Производная функции

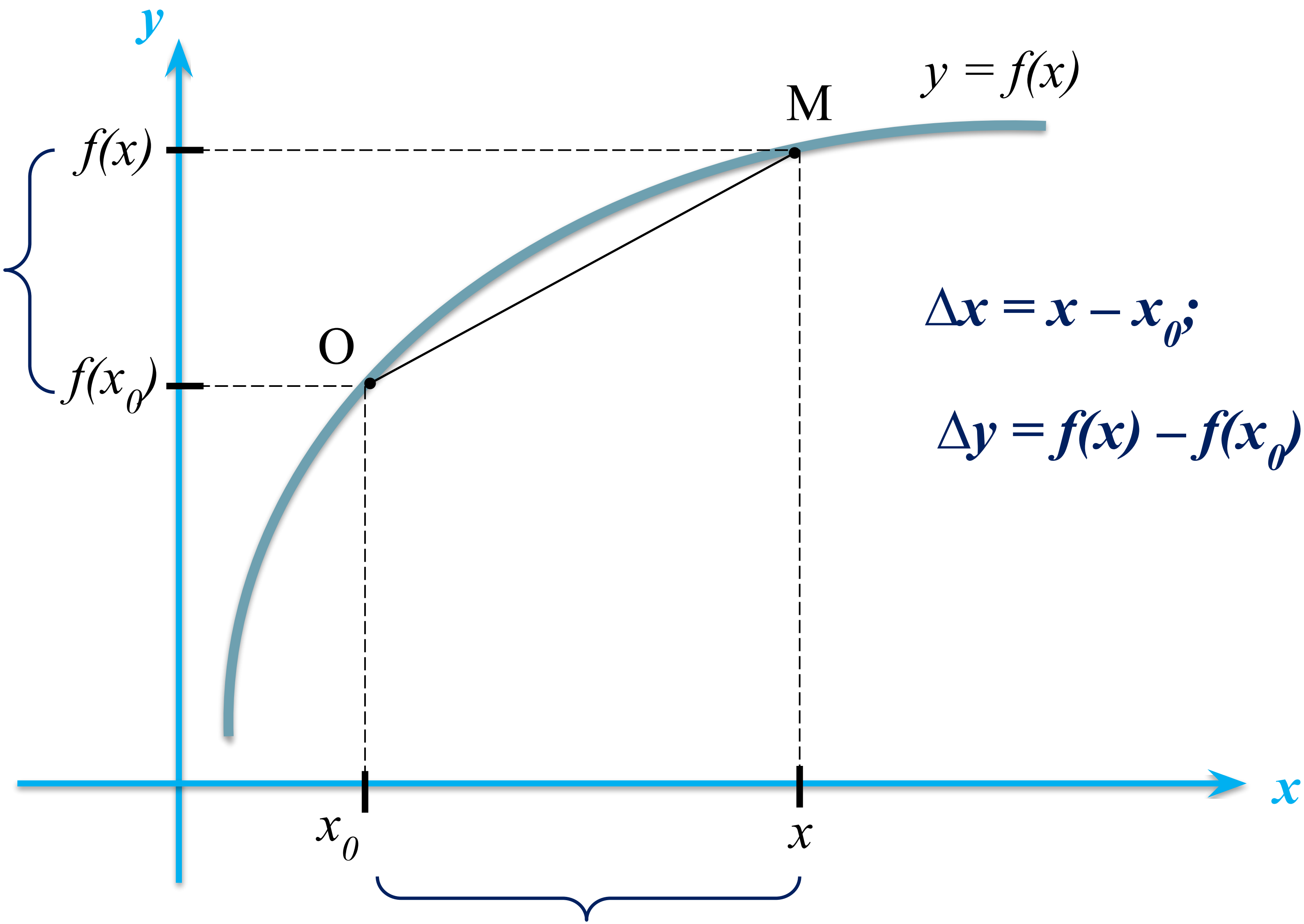
Определение:

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$ называется **производной функции** $f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

Штрих - обозначает действие нахождения производной

Производная – это скорость изменения функции!



