет устойчивой. В том случае, когда

$H_{\pi}(j\omega) = G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ охватывает точку $1, j0$, замкнутая цепь будет неустойчивой



$$Re \underline{H}_{\pi} = H(\omega)G(\omega) \cos(\varphi + \varphi_{oc})$$

$$Im \underline{H}_{\pi} = H(\omega)G(\omega) \sin(\varphi + \varphi_{oc})$$



Условия самовозбуждения в цепи с обратной связью

$$H_{\pi}(j\omega) = |G(j\omega) \cdot H(j\omega)| e^{j(\varphi_H + \varphi_G)}$$

а) амплитудное

$$G(\omega) \cdot H(\omega) \geq 1$$

б) баланс

$$\varphi_H + \varphi_G = 2\pi n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Условие а) $G(\omega) \cdot H(\omega) = 1$ носит название баланса

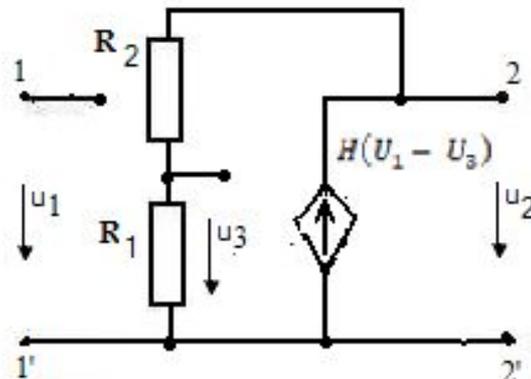
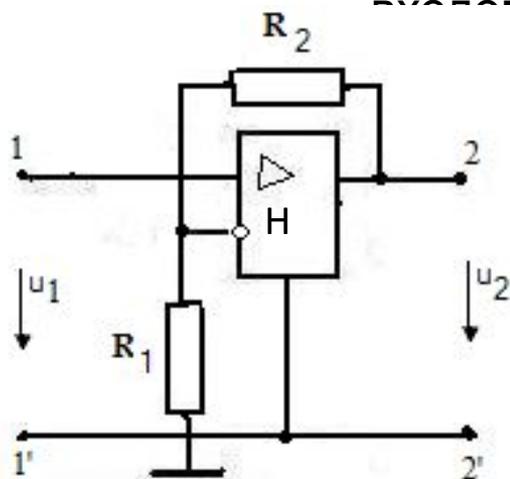
при этом и выполнении б) в цепи наблюдается режим генерации гармонического колебания с постоянной амплитудой.

Приме

р

Усилитель с неинвертирующим

соединением



$$G = \frac{U_3}{U_2} = \frac{R_1}{R_2 + R_1}, \quad H_{oc} = \frac{H}{1 - G \cdot H} = \frac{1}{\frac{1}{H} + \frac{R_1}{R_2 + R_1}}$$

При $H \gg 1$ $H = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

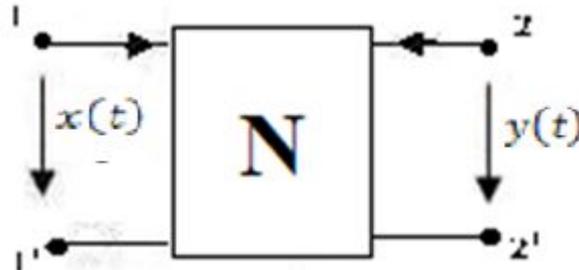
Соединение основной цепи и цепи обратной связи последовательно – параллельное.

Обратная связь – отрицательная.

Электрические цепи с нелинейным

двухполюсником

Нелинейная электрическая цепь. Нелинейные резистивные и реактивные элементы.



$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 =$$

$$a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0$$

Параметры нелинейных

элементов

Резистивное
сопротивление:

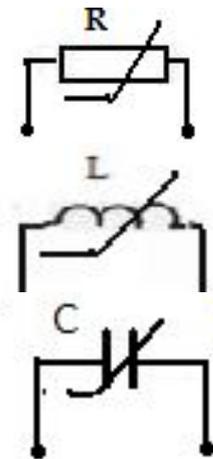
$$R_{ст} = \frac{u}{i} \Big|_{u = u_0}, \quad L_{диф} = \frac{du}{di} \Big|_{u = u_0}$$

Индуктивность
в:

$$L_{ст} = \frac{\psi}{i} \Big|_{\psi = \psi_0}, \quad L_{диф} = \frac{d\psi}{di} \Big|_{\psi = \psi_0}$$

Ёмкость
в:

$$C_{ст} = \frac{q}{u} \Big|_{q = q_0}, \quad L_{диф} = \frac{dq}{du} \Big|_{q = q_0}$$



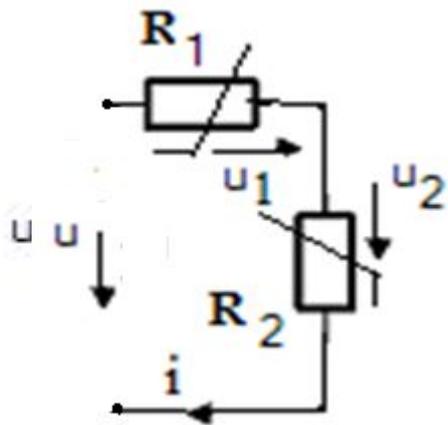
Основные методы расчёта нелинейных электрических цепей:
 графический;

аналитический; машинный

Графические методы расчёта цепей с нелинейным резистором.

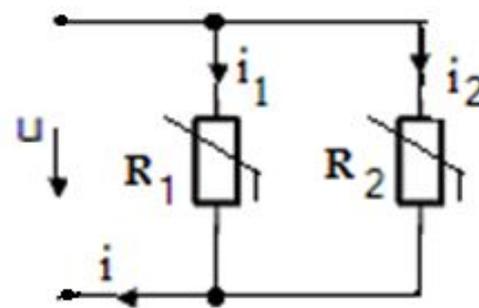
Последовательное и

параллельное соединения нелинейных



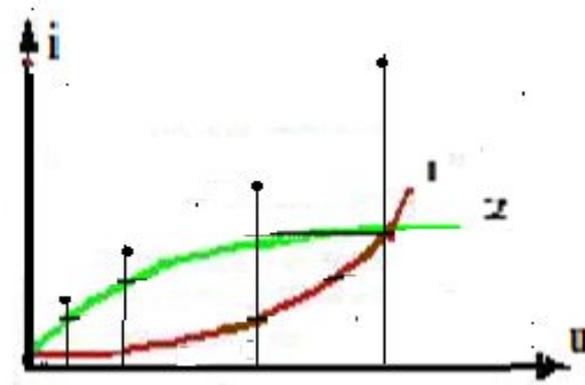
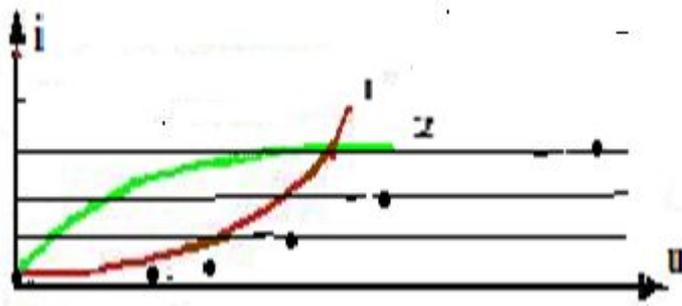
$$i_1 = i_2 = i$$

$$u_1 + u_2 = u$$

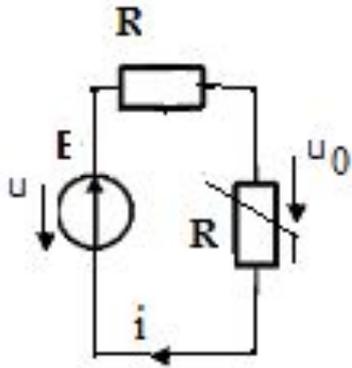


$$u_1 = u_2 = u$$

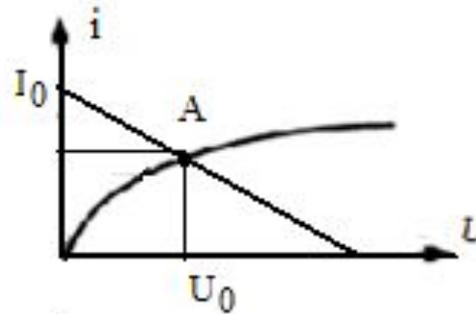
$$i_1 + i_2 = i$$



Расчёт электрической цепи с одним нелинейным резистором методом эквивалентного генератор



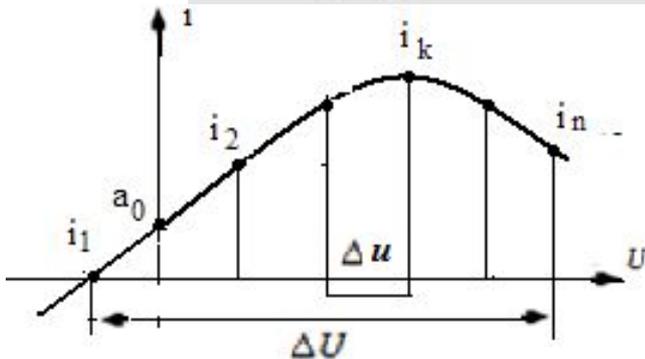
а



Аппроксимация ВАХ

а) полиномиальная аппроксими

$$i = \sum_{k=0}^n a_k u^k = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$$



$$i_1 = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \dots + a_n u_1^n$$

$$i_2 = a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + \dots + a_n u_2^n$$

$$i_n = a_0 + a_1 u_n + a_2 u_n^2 + \dots + a_n u_n^n$$

a_0 определяется как ток при $U = 0$

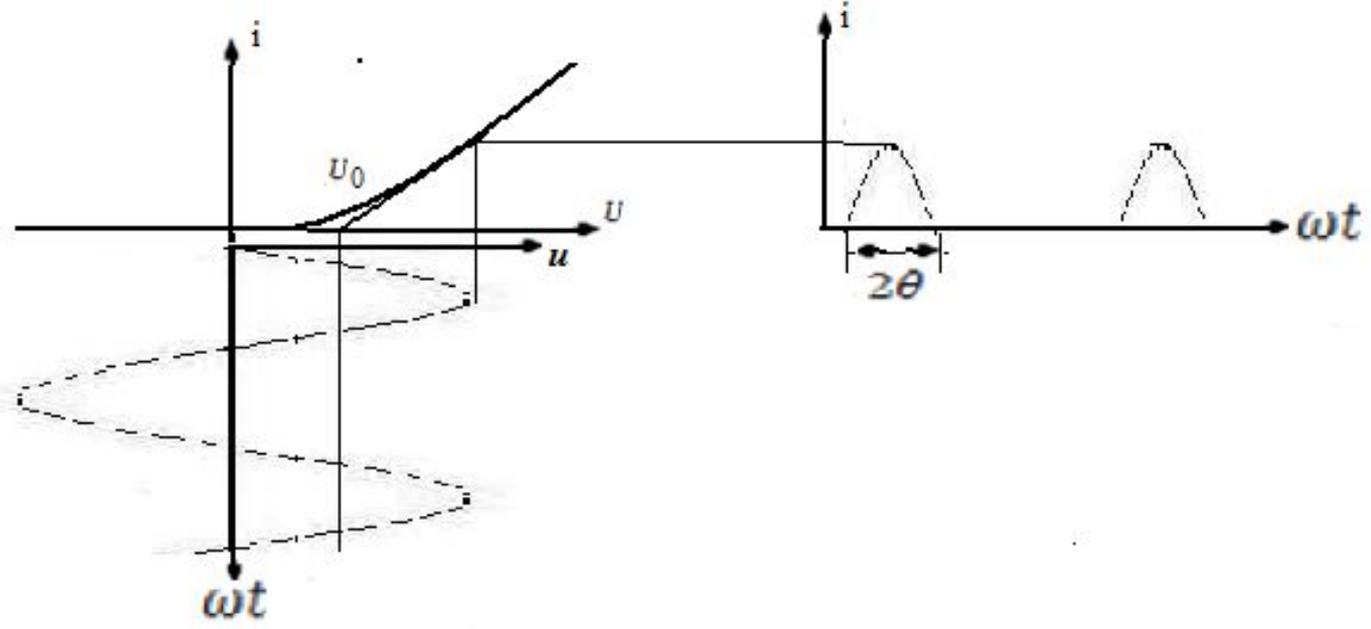
б) Линеаризация нелинейного сопротивления при малых отклонениях от заданного режима

(слабый сигнал)

$$i = f(u) = f(u_0) + \frac{1}{k!} \sum_{k=1}^{\infty} (u - u_0)^k \cdot \frac{d^k}{du^k} f(u) |_{u = u_0}$$

$$i \approx f(u_0) + (u - u_0) \cdot \frac{di}{du} |_{u = u_0} = f(u_0) + \frac{u - u_0}{R_{\text{диф}} |_{u = u_0}}$$

в) Кусочно-линейная аппроксимация (сильный сигнал)



Анализ нелинейной электрической цепи при гармоническом

воздействии

а) Метод, основанный на использовании тригонометрических функций кратного аргумента

$$i = \sum_{k=0}^n a_k u^k$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i = a_0 + a_1 U_m \cos(\omega t + \varphi) + a_2 U_m \cos^2(\omega t + \varphi) + \dots + a_n U_m \cos^n(\omega t + \varphi)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x, \quad \cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \dots$$

$$x = \cos(\omega t + \varphi)$$

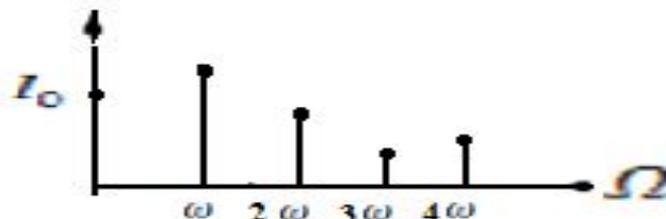
$$i = I_0 + I_1 \cos(\omega t + \varphi) + I_2 \cos 2(\omega t + \varphi) + I_3 \cos 3(\omega t + \varphi) + \dots + I_n \cos n(\omega t + \varphi)$$

$$I_0 = a_0 + \frac{a_2 U_m^2}{2} + \frac{3a_4 U_m^4}{8} + \dots$$

$$I_1 = a_1 U_m + \frac{3a_3 U_m^3}{4} + \frac{5a_5 U_m^5}{8} + \dots$$

$$I_2 = \frac{a_2 U_m^2}{2} + \frac{a_4 U_m^4}{2} + \dots$$

$$I_3 = \frac{a_3 U_m^3}{4} + \frac{5a_5 U_m^5}{16} + \dots$$

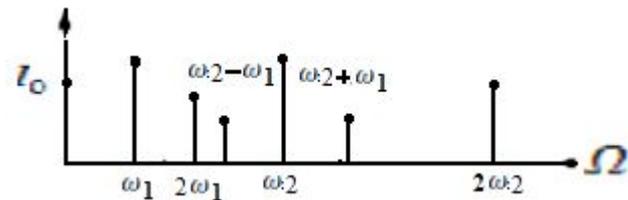
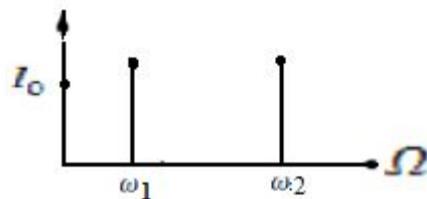