Δy приращение функции –

$$\Delta x = x - x_0;$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0);$$

Δx – приращение аргумента

Другие обозначения:

$f'(x)$ y' $\frac{dy}{dx}$

Действие нахождения производной называется - **дифференцированием.**

Функция, имеющая производную, называется **дифференцируемой**.

ОБЩЕЕ ПРАВИЛО ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ:

$$1)\quad y+\Delta y = f(x+\Delta x)$$

$$2)\quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$3)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$4)\quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Правила дифференцирования

$$(U+V-W)' = U' + V' - W'$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U'$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U$$

$$(U \cdot V \cdot W)' = U' \cdot V \cdot W + V' \cdot U \cdot W + W' \cdot U \cdot V$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$$

$$\left(\frac{U}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot U'$$

$$\left(\frac{C}{V}\right)' = -\frac{C}{V^2} \cdot V'$$

Производные элементарных функций

1) $C' = 0 \quad , C - постоянная$

2) $x' = 1$

3) $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$

4) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Производные элементарных функций

6) $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot lna$

7) $\left(e^{x}\right)' = e^{x} \cdot lne = e^{x}$

$\Big\}$ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

8) $\left(log_{a}x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot lna}$

9) $\left(lnx\right)' = \dfrac{1}{x}$

10) $\left(lgx\right)' = \dfrac{0,4343}{x}$

$\Big\}$ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Производные элементарных функций

11) $(\sin x)' = \cos x$

12) $(\cos x)' = -\sin x$

13) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

14) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Математический диктант

$$x' =$$

$$(C \cdot U)' =$$

$$(lnx)' =$$

$$C' =$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$(tgx)' =$$

$$\left(x^n\right)' =$$

$$\left(e^x\right)' =$$

$$(cosx)' =$$

$$\left(a^x\right)' =$$

$$(sinx)' =$$

$$(U \cdot V)' =$$

$$(ctgx)' =$$

$$(U \pm V)' =$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' =$$

Вычисление производных элементарных функций

1) $y = x^3$

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y' = \left(x^3\right)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

2) $y = x^7$ $\quad y' = 7x^6$

3) $y = x^{2,4}$ $\quad y' = 2,4x^{1,4}$

4) $y = x^{-5}$ $\quad y' = -5x^{-6}$

Вычисление производных элементарных функций

$$\left(a \cdot x^{n}\right)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$5)\ y = 4x^{2} - 2x^{3} - 3x + 10$$

$$C' = 0$$

$$6)\ y = -3x^{-4} + 6x^{0,5} - 0,008$$

$$\left(U \pm V\right)' = U' \pm V'$$

$$7)\ y = 3x^{4} + 1,5x^{2} - 7x - 0,35$$

$$x_{0} = -2$$

$$8)\ y = \sqrt{x} - \frac{1}{x} + x - x^{5}, \quad x_{0} = 1$$

Вычисление производных элементарных функций

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$

$9)\ y = 2 \cdot tgx + 5 \cdot lnx - 4^x$

$10)\ y = 8 \cdot ctgx - 2 \cdot cosx - 7 \cdot \lg x + 0{,}136$

$11)\ y = -2 \cdot \log_2 x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^4} + \sqrt{10} \cdot x - \frac{2}{3}$

$12)\ y = 3\cos x - 4\sin x - 2e^x + 5x, \ x_0 = 0$

Д/З Выучить формулы!

Вычислить производные:

$$1)\ y = 1,2x^5 + 4x^2 - 3x^3 - 1,2x + 0,007$$

$$2)\ y = -\lg x + \sqrt{3} \cdot \mathrm{ctg}x - 9^x + 6 \cdot \ln x$$

$$3)\ y = (5x^2 - 2x) \cdot (3x + 2x^2)$$

Вычислить производные в заданных точках:

$$4)\ y = 7x - 13x^2 + 5x^3 - \sqrt{3},\ x_0 = -6,5$$

$$5)\ y = -4x^3 + 1,5x^2 - 9x - \frac{3}{\sqrt{2}}\ x_0 = 1,4$$

Вычисление по правилу произведения

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

1) $y = x \cdot \sin x;$

$$y' = (\underbrace{x}_{U} \cdot \underbrace{\sin x}_{V})' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' =$$

$$= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$$

$$(U\cdot V)' = U'\cdot V + U\cdot V'$$

$$2)\ \ y = x\cdot e^x$$

$$y' = \left(x\cdot e^x\right)' = x'\cdot e^x + x\cdot\left(e^x\right)' =$$

$$= 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x\cdot(1+x)$$

$$3)\ \ y = \left(x^2 - 3x\right)\cdot\left(2x^3 - 8\right)$$

$$y' = \left(x^2 - 3x\right)'\cdot\left(2x^3 - 8\right) + \left(2x^3 - 8\right)'\cdot\left(x^2 - 3x\right) =$$

$$= (2x - 3)\cdot\left(2x^3 - 8\right) + \left(6x^2 - 0\right)\cdot\left(x^2 - 3x\right) =$$

$$= 4x^4 - 16x - 6x^3 + 24 + 6x^4 - 18x^3 =$$

$$= 10x^4 - 24x^3 - 16x + 24$$

$$4)\ \ y'(4)-y'(1)=?$$

$$(U\cdot V)'=U'\cdot V+U\cdot V'$$

$$y=(1-2x)\cdot\sqrt{x}$$

$$y'=(1-2x)'\cdot\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)'\cdot(1-2x)=$$

$$=(0-2)\cdot\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(1-2x)=-2\sqrt{x}+\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(4)=-2\sqrt{4}+\frac{1-2\cdot 4}{2\sqrt{4}}=-4+\frac{-7}{4}=-5{,}75$$

$$y'(1)=-2\sqrt{1}+\frac{1-2\cdot 1}{2\sqrt{1}}=-2+\frac{-1}{2}=-2{,}5$$

$$y'(4)-y'(1)=-5{,}75-(-2{,}5)=-3{,}25$$

$$5)\ \left(\left(1-2x^3\right)\cdot\sqrt{x}\right)' = \left(1-2x^3\right)'\cdot\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\left(1-2x^3\right)=$$

$$=\left(0-2\cdot 3x^2\right)\cdot\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1-2x^3\right)=$$

$$=-6x^2\cdot\sqrt{x}+\frac{1-2x^3}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(1)-y(1)=-6\cdot 1^2\cdot\sqrt{1}+\frac{1-2\cdot 1^3}{2\sqrt{1}}-\left(1-2\cdot 1^3\right)\cdot\sqrt{1}=$$

$$=-6+\frac{-1}{2}-\left(-1\right)=-5{,}5$$

Вычисление по правилу дроби

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

1) $y = \dfrac{1+2x}{3-5x};$

$$y' = \left(\frac{1+2x}{3-5x}\right)' = \frac{(1+2x)'(3-5x)-(1+2x)(3-5x)'}{(3-5x)^2} =$$

$$= \frac{2(3-5x)-(1+2x)(-5)}{(3-5x)^2} = \frac{6-10x+5+10x}{(3-5x)^2} = \frac{11}{(3-5x)^2}$$

2) $$y=\frac{1+\sin x}{1-\sin x};$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$$

$$y'=\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)'=\frac{(1+\sin x)'(1-\sin x)-(1+\sin x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot(1-\sin x)-(1+\sin x)\cdot(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x-\cos x\cdot\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x}{(1-\sin x)^2}=\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

Вычислить производную в заданной точке:

3) $$y=\frac{2-3x^2}{1+2x} \qquad x_0=-1$$

$$y'=\left(\frac{2-3x^2}{1+2x}\right)'=\frac{\left(2-3x^2\right)'\left(1+2x\right)-\left(2-3x^2\right)\left(1+2x\right)'}{\left(1+2x\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(-6x\right)\cdot\left(1+2x\right)-\left(2-3x^2\right)\cdot\left(2\right)}{\left(1+2x\right)^2}=\frac{-6x-12x^2-4+6x^2}{\left(1+2x\right)^2}=$$

$$=\frac{-6x-6x^2-4}{\left(1+2x\right)^2} \qquad y'(-1)=\frac{6-6-4}{\left(1-2\right)^2}=-4$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