Воздействие в виде суммы двух гармонических колебаний

$$u = U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

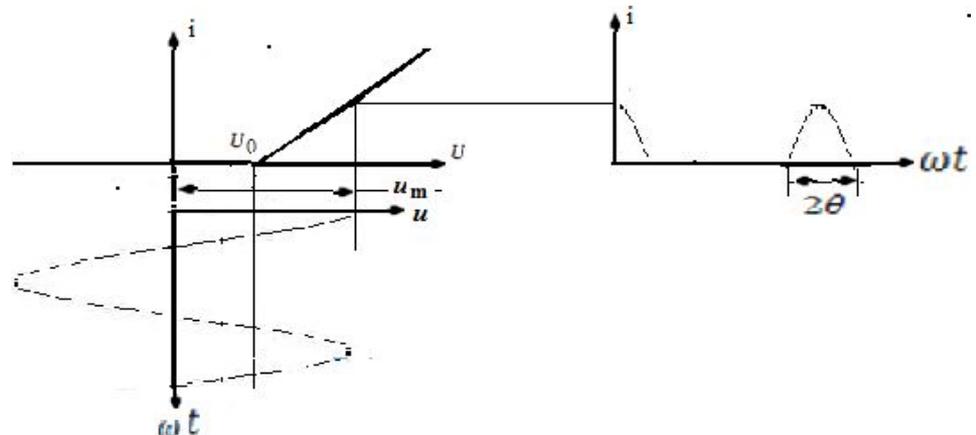
$$i = \sum_{k=0}^n a_k [U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]^k$$

$$i = \sum_{g=0}^n \sum_{p=0}^n I_{pg} \cos(p\omega_1 \pm g\omega_2 + p\varphi_1 \pm g\varphi_2)t$$



б) Метод угла отсечки

$$u = U_m \cos \omega t$$



$$u = \begin{cases} S(U_m \cos \omega t - U_0) & \omega t \in [0, \theta] \\ 0 & \theta \leq \omega t \leq 2\pi - \theta \end{cases}$$

$$\theta = \arccos \frac{U_0}{U_m}, \quad S - \text{крутизна ВАХ}$$

$$i = I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + I_3 \cos 3\omega t + \dots$$

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_{-\theta/\omega}^{\theta/\omega} S U_m (\cos \omega t - \cos \theta) dt = S U_m \gamma_0(\theta)$$

$\gamma_k(\theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$ — функции Берга

$$I_k = \frac{2}{T} \int_{-\theta/\omega}^{\theta/\omega} S U_m (\cos \omega t - \cos \theta) \cos k\omega t dt = S U_m \gamma_k(\theta)$$

$$\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi} [\sin \theta - \theta \cos \theta], \quad \gamma_1(\theta) = \frac{1}{\pi} [\theta - \sin \theta \cos \theta],$$

$$\gamma_k(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin k\theta \cdot \cos \theta - k \cos k\theta \cdot \sin \theta}{k(k^2 - 1)}$$

$$k \geq 2$$

Нелинейные искажения

Искажения, вызванные обогащением спектра сигнала при прохождении его через

нелинейный элемент называются нелинейными (коэффициент нелинейных искажений (коэффициент гармоник)

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^n A_k^2}{A_1^2}}$$

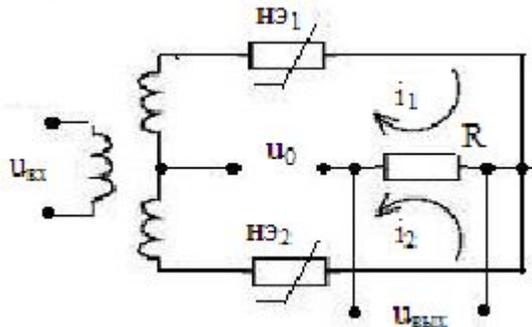
Два распространенных способа уменьшения нелинейных искажений сигналов

а) Метод

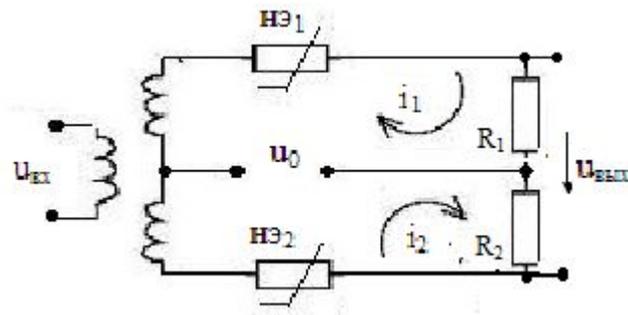
фильтрации

б) метод

А

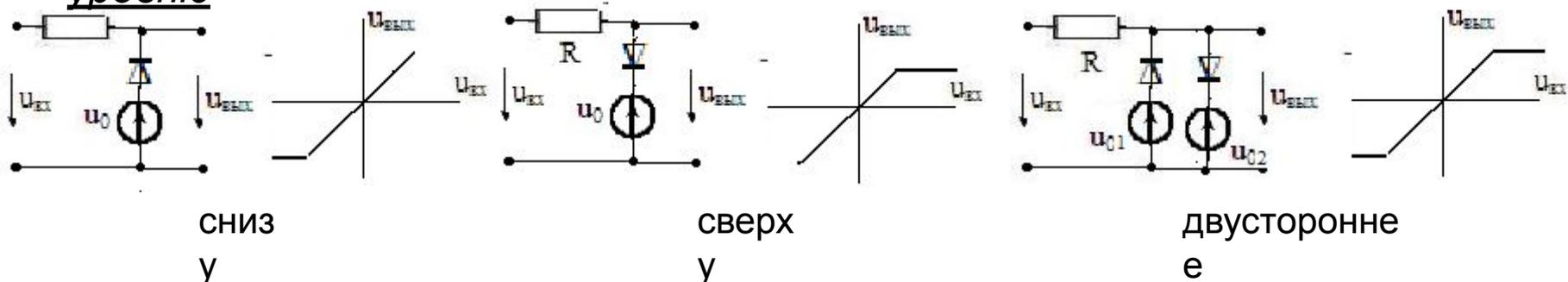


Б



При $U_{вх} = U_m \cos \omega t$ в схеме А) происходит взаимная компенсация нечётных гармоник, в схеме Б) - чётных.

Ограничение сигнала по уровню



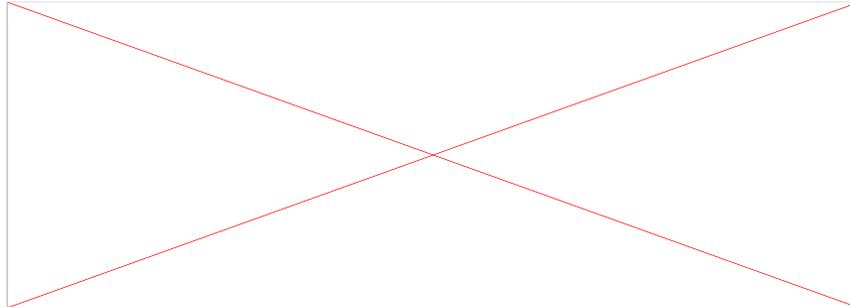
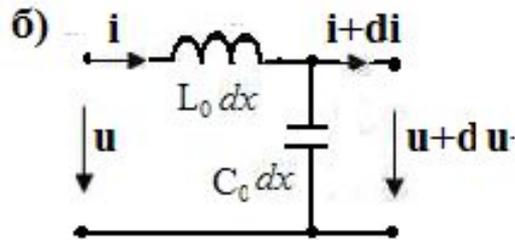
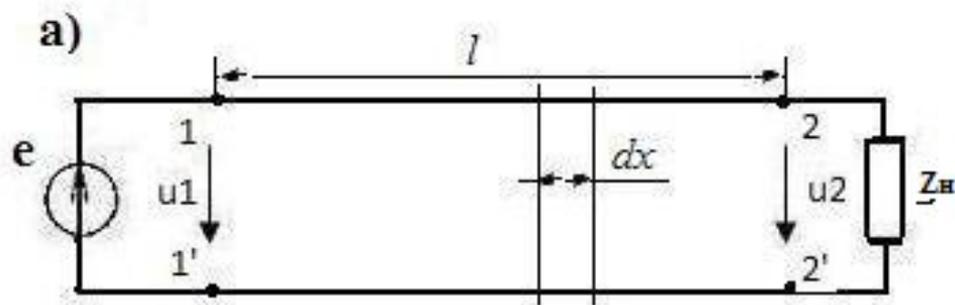
Электрические цепи с распределёнными параметрами

1. Длинные линии. Основные понятия и определения

Линия - электрическая цепь, состоящая из пары проводников, соединяющих источник и приёмник и предназначенных для передачи энергии сигнала на расстояние.

Длинной называют линию, длина которой превышает длину волны колебаний, распространяющихся в ней, а расстояние между проводниками, из которых она состоит, значительно меньше этой длины волны.

Первичными (погонными) параметрами длинной линии называют значения резистивного сопротивления – $R_0 = R/l$, проводимости – $G_0 = G/l$, индуктивности – $L_0 = L/l$ и ёмкости – C/l единицы длины линии. Если эти параметры не изменяются вдоль линии, её называют однородной или регулярной, в противном случае – неоднородной. Если можно пренебречь потерями энергии в сопротивлениях, то такая линия называется длинной линией без потерь.



•2.Телеграфные уравнения и вторичные параметры длинной линии



$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_0 u(x,t) + C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$u(x,t) \div \underline{U_m(x)} e^{j\omega t}, \quad i(x,t) \div \underline{I_m(x)} e^{j\omega t}$$

$$-\frac{d\underline{U_m(x)}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0) \underline{I_m(x)}$$

$$-\frac{d\underline{I_m(x)}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0) \underline{U_m(x)}$$

где $\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$ - комплексный

параметр длинной линии, называемый коэффициентом распространения.

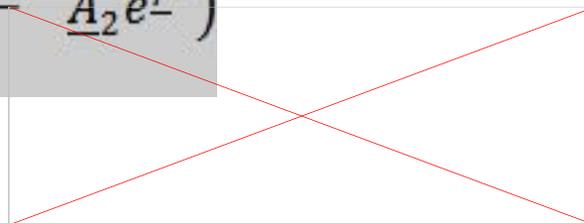
Его вещественная часть – α называется коэффициентом ослабления, мнимая – β коэффициентом фазы. Общее решение системы уравнений (3) имеет вид:

$$\underline{U}_m(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}$$

$$\underline{I}_m(x) = \frac{1}{z_B} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x})$$

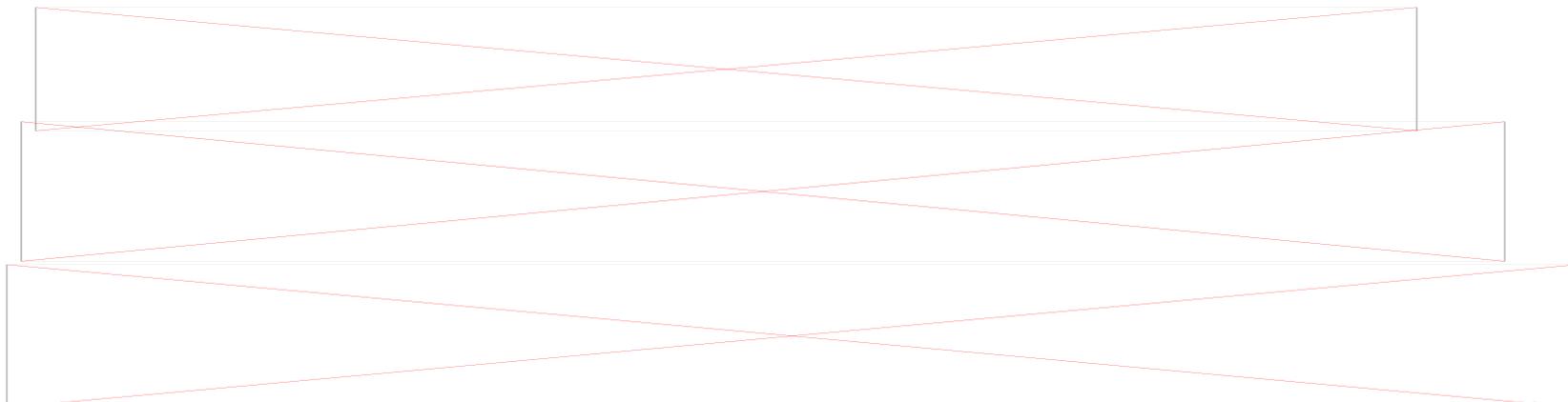


- постоянные интегрирования



волновое сопротивление.

•3. Падающая и отражённая волны в длинной линии



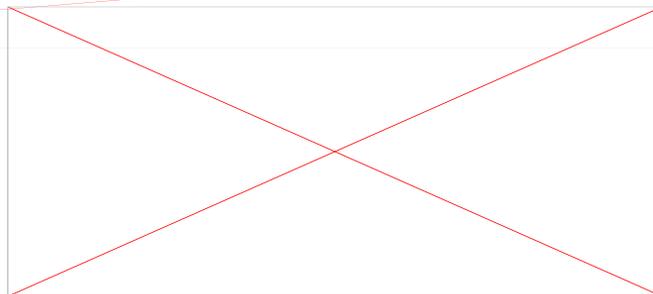
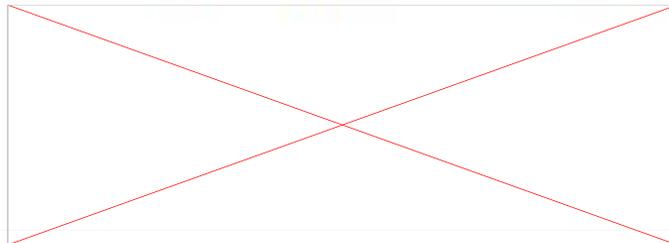
$$u(x,t) = u_{\text{пад}}(x,t) + u_{\text{отр}}(x,t) =$$

$$= \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2)$$

$$i(x,t) = i_{\text{пад}}(x,t) + i_{\text{отр}}(x,t) =$$

$$= \sqrt{2} \frac{A_1}{z_B} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi) - \sqrt{2} \frac{A_2}{z_B} e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi)$$

$$u_{\text{пад}}(x, t = t_1) = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega \cdot (t = t_1) - \beta x + \psi_1)$$



Минимальное расстояние между двумя точками линии, в которых фазы напряжения (тока) отличаются на 2π , называется длиной волны (λ).

$$\beta(x_2 - x_1) = \beta\lambda = 2\pi, \text{ т.е. } \lambda = 2\pi/\beta.$$

Скорость перемещения вдоль линии точки волны, фаза колебания в которой остаётся неизменной, называется фазовой скоростью волны.

$$V_\phi = V_{\phi\text{пад}} = -V_{\phi\text{отр}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

для падающей волны $\omega\Delta t - \beta\Delta x = 2\pi$, $\Delta x = x_2 - x_1 = \lambda$, $\Delta t = t_2 - t_1$

Длинная линия без потерь

В линии без потерь отсутствуют потери в энергии сигнала, распространяющегося по ней. Это возможно, если первичные параметры линии $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$. На практике можно полагать, что в линии отсутствуют потери, если

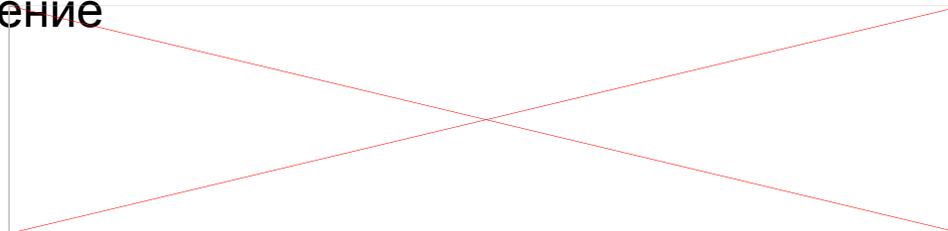


Коэффициент распространения линии без потерь

γ



Волновое
сопротивление



чисто
резистивное

Режимы работы длинной линии

а) Комплексный коэффициент

отражения

Количественной мерой степени согласованности линии и нагрузки служит комплексный коэффициент отражения, который для произвольной точки длинной линии определяется как отношение комплексных действующих значений напряжения (тока) отражённой и падающих волн в этой точке, т.е.

$$\underline{\rho}(x) = \frac{\underline{U}_{\text{отр}}(x)}{\underline{U}_{\text{пад}}(x)} = -\frac{\underline{I}_{\text{отр}}(x)}{\underline{I}_{\text{пад}}(x)} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} e^{2\gamma x}$$

Граничные условия в начале

линии

Постоянные интегрирования \underline{A}_1 и \underline{A}_2 определяются

$$\underline{A}_1 = 0,5 (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{z}_B), \quad \underline{A}_2 = 0,5 (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{z}_B)$$

$$\underline{\rho}(x) = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{z}_B}{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{z}_B} e^{2\gamma x} = \frac{\underline{z}_{11} - \underline{z}_B}{\underline{z}_{11} + \underline{z}_B} e^{2\gamma x} = \underline{\rho}_1 e^{2\gamma x}$$

(*)

$\underline{z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$ - входное сопротивление линии со стороны зажимов 1-1',

$\underline{\rho}_1 = \frac{\underline{z}_{11} - \underline{z}_B}{\underline{z}_{11} + \underline{z}_B}$ - коэффициент отражения в начале линии.