4) $y = \dfrac{e^x + x^2}{2x}$

$$y' = \left(\frac{e^x + x^2}{2x}\right)' = \frac{\left(e^x + x^2\right)' \cdot (2x) - \left(e^x + x^2\right) \cdot (2x)'}{(2x)^2} =$$

$$= \frac{\left(e^x + 2x\right) \cdot 2x - \left(e^x + x^2\right) \cdot 2}{4x^2} = \frac{2x \cdot e^x + 4x^2 - 2 \cdot e^x - 2x^2}{4x^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot e^x - 2e^x + 2x^2}{4x^2} = \frac{x \cdot e^x - e^x + x^2}{2x^2}$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

5) $y = \dfrac{6x - 3\ln x}{2 + x^2};$

$$y' = \left(\frac{6x - 3\ln x}{2 + x^2}\right)' = \frac{(6x - 3\ln x)'(2 + x^2) - (6x - 3\ln x)(2 + x^2)'}{(2 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{\left(6 - \dfrac{3}{x}\right)\cdot(2 + x^2) - (6x - 3\ln x)\cdot(2x)}{(2 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{12 + 6x^2 - \dfrac{6}{x} - 3x - 12x^2 + 6x\ln x}{(2 + x^2)^2} = \frac{6x\ln x - \dfrac{6}{x} - 6x^2 - 3x + 12}{(2 + x^2)^2}$$

Самостоятельно вычислить производную в заданной точке:

1) $y=\left(3-x^{2}\right)\cdot\sqrt{x}$ $\qquad y'(25)-y'(4)-?$

2) $y=\left(4x-x^{2}\right)\cdot\left(x-2e^{x}\right)$ $\qquad y'(0)-?$

3) $y=\left(2x^{3}+8e^{x}\right)\cdot\cos x$ $\qquad y'(0)-?$

4) $y=\dfrac{2-4x^{3}}{2-x}$ $\qquad y'(-6)-?$

5) $y=\dfrac{9\ln x+4x}{2x^{2}}$ $\qquad y'(1)-?$

Производная сложной функции

$$f(x) = f\,(\,u(x)\,)$$

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'$$

Пример:

1) $\boldsymbol{y = (2x - 7)^{14}};$

u

$u(x) = 2x - 7;$

$f(u) = u^{14};$

$$\boldsymbol{y' = f'(u) \cdot u'(x) = 14u^{13} \cdot 2 = 28(2x - 7)^{13}}$$

$$f(x) = f(\,u(x)\,)$$
$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

3) $y = (3+5x)^{10}$

4) $y = \dfrac{5}{(7x-2)^3}$;

5) $y = \sqrt{2x+3}$;

6) $y = e^{2x-15}$

7) $y = \ln\left(x^3 - x^2 - 9\right)$

8) $y = \sin 2x^2$

9*) $y = 3\sin^6\left(x^2+3\right)$

10*) $y = e^{(3-2x)^4} + 1$

Учебник
Алимов Ш.А.

$$f(x) = f\,(\,u(x)\,)$$
$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

№ 791 (2,4,6)

№ 796 (2,3)

№ 835 (5)

№ 837 (3,4)

№ 846 (1,2,3)

Производная второго порядка

Производной второго порядка (второй производной) называется производная от первой производной.

$$y''(x) = (y')'$$

Производная 3-го порядка: $y'''(x)$

Производная 4-го порядка: $y^{(4)}(x)$

Вычислить:

1) $y = -4x^5 - 2x^3 + 7x - 15,9; \quad y'''$

2) $y = 3x^{-4} + 5\sin x + e^x - 2\ln x; \quad y'''$

3) $y = 3x^6 - 6x^2 + 17x - \sqrt{7}, \quad y'''(-2)$

4) $y = 9x^4 - 8\cos x + 4e^x - 2019$

$y(0), \quad y'(0), \quad y''(0), \quad y'''(0)$

Приложения производной

Физический смысл производной

1) Рассмотрим движение материальной точки, координата которой изменяется по закону: $S = S(t)$.

$$v = S'(t),$$ ***Физический смысл производной первого порядка - это скорость движения***

2) Ускорение движения – это скорость изменения скорости, значит

$$a = v'(t);$$ ***Физический смысл производной второго порядка - это ускорение***