**Граничные условия в конце
линии**

$$\underline{A}_1 = 0,5 (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{z}_B) e^{\underline{\gamma}l}, \quad \underline{A}_2 = 0,5 (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{z}_B) e^{-\underline{\gamma}l} \quad (**)$$

$$\underline{\rho}(x) = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{z}_B}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{z}_B} e^{-2\underline{\gamma}(l-x)} = \frac{\underline{z}_H - \underline{z}_B}{\underline{z}_H + \underline{z}_B} e^{-2\underline{\gamma}y} = \underline{\rho}_2 e^{-2\underline{\gamma}y}$$

$y = l - x$, $\underline{z}_H = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$ - сопротивление нагрузки,

$\underline{\rho}_2 = \frac{\underline{z}_H - \underline{z}_B}{\underline{z}_H + \underline{z}_B}$ - коэффициент отражения в конце линии.

Распределения комплексных действующих значений напряжения и тока вдоль
линии

$$\underline{U}_m(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}$$

$$\underline{I}_m(x) = \frac{1}{\underline{z}_B} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x})$$

С учётом (*) и (**) эти выражения можно переписать в следующем

**Граничные условия в начале
линии**

$$\underline{U}(x) = \frac{e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{\rho}_1 e^{\underline{\gamma}x}}{1 + \underline{\rho}_1} \underline{U}_1 = \frac{e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{\rho}_1 e^{\underline{\gamma}x}}{1 + \underline{\rho}_1} \underline{I}_1 \cdot \underline{z}_B$$

$$\underline{I}(x) = \frac{e^{-\gamma x} - \underline{\rho}_1 e^{\gamma x}}{1 - \underline{\rho}_1} \underline{I}_1 = \frac{e^{-\gamma x} - \underline{\rho}_1 e^{\gamma x}}{\underline{z}_B (1 - \underline{\rho}_1)} \underline{U}_1 \quad (!)$$

Граничные условия в конце линии

$$\underline{U}(y) = \frac{e^{\gamma y} + \underline{\rho}_2 e^{-\gamma y}}{1 + \underline{\rho}_2} \underline{U}_2 = \frac{e^{\gamma y} + \underline{\rho}_2 e^{-\gamma y}}{1 + \underline{\rho}_2} \underline{I}_2 \cdot \underline{z}_B \quad (!!)$$

$$\underline{I}(y) = \frac{e^{\gamma y} - \underline{\rho}_2 e^{-\gamma y}}{1 - \underline{\rho}_2} \underline{I}_2 = \frac{e^{\gamma y} - \underline{\rho}_2 e^{-\gamma y}}{\underline{z}_B (1 - \underline{\rho}_2)} \underline{U}_2$$

Выражения (!) и (!! эквивалентны, при решении конкретных задач можно пользоваться любым из них. Исследование ряда характерных режимов работы в однородной длинной линии удобно проводить при помощи соотношений (!!)

Режим бегущих волн

Это такой режим работы длинной линии, когда в ней распространяется только падающая волна напряжения и тока. ($\underline{\rho}_2 = 0$, т.е. при согласованной нагрузке

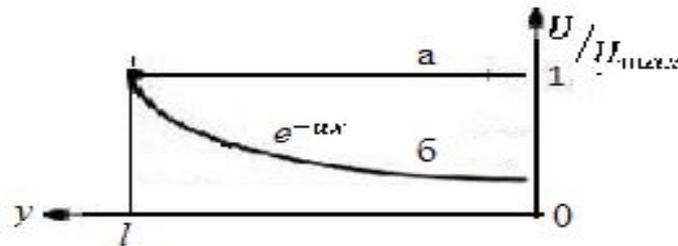
$$\underline{z}_H = \underline{z}_B$$

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2 e^{\gamma y}$$

$$\underline{I}(y) = \underline{I}_2 e^{\gamma y}$$

Для линии без потерь $\gamma = j\beta$ и

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2 e^{j\beta y} \quad \underline{I}(y) = \underline{I}_2 e^{j\beta y}.$$



Режим стоячих

волн

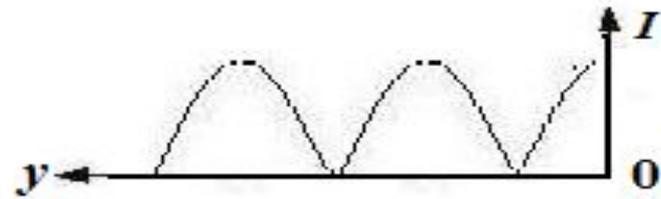
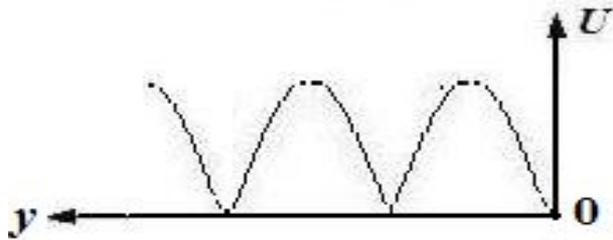
. Это такой режим работы длинной линии, при котором в любом её сечении действующее значение (амплитуда) падающей волны напряжения (тока) равно действующему значению напряжения (тока) отражённой волны. Он наблюдается, если модуль коэффициента отражения $\rho(x)$ во всех сечениях линии равен 1.

Режим стоячих волн может наблюдаться лишь в длинных линиях без потерь при $z_H = 0$, $z_H = \infty$. и $z_H = \pm jx_H$.

Режим короткого замыкания на выходе линии ($z_H = 0$). При этом $\rho_2 = -1$ и

$$\underline{U}(y) = \frac{e^{j\beta y} - e^{-j\beta y}}{2} \underline{I}_2 \rho_B = j \underline{I}_2 \rho_B \sin \beta y$$

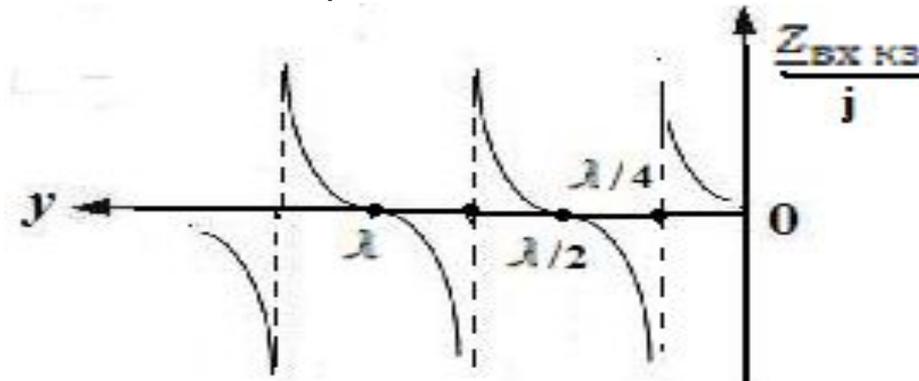
$$\underline{I}(y) = \frac{e^{j\beta y} + e^{-j\beta y}}{2} \underline{I}_2 = \underline{I}_2 \cos \beta y$$



Входное сопротивление короткозамкнутой линии в произвольной точке $y = l - x$ определяется соотношением.

$$\underline{Z}_{\text{вх КЗ}} = \frac{\underline{U}(y)}{\underline{I}(y)} = j \rho_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta y$$

График распределения входного сопротивления вдоль линии имеет вид:



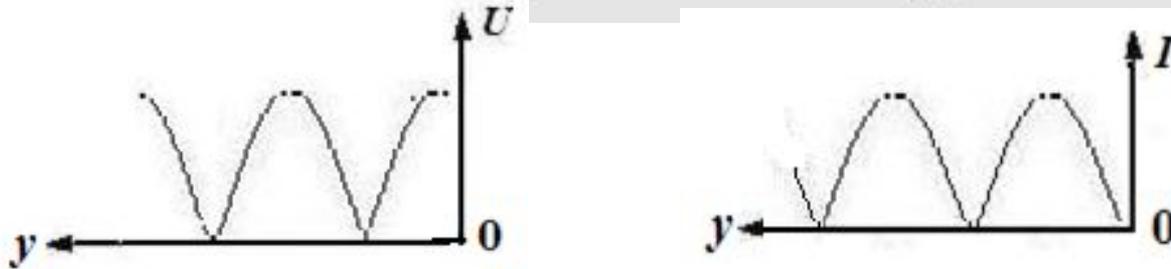
Из этого рисунка следует, что, меняя длину короткозамкнутой линии без потерь, можно получить входное сопротивление: индуктивного характера $0 < y < \lambda/4$, ёмкостного характера $\lambda/4 < y < \lambda/2$, затем снова индуктивность, далее – ёмкость и т.д., при длинах, кратных $\lambda/4$, - входное сопротивление равно бесконечности и при длинах, кратных $\lambda/2$, - нулю.

Режим холостого хода на выходе линии ($z_H = \infty$). При этом $\rho_2 = 1$ и

$\rho_{тр}$

$$\underline{U}(y) = \frac{e^{j\beta y} + e^{-j\beta y}}{2} \underline{U}_2 = \underline{U}_2 \cos \beta y$$

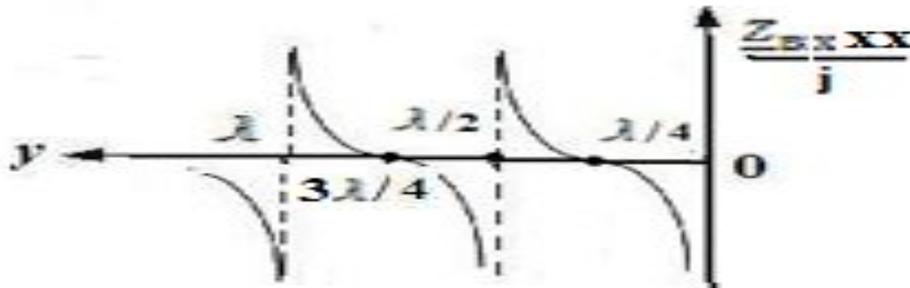
$$\underline{I}(y) = \frac{e^{j\beta y} - e^{-j\beta y}}{2\rho_B} \underline{U}_2 = j \frac{\underline{U}_2}{\rho_B} \underline{I}_2 \sin \beta y$$



Входное сопротивление разомкнутой линии в произвольной точке $y = l - x$ определяется выражением

$$\underline{Z}_{вх\ xx} = \frac{\underline{U}(y)}{\underline{I}(y)} = -j \rho_B \operatorname{ctg} \beta y$$

График распределения входного сопротивления вдоль линии имеет вид:



Режим чисто реактивной нагрузки $\underline{Z}_H = \pm jx_H$

При этом

$$\underline{\rho}(x) = \frac{\pm jx_H - \rho_B}{\pm jx_H + \rho_B} = e^{j\psi_\rho}$$

где $\psi_\rho =$

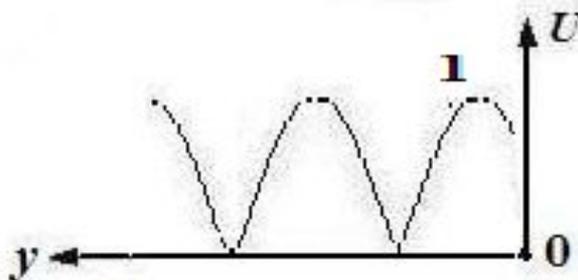
$$\begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2x_H \rho_B}{\rho_B - x_H} & \text{при } x_H \geq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{2x_H \rho_B}{\rho_B - x_H} & \text{при } x_H \leq 0 \end{cases}$$

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2 \sqrt{1 + (\rho_B/x_H)^2} \cos(\beta y - \varphi)$$

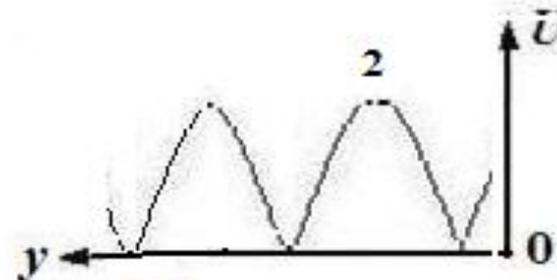
$$\underline{I}(y) = -\underline{I}_2 \sqrt{1 + (\rho_B/x_H)^2} \sin(\beta y - \varphi)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\rho_B/x_H)$$



$$\underline{Z}_{HH} = jx_H$$



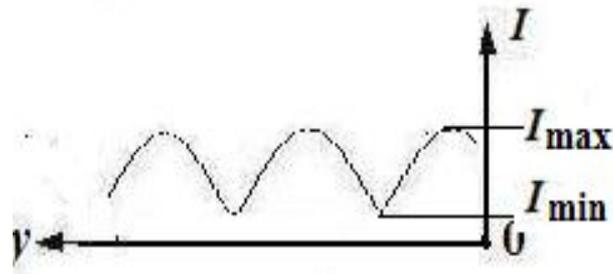
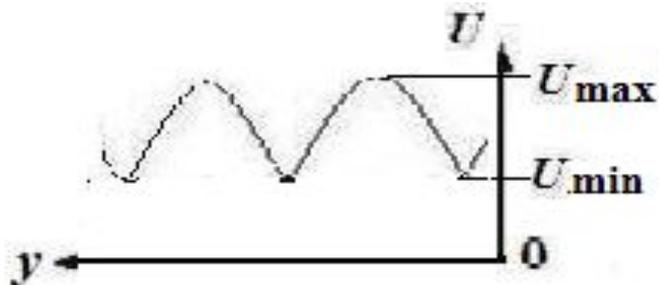
$$\underline{Z}_H = -jx_H$$

Режим смешанных

волн.

Это такой режим работы длинной линии, при котором в ней существует и бегущая и стоячая волна.

Он наблюдается, если модуль коэффициента отражения в конце линии удовлетворяет условию $0 < \rho_2 < 1$.



Чем большая часть энергии отражается от нагрузки, тем более сильно выражены максимумы и минимумы. Поэтому отношение минимальной амплитуды или действующего значения напряжения (тока) к максимальному можно использовать в качестве количественной меры степени рассогласованности линии и нагрузки. Это отношение называется коэффициентом бегущей волны:

$$k_{\text{бв}} = U_{\text{min}} / U_{\text{max}} = I_{\text{min}} / I_{\text{max}}$$

. Величина, обратная $k_{\text{бв}}$, называется коэффициентом стоячей волны - $k_{\text{св}}$.

В длинных линиях без потерь $k_{\text{бв}}$ имеет одно и то же значение в любом сечении линии.

Иная картина наблюдается в линиях с потерями. В них значения коэффициента отражения изменяются вдоль линии, достигая максимального значения в сечении, прилегающем к нагрузке. Таким образом, в длинных линиях с потерями в сечениях, прилегающих к нагрузке, может наблюдаться режим, близкий к режиму стоячих волн, а на значительном удалении от неё – режим сколь угодно близкий к режиму бегущих волн.

Согласование линии с нагрузочным

сопротивлением

Согласующий четвертьволновый трансформатор

а) Будем полагать, что сопротивление нагрузки чисто резистивное ($z_H = R$).

Для линии без потерь $\alpha = 0$,

Из выражений

$$\underline{\rho}_2 = \frac{\underline{z}_H - \underline{z}_B}{\underline{z}_H + \underline{z}_B} \quad \text{и} \quad \underline{z}_B = \rho$$

$$\underline{U}(y) = \frac{e^{\underline{\gamma}y} + \underline{\rho}_2 e^{-\underline{\gamma}y}}{1 + \underline{\rho}_2} \underline{U}_2 = \frac{e^{\underline{\gamma}y} + \underline{\rho}_2 e^{-\underline{\gamma}y}}{1 + \underline{\rho}_2} \underline{I}_2 \cdot \underline{z}_B$$

$$\underline{I}(y) = \frac{e^{\underline{\gamma}y} - \underline{\rho}_2 e^{-\underline{\gamma}y}}{1 - \underline{\rho}_2} \underline{I}_2 = \frac{e^{\underline{\gamma}y} - \underline{\rho}_2 e^{-\underline{\gamma}y}}{\underline{z}_B (1 - \underline{\rho}_2)} \underline{U}_2$$

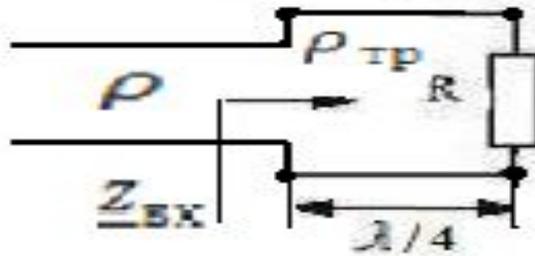
следует, что входное сопротивление четвертьволнового трансформатора, нагруженного на резистивное сопротивление R , определяется выражением:

$$\underline{z}_{\text{вх}}(y) = \frac{\underline{U}(y)}{\underline{I}(y)} = \rho_{\text{тр}} \frac{R + j\rho_{\text{тр}} \operatorname{tg} \beta y}{\rho_{\text{тр}} + jR \operatorname{tg} \beta y} = \rho_{\text{тр}} \frac{R + j\rho_{\text{тр}} \operatorname{tg} \frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4}}{\rho_{\text{тр}} + jR \operatorname{tg} \frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4}}$$

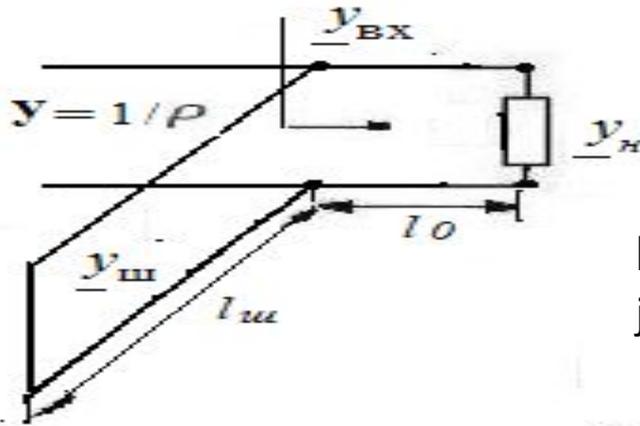
где $\rho_{\text{тр}}$ — волновое сопротивление четвертьволнового трансформатора

$$\underline{z}_{\text{вх}} \left(y = \frac{\lambda}{4} \right) = \frac{\rho_{\text{тр}}^2}{R} = \rho$$

$$\rho_{\text{тр}} = \sqrt{R\rho}$$



Согласование с помощью реактивных шлейфов.



Обычно волновая проводимость шлейфа $y_{ш} = y = 1/\rho$ выбирается равной волновой проводимости линии. Проводимость нагрузки $y_n = 1/z_n = g_n - jb_n$. Входная проводимость в сечении l_0 $= 1/z_{вх}(l_0) = g_{вх}(l_0) - jb_{вх}(l_0)$

Входная проводимость шлейфа

$$y_{вх ш}(y) = \frac{I(y)}{U(y)} = j \frac{1}{\rho} \operatorname{ctg} \beta y$$

Для согласования в сечении l_0 линии и нагрузки, необходимо чтобы

$$\operatorname{ctg} \beta l_{ш} = \frac{b_{вх}(l_0)}{\rho}$$

Откуда

$$l_{ш} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcctg} \left(\frac{b_{вх}(l_0)}{\rho} \right)$$

Синтез линейных электрических

Задача синтеза цепей и этапы её

решения

Задача синтеза электрической цепи заключается в определении цепи (схемы, значений параметров её элементов), обладающей заданной реакцией на заданное воздействие, или, что то же самое, требуемыми временными или передаточными частотными характеристиками. Как правило, задачу синтеза электрической цепи можно разбить на два этапа: задачу аппроксимации и задачу реализации.

Решение **задачи аппроксимации** заключается в определении такой функции цепи (передаточной ЧХ,

импульсной или переходной характеристик), которые, с одной стороны, удовлетворяют заданным требованиям, а с другой – являются физически реализуемыми, т.е. цепь, обладающая такой характеристикой, может быть построена из идеализированных элементов выбранного (заданного) элементного базиса. Цепь может быть нереализуемой в одном элементном базисе и реализуемой в другом.

На практике требования к синтезируемой цепи часто задают в виде ограничений на значения рядов числовых параметров (полоса пропускания, полоса частот, в которой согласующее устройство обеспечивает допустимое рассогласование и т.д.), либо в виде таблиц или графиков. Методы синтеза электрических цепей опираются на аналитические представления функций цепи, чаще всего в виде дробно-рациональных или полиномиальных функций. Поэтому задача аппроксимации заключается в определении аналитической функции, воспроизводящей с заданной точностью требования к синтезируемой цепи. Ясно, что эта функция должна быть физически реализуемой.

Решение **задачи реализации** заключается в определении электрической цепи, временные и частотные характеристики которой совпадают с функцией, найденной в результате решения задачи аппроксимации.

Задачи синтеза, как правило, имеет несколько решений. Поэтому процесс синтеза обычно совмещают с решением задачи оптимизации цепи по какому-либо другому критерию (сложность, энергопотребление, стоимость и пр.

Существует разновидность синтеза, в которой задачи аппроксимации и реализации объединяются.

Синтез двухполюсников

Условия физической

$$H(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

Положительной вещественной функцией комплексной частоты p называется функция $H(p)$, действительная часть которой неотрицательна при неотрицательных значениях действительной части p , а мнимая часть равна нулю при мнимой части p , равной нулю, т.е.

$$\operatorname{Re}[H(p)] \geq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(p) \geq 0$$

$$\operatorname{Im}[H(p)] = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}(p) = 0$$

- 1. Степени полиномов $M(p)$ и $N(p)$ не должны отличаться более чем на единицу.
- 2. Полиномы $M(p)$ и $N(p)$ должны быть полиномами Гурвица. (У полинома Гурвица коэффициенты a_k, b_k вещественны и положительны, не равны нулю, полиномы Гурвица и их отношение – положительные вещественные функции).

Реализация реактивных двухполюсников

$$Z(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_1 p} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{(b_1/a_0)p}$$

Метод Фостера основан на представлении заданных операторных входных функций

$Z(p)$ или $Y(p)$ в виде суммы

$$L(p) = L_1(p) + L_2(p) + \dots + L_n(p)$$

$$Z(p) = \alpha_\infty p + \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^N \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2}$$

$$\alpha_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p},$$

$$\alpha_0 = \text{Res}[Z(p)]_{|p=0} = \left[\frac{M(p)}{\frac{d}{dp} N(p)} \right]_{|p=0}$$

$$\alpha_k = \text{Res}[Z(p)]_{|p=\bar{j}\omega_k} = \left[\frac{M(p)}{\frac{d}{dp} N(p)} \right]_{|p=\bar{j}\omega_k}$$

α_k — вычит функции $Z(p)$ в полюсе $p = j\omega_k$

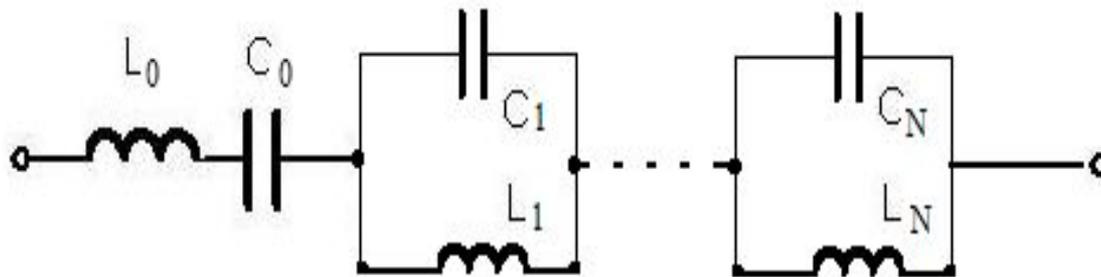
Первый член разложения — операторное сопротивление индуктивности ($L_0 = \alpha_\infty$)

, второй — операторное сопротивление ёмкости ($C_0 = 1/\alpha_0$),

а каждое из слагаемых $\frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2}$ — операторное сопротивление параллельной

LC цепи, составленной из элементов $C_k = 1/2\alpha_k, L_k = 2\alpha_k / \omega_k^2$

Первая форма (структура) Фостера



$$Y(p) = \tilde{\alpha}_\infty p + \frac{\tilde{\alpha}_0}{p} + \sum_{k=1}^N \frac{2\tilde{\alpha}_k p}{p^2 + \tilde{\omega}_k^2}$$

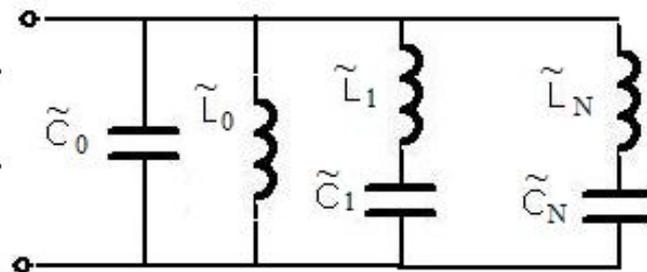
$\tilde{\alpha}_\infty, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_k$ - вычеты $Y(p)$ в полюсах $p = \infty, p = 0$ и $p = j\tilde{\omega}_k$

Первый член разложения – ёмкостная проводимость ($\tilde{C}_0 = \tilde{\alpha}_\infty$),

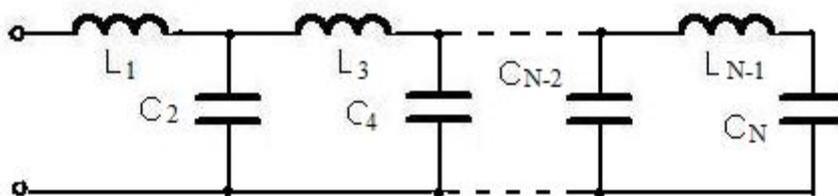
второй – индуктивная проводимость ($\tilde{L}_0 = 1/\alpha_0$),

а каждое из слагаемых $\frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_k^2}$ - последовательное соединение \tilde{C}_k и \tilde{L}_k
 ($\tilde{L}_k = 1/2 \tilde{\alpha}_k, C_k = 2\tilde{\alpha}_k / \tilde{\omega}_k^2$)

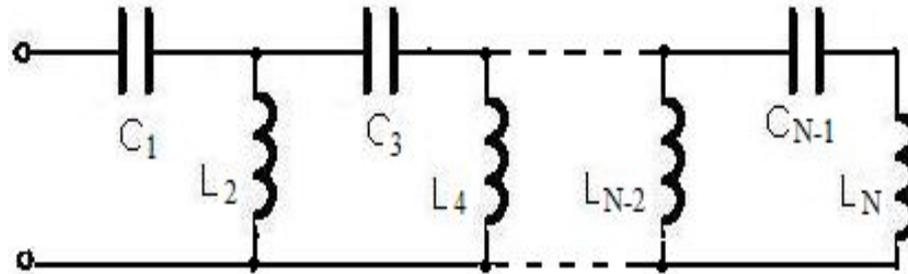
Вторая форма (структура) Фостера



Первая каноническая форма (структура) Кауэра имеет вид:



Вторая каноническая форма (структура) Кауэра содержит ёмкости в продольных и индуктивности в поперечных ветвях.



Пусть

$$H(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

Тогда, если $m > n$, то

$$Z(p) = A_1 p + \frac{M_1(p)}{N(p)} = A_1 p + \frac{1}{\frac{N(p)}{M_1(p)}}$$

Произведя деление

$$\frac{N(p)}{M_1(p)} = A_2 p + \frac{N_2(p)}{M_1(p)}$$

запишем выражение для $Z(p)$ в следующем виде

$$Z(p) = A_1p + \frac{1}{A_2p + \frac{N_2(p)}{M_1(p)}} = A_1p + \frac{1}{A_2p + \frac{N_2(p)}{M_1(p)}}$$

$$= A_1p + \frac{1}{A_2p + \frac{1}{\frac{M_1(p)}{N_2(p)}}}$$

Продолжая деление многочлена до нулевого остатка, получим

$$Z(p) = A_1p + \frac{1}{A_2p + \frac{1}{A_3p + \frac{1}{A_4p + \frac{1}{A_5p + \frac{1}{\dots}}}}}$$

Этому разложению соответствует первая каноническая форма Кауэра.

Если же при разложении в цепную дробь осуществлять деление относительно p^{-1} , т.е. на каждом шаге исключить слагаемое минимальной степени,

$$z(p) = \frac{1}{B_1p} + \frac{1}{\frac{1}{B_2p} + \frac{1}{\frac{1}{B_3p} + \frac{1}{\frac{1}{B_4p} + \frac{1}{\dots}}}}}$$

то получим реализацию в виде второй схемы Кауэра.

Если $m < n$, то разложению в цепную дробь следует подвергнуть входную проводимость

$Y(p)$.

$$Y(p) = B_1 p + \frac{1}{B_2 p + \frac{1}{B_3 p + \frac{1}{B_4 p + \frac{1}{B_5 p + \frac{1}{\dots}}}}}$$

Это разложение задаёт ещё одну каноническую структуру Кауэра

Синтез четырёхполюсников

Условия физической реализуемости

Передаточные функции

$$H(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

УФР для операторных передаточных функций

- 1 Степень полинома числителя не должна превышать степени полинома знаменателя.
2. Полином знаменателя должен быть полиномом Гурвица.

УФР для модуля и аргумента комплексной передаточной характеристики

$$H(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}$$

$$H(j\omega) = \frac{P_1(\omega) + jP_2(\omega)}{Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)}$$

$$P_1(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots$$

$$P_2(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots$$

$$Q_1(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots$$

$$Q_2(\omega) = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}{Q_1^2(\omega) + Q_2^2(\omega)}}$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}{Q_1^2(\omega) + Q_2^2(\omega)} = \\ &= \frac{c_m\omega^{2m} + c_{m-1}\omega^{2(m-1)} + \dots + c_1\omega^2 + c_0}{d_n\omega^{2n} + d_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \dots + d_1\omega^2 + d_0} \end{aligned}$$

УФР квадрата модуля комплексной передаточной характеристики

1.) $|H(j\omega)|^2$ - чётная дробно-рациональная функция;

2.) • $m \leq n$

3.) • полиномы числителя и знаменателя неотрицательны на вещественной полуоси.

4.) • $|H(j\omega)|^2$ ограничена при изменении частоты от 0 до ∞

$$H(j\omega) = \frac{(P_1 Q_1 + P_2 Q_2) + j(P_2 Q_1 - P_1 Q_2)}{Q_1^2 + Q_2^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg D(\omega)$$

$$D(\omega) = \frac{P_2 Q_1 - P_1 Q_2}{P_1 Q_1 + P_2 Q_2}$$

$D(\omega)$ называется функцией угла или тангенс-функцией

УФР для тангенс-функции формулируются следующим образом:

- 1). $D(\omega)$ - нечётная дробно-рациональная функция;
- 2). коэффициенты $D(\omega)$ должны быть вещественными.

УФР временных функций цепи

$$h(t) \div \frac{1}{p} H(p), \quad h_\delta(t) \div H(p)$$

$$Ae^{-\alpha t};$$

$$A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

$$(B_1 + B_2 t + \dots + B_s t^{(s-1)}) e^{-\alpha t}$$

$$(C_1' \cos \omega t + C_1'' \sin \omega t + \dots + C_s' t^{(s-1)} \cos \omega t + C_s'' t^{(s-1)} \sin \omega t) e^{-\alpha t}$$

Если все коэффициенты в приведенных выражениях вещественны и $\alpha > 0$, то

импульсная и переходная характеристики удовлетворяют УФР.

Задача реализации в синтезе четырёхполюсников

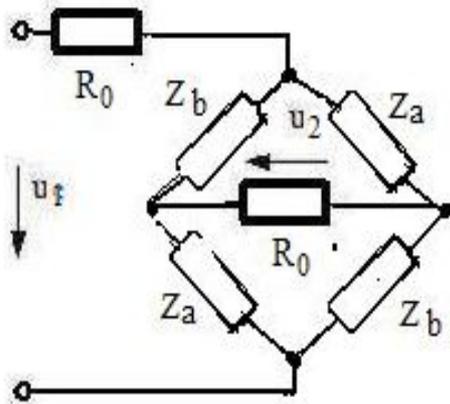
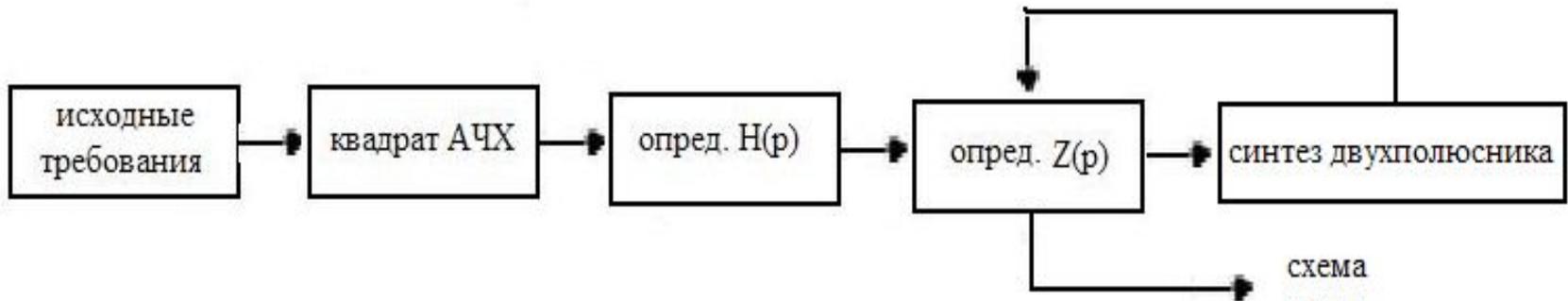
$$|H(j\omega)|^2 = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \cdot |H(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} = H(j\omega) \cdot H(-j\omega)$$

$$|H(p)|^2 = H(p) \cdot H(-p)$$

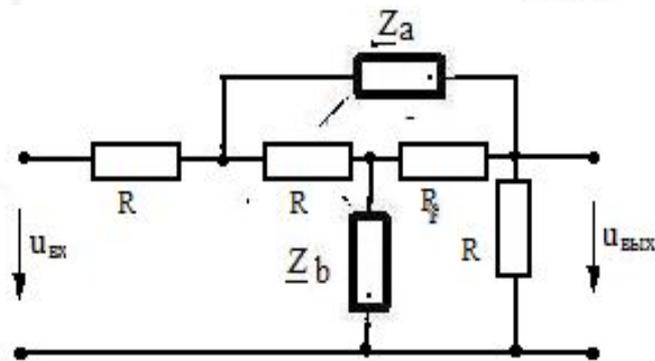
$$H(p) = k \frac{\prod_{k=1}^m (p - \tilde{p}_k)}{\prod_{k=1}^n (p - p_k)}$$

Порядок определения операторной передаточной функции по квадрату её передаточной АЧХ

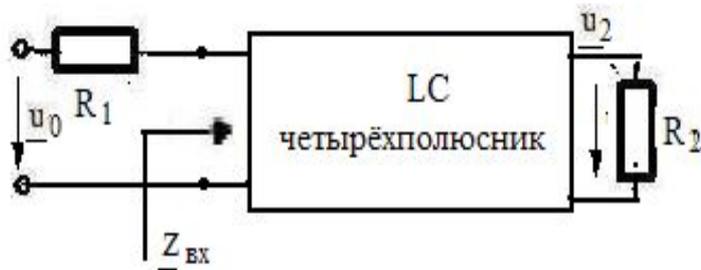
- 1) В выражении для $|H(p)|^2$ выполнить замену $\omega = -jp$.
- 2) • Определить все нули и полюсы. Полюсы, лежащие в левой полуплоскости комплексной плоскости, отнести к $H(p)$.
- 3) • Если на ФЧХ никаких ограничений не накладывается, то и нули выбираются • в левой полуплоскости.



мостовые схемы с постоянным входным сопротивлением



симметричные Т-перекрытые схемы с постоянным характеристическим сопротивлением



реактивные лестничные четырёхполюсники, нагруженные резистивными сопротивлениями

$$I_1^2 \operatorname{Re}[z_{\text{BX}}(j\omega)] = \frac{U_2^2}{R_2} \quad I_1 = \frac{U_0}{|z_{\text{BX}} + R_1|}$$

$$\frac{4U_2^2 R_1}{U_0^2 R_2} = \frac{4R_1 \operatorname{Re}[z_{\text{BX}}(j\omega)]}{|z_{\text{BX}} + R_1|^2}$$

$$\frac{|z_{\text{BX}} + R_1|^2 + |R_1 - z_{\text{BX}}|^2}{|z_{\text{BX}} + R_1|^2} = 1 - \frac{|R_1 - z_{\text{BX}}|^2}{|z_{\text{BX}} + R_1|^2}$$

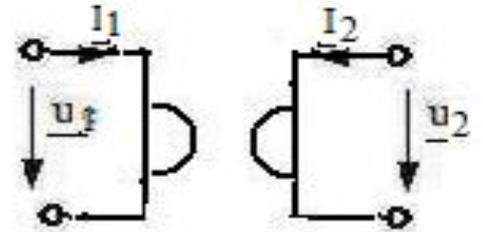
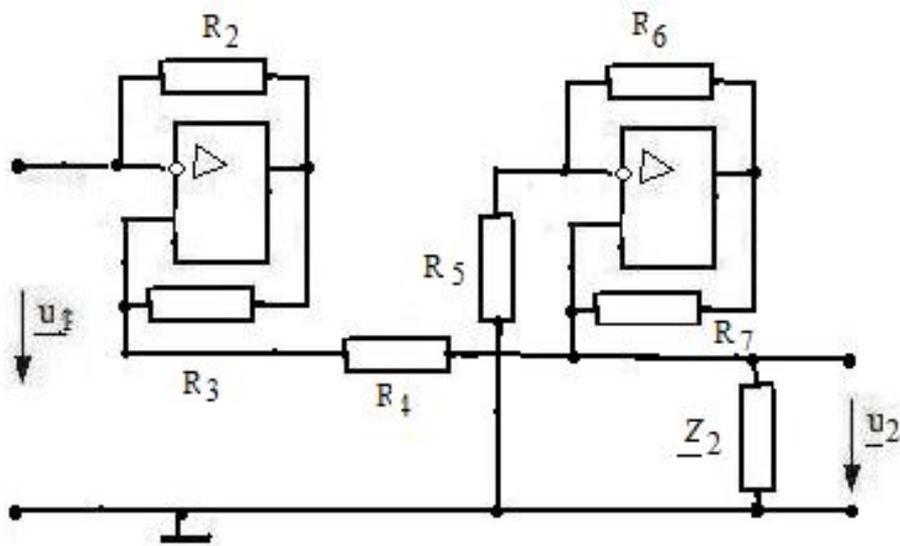
$$\left| \frac{R_1 - z_{\text{BX}}}{R_1 + z_{\text{BX}}} \right|^2 = 1 - |H_p(j\omega)|^2$$

. ARC цепи

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_1 = G \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_2 = -G \underline{U}_1$$



$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = -\frac{\underline{I}_2}{G^2 \underline{U}_2} = \frac{1}{G^2 \underline{Z}_2}$$

2. Каскадная
реализация.

Электрические частотные фильтры

Определение и классификация

Электрический фильтр – линейный четырёхполюсник, предназначенный для выделения из состава сложного воздействия частотных составляющих, расположенных в заданной полосе частот, и

подавления тех составляющих, которые расположены в других частотных диапазонах. В некоторой

полосе частот сравнительно невелико (0,5-3) дБ, а в другой полосе частот, за пределами первой,

имеет во множестве частот называется а частот называется

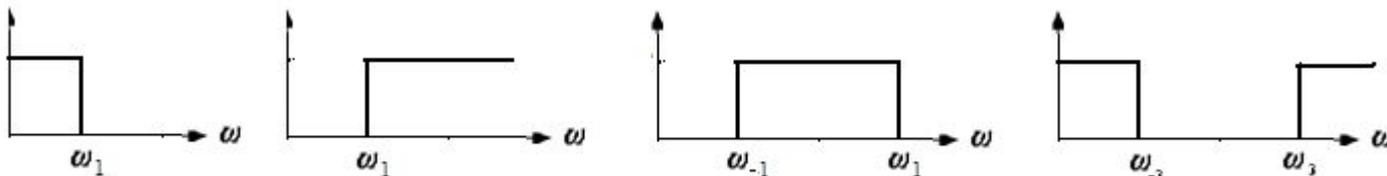
$$A_p = 20 \lg \left[\frac{1}{2H_U(\omega)} \sqrt{\left| \frac{Z_{H2}}{Z_{H1}} \right|} \right] = -20 \lg |H_p|$$

Электрические фильтры

классифицируют:

По взаимному расположению полос пропускания и задерживания. Различают фильтры:

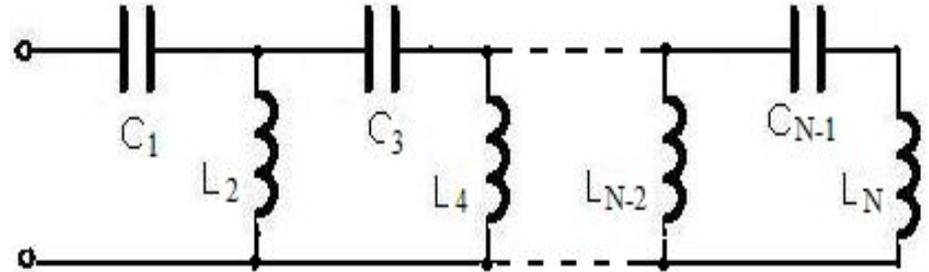
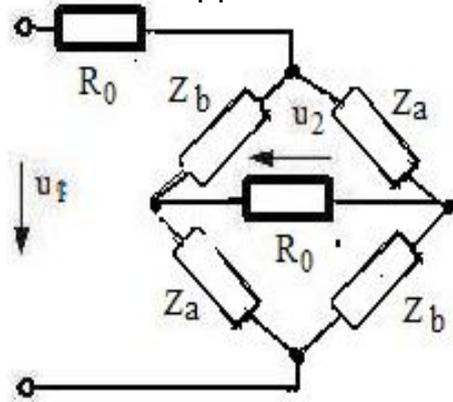
нижних частотных фильтры



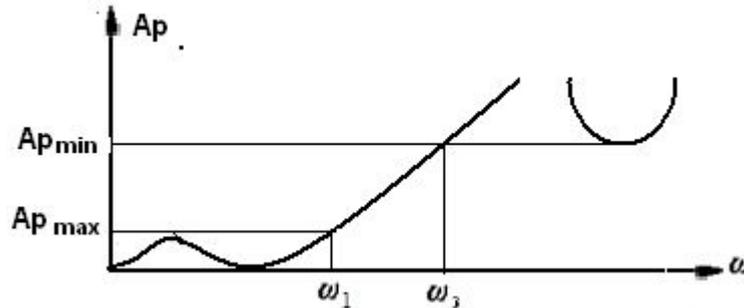
По виду элементов, из которых они строятся. Различают LC фильтры, RC фильтры, фильтры с пьезоэлектрическими и магнитострикционными резонаторами и т.д.

По характеру процессов в фильтре различают аналоговые, дискретно-аналоговые и цифровые фильтры

По конфигурации схемы фильтра. Различают фильтры мостовой структуры, лестничные и т.д.



Существует деление фильтров на активные и пассивные. Зависимость рабочего ослабления от частоты для реального ФНЧ имеет вид:



В полосе пропускания рабочее ослабление не остаётся постоянным, а изменяется от нулевого

значения до некоторой (заданной) величины

Допустимый размах колебаний рабочего

Ослабления в полосе пропускания ΔA_p в полосе задерживания величина рабочего ослабления и

обозначается как ΔA_p падает

Ниже некоторой (заданной) минимально допустимой величины $A_{p\text{min}}$. Величина рабочего ослабления A_p в реальном фильтре может изменяться плавно, или же наблюдаться на или меньшем, не равном нулю интервале частот. Этот интервал частот, заключённых между границей полосы пропускания ω_1 и границей полосы задерживания ω_3 называется переходной полосой.

Постановка задачи синтеза электрического частотного фильтра и пути её решения

Предполагается, что фильтр двусторонне нагружен на резистивные сопротивления R_1 и R_2 , т.е. схема включения фильтра имеет вид

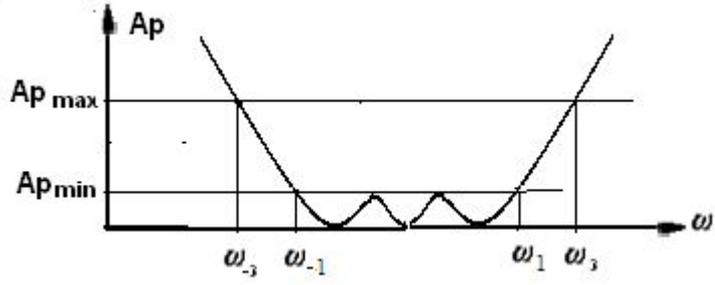


$$H_p(p) = \frac{2U_2(p)}{U_1(p)} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad A_p = -20 \lg |H_p(p)|$$

Основными параметрами рабочей передаточной АЧХ и частотной зависимости рабочего ослабления фильтра являются:

- граничные частоты полосы пропускания - ω_1 и ω_2 ;
- граничные частоты полосы задерживания - ω_{-3} и ω_3 ;
- неравномерность рабочего ослабления в полосе пропускания ΔA_p ;
- минимально допустимая величина ослабления в полосе задерживания $A_{p\text{min}}$

Значения этих параметров совместно с величинами нагрузочных сопротивлений R_1 и R_2 и определяют исходные условия при синтезе электрического частотного фильтра.



В основе синтеза любого (НЧ, ВЧ, ПФ, РФ) фильтра лежит решение задачи синтеза соответствующего фильтра нижних частот, который называют низкочастотным прототипом.

Низкочастотный фильтр-прототип – это фильтр нижних частот с нормированными значениями сопротивлений и частоты.

$\tilde{z} = \frac{z}{R_{норм}}$ - нормированное комплексное сопротивление;

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{норм}}$ - нормированная частота;

$\tilde{L} = \frac{\omega_{норм} L}{R_{норм}}$ - нормированная индуктивность;

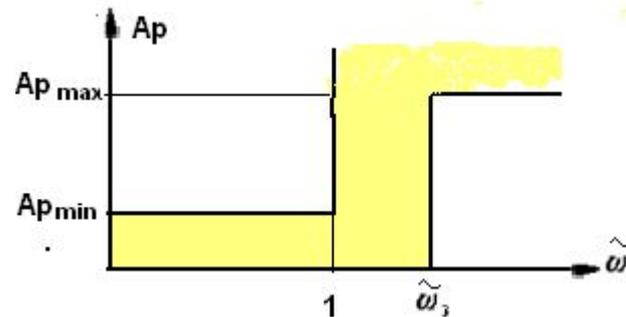
$\tilde{C} = \omega_{норм} C R_{норм}$ - нормированная ёмкость;

$\tilde{R} = \frac{R}{R_{норм}}$ - нормированное сопротивление.

$\omega_{\text{норм}}$ и $R_{\text{норм}}$ выбирают произвольно. Обычно полагают, $\omega_{\text{норм}} = \omega_1$
 $R_{\text{норм}} = R_2$ что

Преобразование фильтра-прототипа в фильтр с требуемыми свойствами заключается в денормировании элементов НЧ фильтра-прототипа и в преобразовании шкалы частот НЧ фильтра.

Аппроксимация характеристик фильтров нижних частот



Квадрат рабочей передаточной АЧХ фильтра представим в виде

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{c_m \omega^{2m} + c_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + c_1 \omega^2 + c_0}{d_n \omega^{2n} + d_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + d_1 \omega^2 + d_0}$$

Рабочее ослабление определяется

выражением

$$A_p = -10 \lg \frac{c_m \omega^{2m} + c_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + c_1 \omega^2 + c_0}{d_n \omega^{2n} + d_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + d_1 \omega^2 + d_0}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Psi^2(\Omega)} \quad A_p = 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \Psi^2(\Omega)]$$

$\Psi(\Omega)$ - функция фильтрации, дробно-рациональная функция с вещественными коэффициентами; требования к ней.

ε - коэффициент неравномерности ослабления

$$|\Psi(\Omega)| = \begin{cases} \leq 1 & \text{в полосе пропускания} \\ \gg 1 & \text{в полосе задерживания} \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи аппроксимации сводится к выбору функции фильтрации и значения коэффициента неравномерности коэффициента ослабления, а также минимального порядка фильтра,

При котором удовлетворяются заданные требования к характеристикам фильтра.

Задача реализации. Действительные и целые рациональные фильтры.

В качестве функции фильтрации часто используют полиномы Баттерворта и Чебышева. Фильтры,

полученные на основе такой аппроксимации называют полиномиальными. Если в качестве функции

фильтрации используются другие дробно-рациональные функции, например дробь Золоторёва,

получают фильтры. Для реактивных

$$1 - |H_p(j\Omega)|^2 = \left| \frac{R_1 - Z_{\text{вх}}(j\Omega)}{R_1 + Z_{\text{вх}}(j\Omega)} \right|^2$$

где

имеет место соотношение:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Psi^2(\Omega)}$$

После замены $j\Omega = p$,
получим

$$1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Psi^2(p)} = \left| \frac{R_1 - Z_{\text{вх}}(p)}{R_1 + Z_{\text{вх}}(p)} \right|^2$$

Решив это уравнение относительно $Z_{\text{вх}}(p)$, определим операторное входное сопротивление фильтра

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{N(p) \pm \Psi(p)}{N(p) \mp \Psi(p)}$$

где $N(p)$ - знаменатель операторной передаточной функции

е фильтра

Далее по найденной функции входного сопротивления методом Фостера или Кауэра определяется

схема фильтра и значения её параметров.

Фильтры нижних частот

Баттерворта

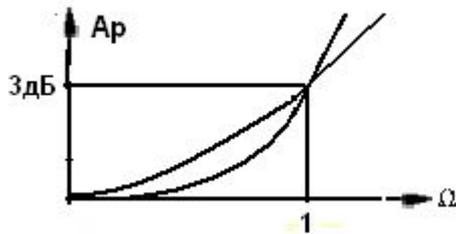
Если в качестве функции фильтрации использовать полиномы Баттерворта

$$\Psi(\Omega) = B_n(\Omega) = \Omega^n$$

то получаются так называемые фильтры Баттерворта.

$$|H_p(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}}$$

$$A_p(\Omega) = 10 \lg [1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}]$$



Для того, чтобы эти характеристики фильтра вписывались в предъявляемые к фильтру требования, необходимо обеспечить

выполнение следующих условий:

$$A_p(\omega) \leq A_{pmax} \quad \forall \quad 0 \leq \omega \leq \omega_1$$

$$A_p(\omega) \geq A_{pmin} \quad \forall \quad \omega \geq \omega_3$$

Синтез

1. Коэффициент неравномерности ослабления

Первое условие выполняется, если имеет место равенство:

$$A_p(\Omega = 1) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2) = A_{pmax}$$

Расчётное соотношение для определения значения коэффициента неравномерности ослабления

в полосе пропускания фильтра имеет вид

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_{pmax}} - 1}$$

2. Порядок фильтра

$$A_p(\Omega = \Omega_3) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \Omega_3^{2n}) \geq A_{pmin}$$

Из этого выражения следует, что

$$n \geq \frac{\lg \left[\frac{10^{0,1A_{pmin}} - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \lg \Omega_3}$$

3. Операторная передаточная функция

$$|H_p(\tilde{p})|^2 = H_p(\tilde{p}) \cdot H_p(-\tilde{p}) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-j\tilde{p})^{2n}}$$

Корни знаменателя обычно вычисляют отдельно для четных и нечетных значений n

чётное

$$\tilde{p}_k = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} \left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi + j \sin \frac{2k-1}{2n} \pi \right)$$

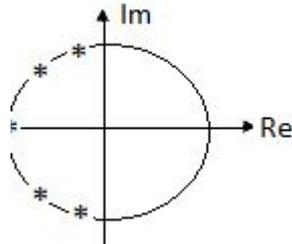
n - нечётное

$$\tilde{p}_k = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} \left(\cos \frac{k}{n} \pi + j \sin \frac{k}{n} \pi \right)$$

Из этих $2n$ корней выбирают n корней, расположенных в левой полуплоскости плоскости p , и записывают выражение для операторной передаточной функции фильтра

$$H_p(\tilde{p}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\tilde{p}^n + b_{n-1} \tilde{p}^{(n-1)} + \dots + b_1 \tilde{p} + b_0}$$

Нуль-полусная диаграмма фильтра Баттерворта имеет вид. Все полюсы расположены на окруж

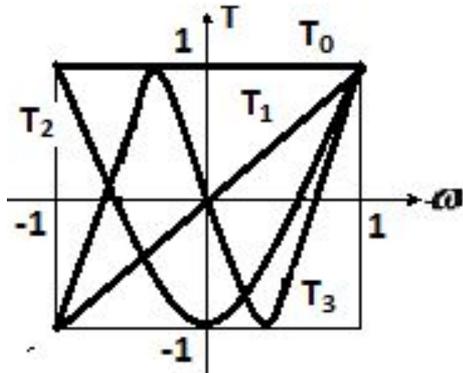


При прочих равных условиях фильтры Баттерворта обеспечивают наибольшую линейность передаточной ФЧХ фильтра.

Фильтры нижних частот

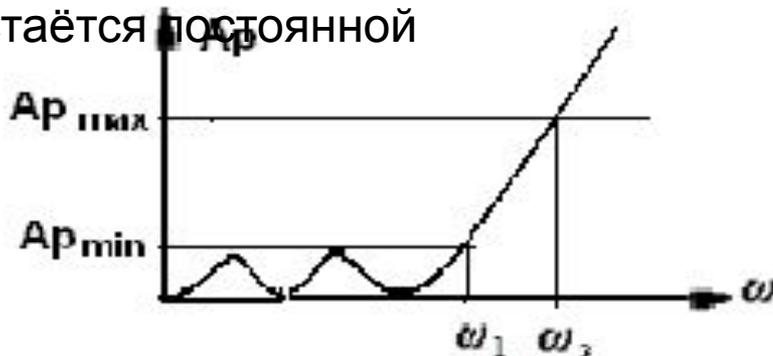
Чебышева

Если в качестве функции фильтрации использовать полиномы Чебышева $T_n(\omega) = T_n(\omega)$, то получаются фильтры Чебышева



$$\begin{aligned}T_0(\omega) &= 1 \\T_1(\omega) &= \omega \\T_2(\omega) &= 2\omega^2 - 1 \\&\dots \dots \dots \\T_n(\omega) &= 2\omega T_{n-1}(\omega) - T_{n-2}(\omega)\end{aligned}$$

Аппроксимация по Чебышеву обеспечивает равномерно наилучшее приближение к аппроксимируемой функции. Эту аппроксимацию иногда называют равноволновым приближением. График частотной зависимости рабочего ослабления фильтра Чебышева имеет в полосе пропускания не монотонный, а колебательный характер, причём амплитуда этих колебаний на всём протяжении полосы пропускания остаётся постоянной



За пределами полосы пропускания рабочее ослабление фильтра с характеристикой Чебышева монотонно возрастает по мере роста частоты.

Синтез

фильтра

1. Коэффициент неравномерности ослабления - ϵ

Определяется по формулам для фильтра Баттерворта. (Частота в выражении Ω для нормирована

2. Порядок

фильтра

За пределами полосы пропускания полиномы Чебышева имеют

вид:

$$T_n(\Omega) = ch(n Arch \Omega)$$

Тогда

$$A_p(\Omega = \Omega_3) = 10lg \left(1 + \epsilon^2 ch^2(n Arch \Omega_3) \right) \geq A_{pmin}$$

Решая это неравенство относительно n ,

получим:

$$n \geq \frac{Arch \left[\frac{\sqrt{10^{0,1A_{pmin}} - 1}}{\epsilon} \right]}{Arch \Omega_3}$$

3. Операторная передаточная функция

$$|H_p(\tilde{p})|^2 = H_p(\tilde{p}) \cdot H_p(-\tilde{p}) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 ch^2(n Arch \tilde{p})}$$

Корни знаменателя имеют

вид:

$$\tilde{p}_k = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{x} - x \right) \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \left(\frac{1}{x} + x \right) \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right)$$

где
е

$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}}$$

Из этих $2n$ корней выбирают n корней, расположенных в левой полуплоскости плоскости p , и

записывают выражение для операторной передаточной функции фильтра

$$H_n(\tilde{p}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)} = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} \tilde{p}^n + b_{n-1} \tilde{p}^{(n-1)} + \dots + b_1 \tilde{p} + b_0}$$



Полюсы операторной передаточной функции фильтра Чебышева расположены

на эллипсе. Среди полиномиальных фильтров они обеспечивают максимальное

~~ослабление при любой частоте полосы задерживания.~~

Чебышева

Выше было установлено, что для полиномиальных фильтров заданные требования выполняются,

если операторное входное сопротивление фильтра равно

$$z_{\text{вх}}(\tilde{p}) = \frac{N(\tilde{p})}{N(\tilde{p}) + \Psi(\tilde{p})}$$

где $N(\tilde{p})$ - знаменатель операторной передаточной функции

Операторные передаточные функции для фильтров Баттерворта и Чебышева уже определены. Следовательно, функция $z_{\text{вх}}(\tilde{p})$ полностью задана. Лестничная структура фильтра и значения параметров её элементов могут быть определены при помощи метода Кауэра.

После определения схемы фильтра-прототипа, осуществляется денормирование схемы, т.е. пересчёт её нормированных значений на заданную ширину полосы пропускания и величину нагрузочных сопротивлений.

Денормирование производят при помощи формул:

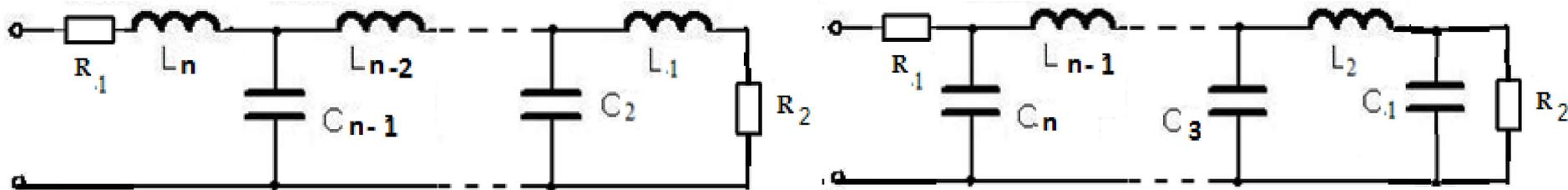
$$R = \tilde{R} \cdot R_{\text{норм}} \quad L = \frac{\tilde{L} \cdot R_{\text{норм}}}{\omega_1} \quad C = \frac{\tilde{C}}{\omega_1 R_{\text{норм}}}$$

Это последняя операция в задаче синтеза полиномиальных ФНЧ.

Реализация ФНЧ по каталогам

В каталогах схем фильтров содержатся нормированные значения параметров элементов для ФНЧ различных порядков и различных типов. Таблицы, в которые сведены результаты расчётов, выглядят следующим образом.

n	\tilde{R}_1	\tilde{R}_2	\tilde{R}_3	\tilde{R}_4	\tilde{R}_5
2	1,41	1,41			
3	1,00	2,00	1,00		
4	0,76	1,85	1,85	0,76	
n	\tilde{R}_1	\tilde{R}_2	\tilde{R}_3	\tilde{R}_4	\tilde{R}_5



В соответствующих таблицах для фильтров Чебышева значения параметров элементов

приведены для заданных (фиксированных) значений рабочего ослабления в полосе

Процедура синтеза ФНЧ с помощью
каталога

Исходные данные: граничная частота полосы пропускания - ω_1 , граничная частота полосы задерживания - ω_3 , неравномерность рабочего ослабления - A_{pmax} , Минимально допустимая величина ослабления - A_{pmin} , величины нагрузочных сопротивлений - R_1 и R_2 .

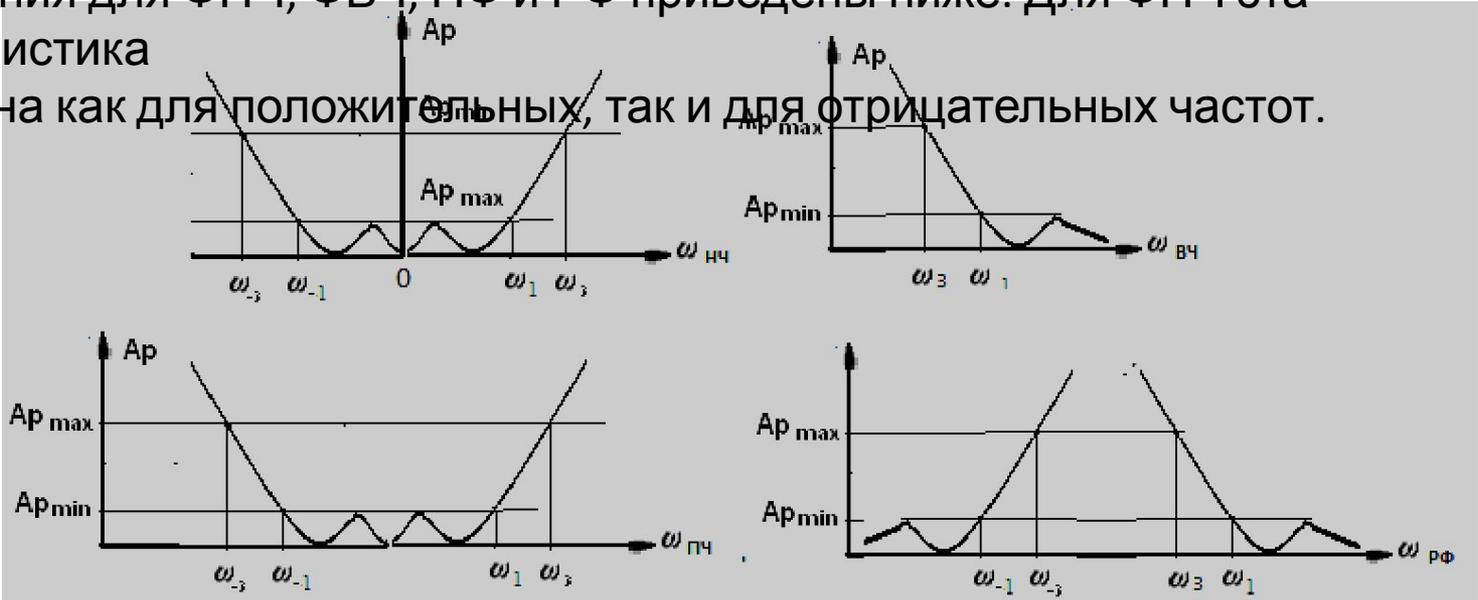
1. Нормирование частоты так чтобы $\Omega_1 = 1$.
2. Выбор типа характеристики фильтра и определение её порядка. Для этого вычисляют и сравнивают между собой порядки передаточных характеристик типов фильтров, имеющих в каталоге, выбирают тип, для которого порядок минимален.
3. Из каталога выбирается соответствующая схема фильтра.
4. Денормирование выбранной схемы, т.е. пересчёт её нормированных значений на требуемую ширину полосы пропускания и величину нагрузочных сопротивлений.
5. Расчёт рабочего ослабления фильтра и построение графика $A_p(\omega)$.

Переход от фильтров нижних частот к другим типам фильтров.

Преобразование частоты.

Фильтры других типов могут быть получены, если использовать так называемое преобразование шкалы частот ФНЧ-прототипа. Частотные зависимости рабочего

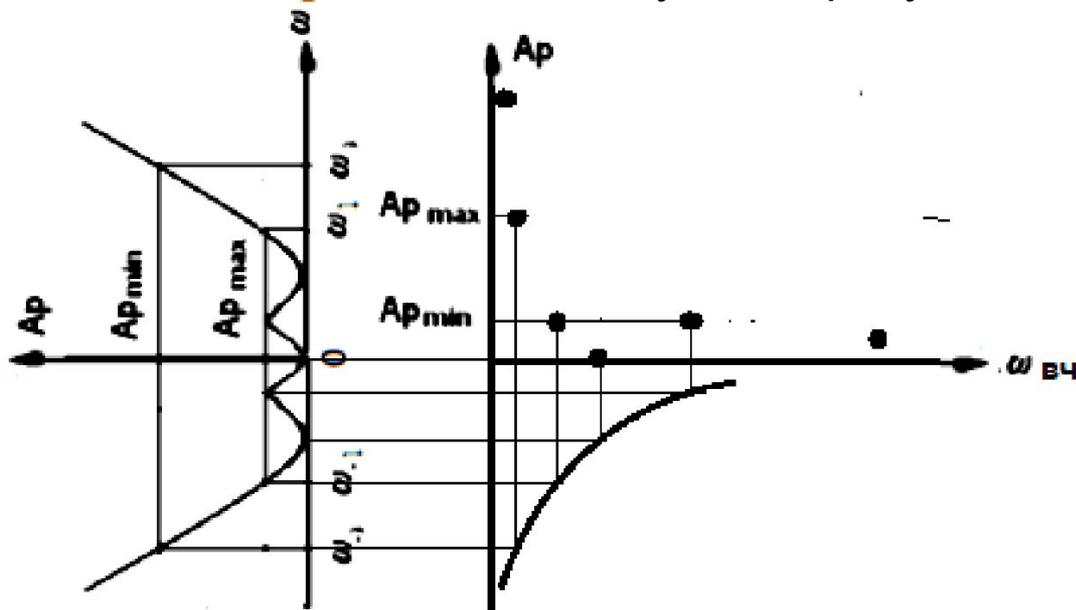
ослабления для ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ приведены ниже. Для ФНЧ эта характеристика построена как для положительных, так и для отрицательных частот.



Преобразовать характеристику ФНЧ в характеристику ФВЧ можно с помощью замены

переменной $\omega_{нч} = - \frac{\omega_1}{\omega_{вч}}$ для нормированной частоты $j\tilde{\omega}_{нч} = \frac{1}{j\tilde{\omega}_{вч}}$, $\tilde{\omega}_{нч} \cdot \tilde{\omega}_{вч} = 1$

Преобразование частотной зависимости рабочего ослабления ФНЧ в соответствующую зависимость для ФВЧ показано на следующем рисунке



Чтобы из частотной зависимости рабочего ослабления ФНЧ получить частотную зависимость рабочего ослабления для полосового фильтра, необходимо выполнить преобразование частоты следующего вида

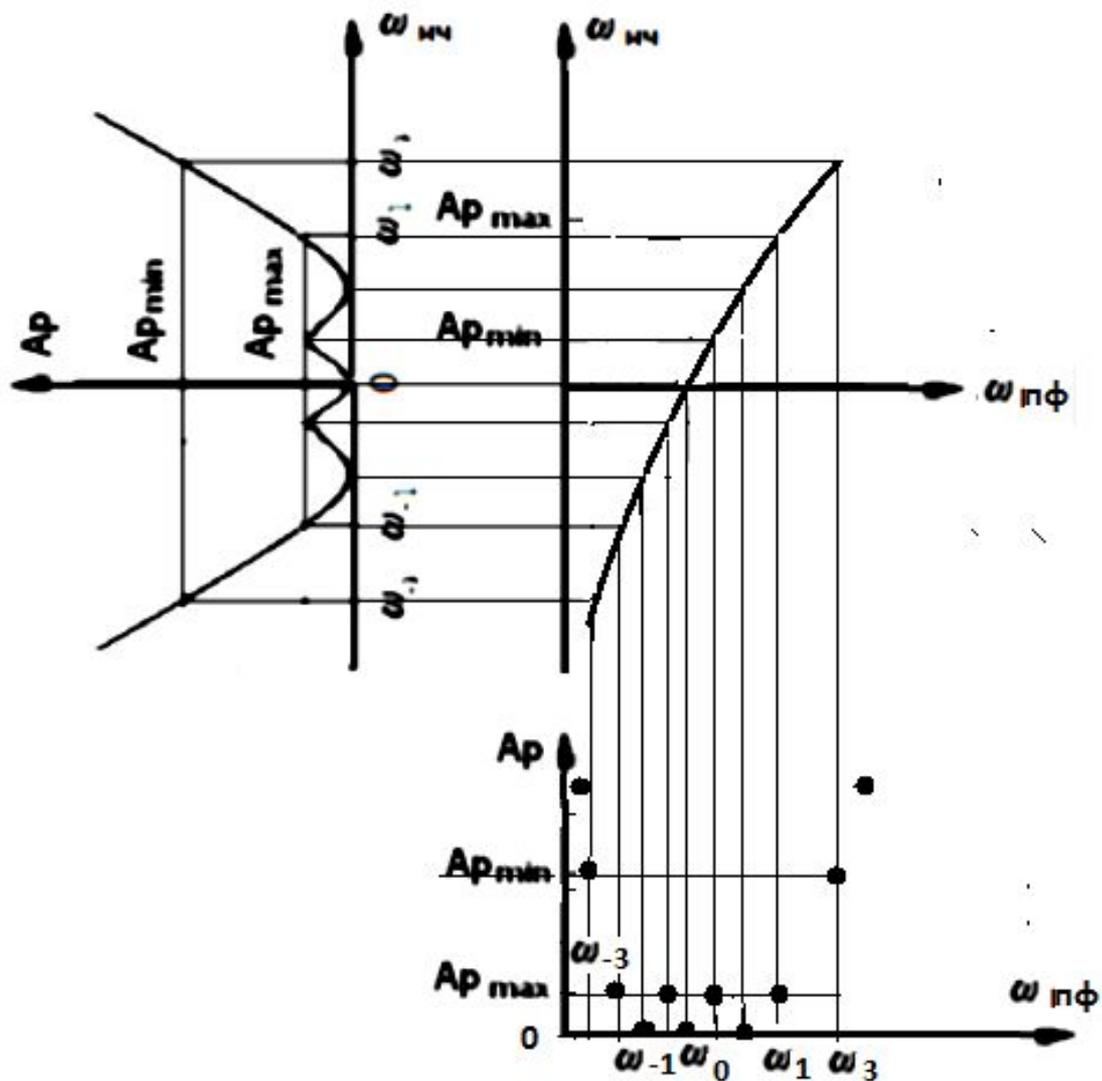
$$\omega_{\text{НЧ}} = \frac{\omega_{\text{пф}}^2 - \omega_0^2}{\omega_{\text{пф}}} = \omega_0 \left(\frac{\omega_{\text{пф}}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{\text{пф}}} \right)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{-1}\omega_1} = \sqrt{\omega_{-3}\omega_3} \quad p_{\text{НЧ}} = p_{\text{пф}} + \frac{\omega_0^2}{p_{\text{пф}}}$$

$\omega_{-1}\omega_1$ – граничные частоты полосы пропускания полосового фильтра, $\omega_{-3}\omega_3$ –

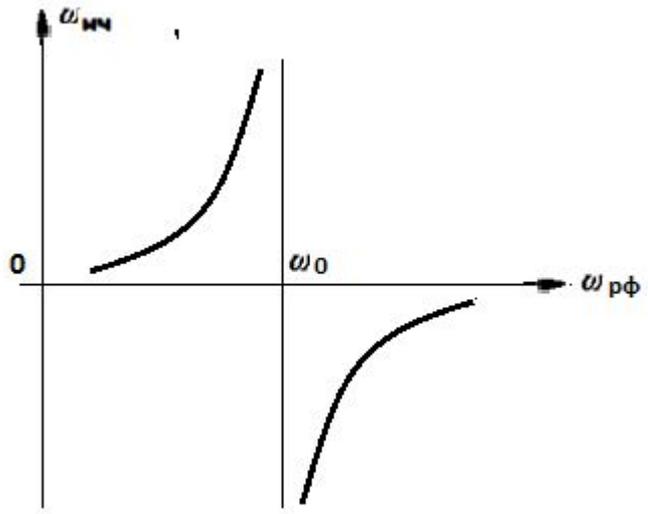
границные частоты полосы задерживания.



Частотную зависимость рабочего ослабления для режекторного фильтра можно получить из соответствующей зависимости для ФНЧ, если использовать преобразование частоты следующим образом:

$$\omega_{\text{НЧ}} = \frac{\omega_0^2 \omega_{\text{рф}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{рф}}^2},$$

$$p_{\text{НЧ}} = \frac{1}{1/p_{\text{рф}} - p_{\text{рф}}/\omega_0^2}$$



Схемы фильтров

При использовании преобразования переходит в ёмкостное сопротивление

$$\omega_{\text{НЧ}} = - \frac{\omega_1^2}{\omega_{\text{ВЧ}}} \text{ индуктивное сопротивление ФНЧ}$$

$$j\omega_{\text{НЧ}}L_{\text{НЧ}} = j \left(-\omega_1^2/\omega_{\text{ВЧ}} \right) L_{\text{НЧ}} = \omega_1^2 / \left(j\omega_{\text{ВЧ}}/L_{\text{НЧ}} \right) = 1/j\omega_{\text{ВЧ}}C_{\text{ВЧ}}$$

$$C_{\text{ВЧ}} = 1/\omega_1^2 L_{\text{НЧ}}$$

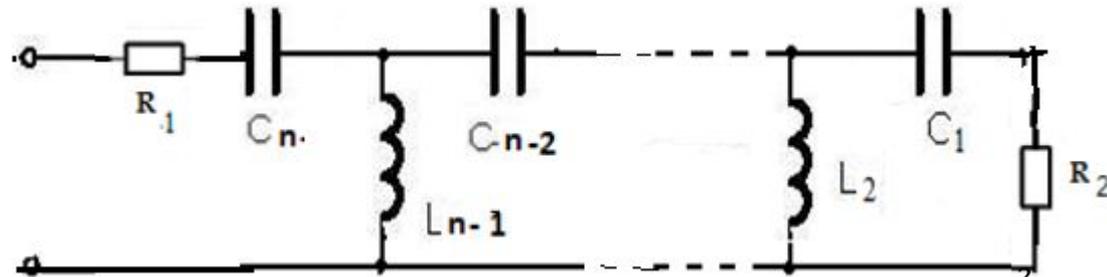
Ёмкостная проводимость

$$j\omega_{\text{НЧ}}C_{\text{НЧ}} \text{ переходит в индуктивную проводимость } 1/j\omega_{\text{ВЧ}}L_{\text{ВЧ}}$$

$$\text{т.е. } L_{\text{ВЧ}} = 1/\omega_1^2 C_{\text{НЧ}}$$

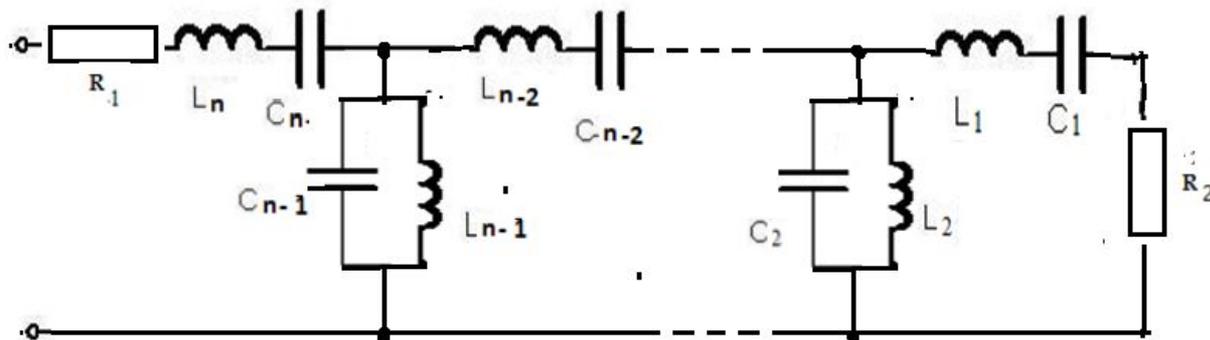
И схема ФВЧ приобретает

ВИД



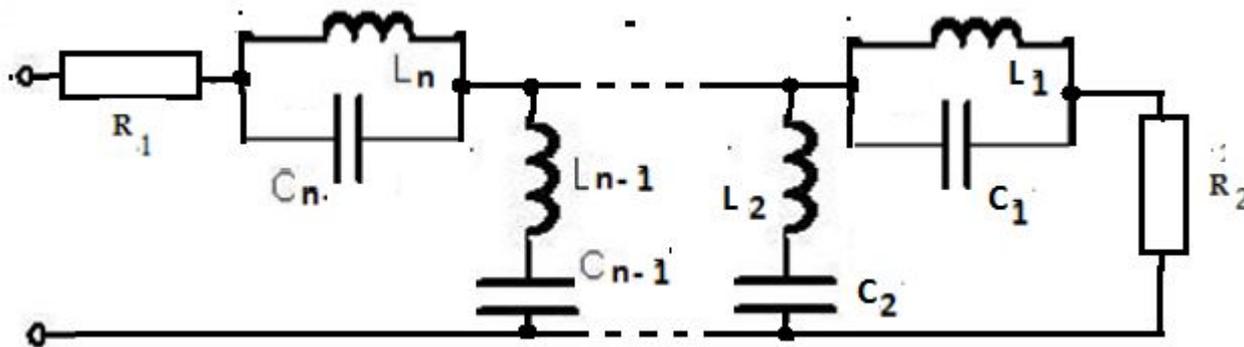
При использовании преобразования частоты вида $\omega_{\text{НЧ}} = \frac{\omega_{\text{пф}}^2 - \omega_0^2}{\omega_{\text{пф}}}$ индуктивное сопротивление ФНЧ $j\omega_{\text{НЧ}}L_{\text{НЧ}}$ переходит в сопротивление последовательного колебательного контура $(j\omega_{\text{пф}}L_{\text{пф1}} + 1/j\omega_{\text{пф}}C_{\text{пф1}})$, где $L_{\text{пф1}} = L_{\text{НЧ}}$, $C_{\text{пф1}} = 1/\omega_0^2 L_{\text{НЧ}}$, а ёмкостная проводимость ФНЧ переходит в проводимость параллельного колебательного контура с элементами: $C_{\text{пф2}} = C_{\text{НЧ}}$, $L_{\text{пф2}} = 1/\omega_0^2 C_{\text{НЧ}}$, $L_{\text{пф2}} = 1/\omega_0^2 C_{\text{НЧ}}$.

Схема полосового фильтра имеет вид:



Получить схему режекторного фильтра можно, если воспользоваться соответствующей формулой преобразования частоты: $\omega_{\text{НЧ}} = \frac{\omega_0^2 \omega_{\text{рф}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{рф}}^2}$. После несложных преобразований можно убедиться в том, что индуктивность ФНЧ преобразуется в режекторном фильтре в параллельный колебательный контур с резонансной частотой ω_0 , а ёмкость – в последовательный колебательный контур с той же резонансной частотой.

Схема режекторного фильтра имеет вид:

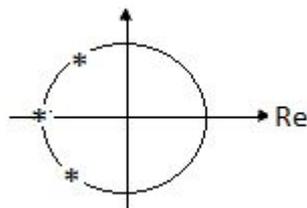


Операторные передаточные функции

1. Операторная передаточная функция ФНЧ

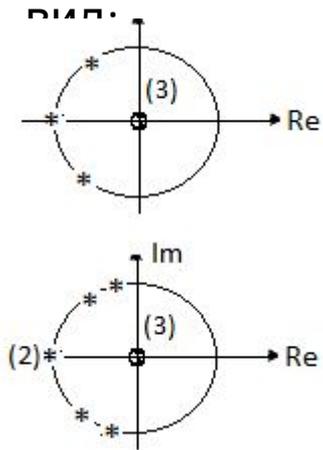
$$H_{\text{НЧ}}(\tilde{p}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p}_{\text{НЧ}} - \tilde{p}_{k\text{НЧ}})} = k_{\text{НЧ}} \frac{1}{\tilde{p}_{\text{НЧ}}^n + b_{n-1} \tilde{p}_{\text{НЧ}}^{(n-1)} + \dots + b_1 \tilde{p}_{\text{НЧ}} + b_0}$$

Нуль-полусная диаграмма



2. Операторная передаточная функция ФВЧ получается из соответствующей характеристики ФНЧ путём замены $p_{\text{НЧ}}$ на $p_{\text{ВЧ}}$. Выражение для $p_{\text{ВЧ}}$ следует из соответствующей формулы преобразования частоты: $p_{\text{НЧ}} = \omega_1^2 / p_{\text{ВЧ}}$.

Нуль-полюсная диаграмма ФВЧ имеет



3. Операторная передаточная функция ПФ получается из характеристики ФНЧ путём замены $p_{\text{НЧ}}$ на $p_{\text{ПФ}}$. Выражение для $p_{\text{ПФ}}$ следует из соответствующей формулы преобразования частоты: $p_{\text{НЧ}} = p_{\text{ПФ}} + \frac{\omega_0^2}{p_{\text{ПФ}}}$.

Нуль-полюсная диаграмма ПФ имеет вид:

4. Операторная передаточная функция ПФ получается из характеристики ФНЧ путём замены $p_{\text{НЧ}}$ на $p_{\text{ПФ}}$. Выражение для $p_{\text{ПФ}}$ следует из соответствующей формулы преобразования частоты: $p_{\text{НЧ}} = p_{\text{ПФ}} + \frac{\omega_0^2}{p_{\text{ПФ}}}$.

Порядок синтеза ФВЧ, полосовых и режекторных фильтров

1. По заданным требованиям к синтезируемому фильтру определяют требования к ФНЧ-прототипу.

Для ФВЧ параметры прототипа с учётом соответствующего преобразования частоты определяются как: $\omega_{1нч} = \omega_{1вч}$, $\omega_{3нч} = \omega_{1вч}^2 / \omega_{3вч}$, A_{pmax} и A_{pmin} такие же, что и у ФВЧ.

Для полосового фильтра параметры прототипа с учётом соответствующего преобразования частоты определяются как: $\omega_{3нч} = \omega_{3пф} - \omega_{-3пф}$, $\omega_{1нч} = \omega_{1пф} - \omega_{-1пф}$, A_{pmax} и A_{pmin} такие же, что и у полосового фильтра.

Для режекторного фильтра параметры прототипа с учётом соответствующего преобразования частоты определяются как:

$\omega_{1нч} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{1рф} - \omega_{-1рф}}$, $\omega_{3нч} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{3рф} - \omega_{-3рф}}$, A_{pmax} и A_{pmin} такие же, что и у режекторного фильтра.

У всех фильтров величины сопротивлений R_1 и R_2 сохраняются неизменными.

2. Далее повторяются п.п. 1-4 синтеза ФНЧ. В результате получаем схему

ФНЧ прототипа

3. Осуществляется преобразование схемы фильтра-прототипа в схему заданного

фильтра. Поскольку преобразованию подвергается нормированная схема, то в

Результате получаем нормированную схему заданного фильтра.

4. Изменить уровень сопротивления и масштаб частоты (денормирование) с целью

получения заданных значений сопротивления нагрузки и граничной частоты

полосы пропускания.
5. Построить график частотной зависимости рабочего ослабления прототипа и при

помощи соответствующего преобразования частоты пересчитать его для

заданного

Активные RC -

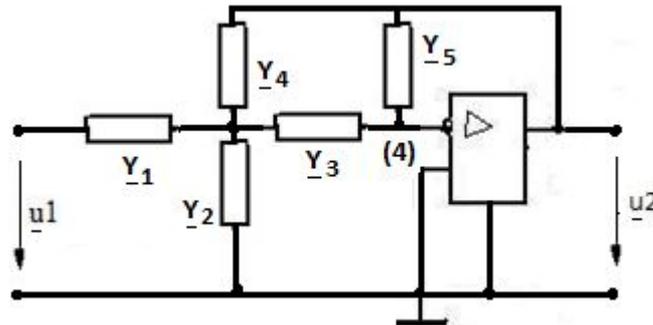
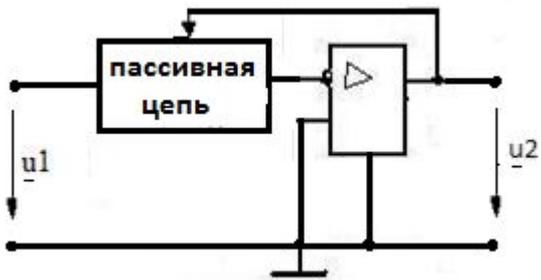
фильтра.

фильтры

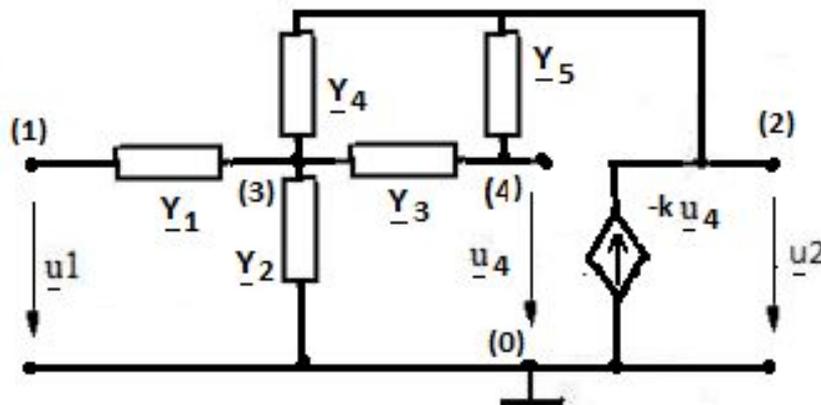
Фильтры, представляющие собой комбинацию пассивной RC цепи и активного элемента, называются активными RC фильтрами (ARC фильтры). В качестве активного элемента чаще всего используются операционные усилители.

В основном используется каскадная реализация активных RC фильтров, т.е. заданную операторную передаточную функцию разбивают на произведение передаточных функций не выше второго порядка $H(p) = \prod H_k(p)$, каждую передаточную функцию $H_k(p)$ реализуют в виде ARC звена первого или второго порядков. Затем эти звенья соединяют каскадно и получают схему фильтра. Существует значительное количество активных схем, реализующих передаточные функции первого и второго порядков. Можно пользоваться уже известными схемами, а можно и самостоятельно определить требуемую схему звена. Один из способов решения этой задачи заключается в следующем.

Общая схема звена показана ниже. На рисунке рядом структура пассивной RC цепи конкретизирована. Определим операторную передаточную функцию этой цепи. Для



Определим операторную передаточную функцию этой цепи. Для этого прежде всего необходимо нарисовать схему замещения цепи и любым методом определить напряжение $U_2(p)$. Комплексная схема замещения анализируемой цепи имеет вид:



В качестве базисного выберем узел с номером (0) и запишем систему узловых уравнений.

$$\underline{U}_{03} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) - \underline{U}_{01} \underline{Y}_1 - \underline{U}_{02} \underline{Y}_4 - \underline{U}_{04} \underline{Y}_3 = 0$$

$$\underline{U}_{04} (\underline{Y}_3 + \underline{Y}_5) - \underline{U}_{03} \underline{Y}_1 - \underline{U}_{02} \underline{Y}_5 = 0$$

Учитывая, что $\underline{U}_{02} = -k_1 \underline{U}_{04}$ и $k_1 = \infty$, после решения этой системы уравнений, получим:

$$\underline{U}_{02} = \underline{U}_2 = \frac{-\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_5 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_3 \underline{Y}_4} \underline{U}_1$$

Переходя к операторным напряжениям и проводимостям, получим

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_5 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_3 \underline{Y}_4} \quad (*)$$

Передаточная функция полиномиального фильтра второго порядка имеет вид

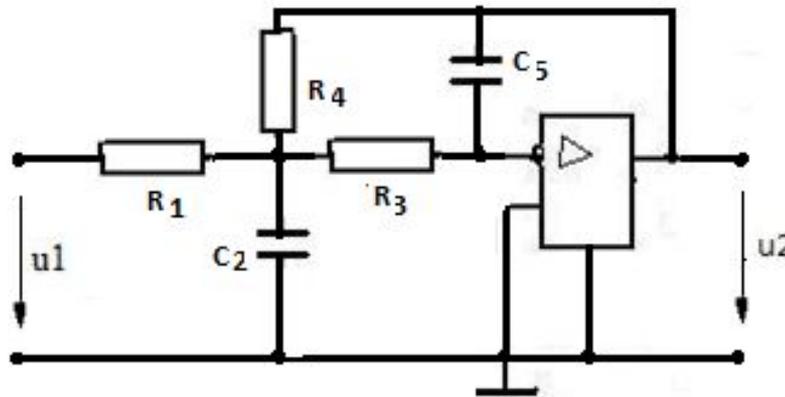
$$H(p) = k \frac{1}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \quad (**)$$

Перепишем выражение (*) в следующем виде

$$H(p) = - \frac{1}{\frac{\underline{Y}_5}{\underline{Y}_3} + \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_5}{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3} + \frac{\underline{Y}_5}{\underline{Y}_1} + \frac{\underline{Y}_5 \underline{Y}_4}{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3} + \frac{\underline{Y}_4}{\underline{Y}_1}}$$

Для реализации передаточной функции (***) в последнем выражении проводимости \underline{Y}_1 , \underline{Y}_3 и \underline{Y}_4 выбрать резистивными - G_1 , G_3 и G_4 соответственно, а проводимости \underline{Y}_2 и \underline{Y}_5 ёмкостными - pC_2 и pC_5 соответственно. Тогда операторная передаточная функция и схема звена второго порядка приобретают вид

$$H(p) = - \frac{G_1 G_3}{C_5 C_2 p^2 + C_5 (G_1 + G_3 + G_4) + G_3 G_4} \quad (***)$$



Сопоставление коэффициентов при p в соответствующих степенях и свободных членов

в заданной операторной передаточной функции и в последнем выражении позволяет

определить значения параметров элементов звена. Как это можно сделать, показано в следующем примере.

Пример

Операторная передаточная функция фильтра имеет вид

$$H(p) = \frac{0,707}{p^2 + 0,645p + 0,707} \quad (')$$

т.е. у заданного фильтра $A_{p\max} = 3\text{дБ}$ и $\mathcal{E} = 1$.

Выражение (***) перепишем в следующем виде

$$H(p) = - \frac{G_1 G_3}{C_5 C_2} \frac{1}{p^2 + \frac{(G_1 + G_3 + G_4)}{C_2} p + \frac{G_3 G_4}{C_5 C_2}} \quad (')$$

Необходимо определить значения G_1, G_3, G_4, C_5 и C_2 .

Сравнивая коэффициенты при p в выражениях (') и ('), можно записать следующие

три уравнения

$$\frac{G_1 G_3}{C_5 C_2} = 0,707, \quad \frac{(G_1 + G_3 + G_4)}{C_2} = 0,645, \quad \frac{G_3 G_4}{C_5 C_2} = 0,707$$

Поскольку неизвестных величин пять, а уравнения три, значениями двух из пяти неизвестных величин следует задаться, например, $G_3 = G_4 = 5 \cdot 10^{-4} \text{См}$. Остальные три неизвестные величины легко определяются из приведенных уравнений. Следует иметь в виду, что выражение (') записано для нормированной частоты $\Omega_1 = \omega/\omega_1$. Поэтому значения ёмкостей необходимо денормировать (поделить на ω_1).