Физический смысл производной

А так как $\upsilon = S'(t)$, то

$$a = S''(t)$$

Задача 1

Координата точки при падении изменяется по закону:

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2;$$

1) Найти закон изменения скорости.

$$\upsilon(t) = x'(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 2 \cdot t = gt;$$

2) Ускорение

$$a(t) = \upsilon'(t) = (gt)' = g;$$ - ускорение свободного падения

3) Найти *x, υ, a* через 3 с после начала падения

$$x(3) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 3^2 = 44{,}1 \ (м); \quad \upsilon(3) = 9{,}8 \cdot 3 = 29{,}4 \ (м/с);$$

$$a(3) = 9{,}8 \ (м/с^2).$$

Задача 2

Точка движется прямолинейно по закону: $S(t) = 2t^3 + t - 1;$

Найти законы изменения скорости и ускорения.

В какой момент времени ускорение будет равно 6 м/с^2; 48 м/с^2?

$$v = S' = 6t^2 + 1$$

$$a = v' = 12t$$

$$a = 6(м/с^2);\ 12t = 6 \to t = 0{,}5с$$

$$a = 48(м/с^2);\ 12t = 48 \to t = 4с$$

Задача 3 Точка движется по закону:

$$S(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t^2 + 3;$$

Найдите момент её остановки.

$$v = S'(t) = \frac{1}{4}\cdot 4t^3 - 2\cdot 2\cdot t + 0 = t^3 - 4t$$

$$v = 0 \rightarrow t^3 - 4t = 0 \qquad t\cdot\left(t^2 - 4\right) = 0$$

$$t = 0,\ \ t^2 - 4 = 0$$

$$t = 0,\ \ t_{1,2} = \pm 2$$

$t = 2c$ - момент остановки движения

Задача 4 Точка движется прямолинейно по закону: $S(t) = 2t^3 + t^2 - 4;$

Найдите значения скорости и ускорения в момент времени: $t = 4c.$

$$v = S'(t) = 2 \cdot 3t^2 + 2 \cdot t - 0 = 6t^2 + 2t$$

$$a = v'(t) = 6 \cdot 2t + 2 = 12t + 2$$

$$v(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 96 + 8 = 104(м / c)$$

$$a(4) = 12 \cdot 4 + 2 = 48 + 2 = 50(м / c^2)$$

Задача 5

Тело массой 1,6 кг движется прямолинейно по закону:

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$S(t) = 0{,}5t^3 - 2t + 1.$$

Найти кинетическую энергию тела через 4с после начала движения.

$$v = S'(t) = 0{,}5 \cdot 3t^2 - 2 \cdot 1 + 0$$

$$v = 1{,}5t^2 - 2$$

$$v(4) = 1{,}5 \cdot 4^2 - 2 = 22(м/с)$$

$$E_k = \frac{1{,}6 \cdot 22^2}{2} = 387{,}2(Дж)$$

Задача 6

Даны два уравнения движения. Найти значения их ускорений в момент времени когда их скорости равны:

$$S_1 = 3t^3 - 4t^2 + 8t - 6 \qquad S_2 = 3t^3 + 2t^2 - 4t + 5$$

$$v_1 = S_1' = 9t^2 - 8 \cdot t + 8 \qquad v_2 = S_2' = 9t^2 + 4 \cdot t - 4$$

$$v_1 = v_2$$

$$9t^2 - 8 \cdot t + 8 = 9t^2 + 4 \cdot t - 4$$

$$-12t = -12 \qquad t = 1c$$

$$a_1 = v_1' = 18t - 8 \qquad a_2 = v_2' = 18t + 4$$

$$a_1(1) = 18 - 8 = 10 \qquad a_2(1) = 18 + 4 = 22$$

Задания для самостоятельного решения:

1) Найти скорость и ускорение при $t = 5c.$

$$S(t) = t^3 - 2t^2 + 8t - 13$$

2) В какой момент времени скорость окажется равной нулю?

$$S(t) = 4t^2 - 28t + 17$$

3) Тело массой 48 кг движется прямолинейно по закону:

$$S(t) = t^2 - 3t + 6$$

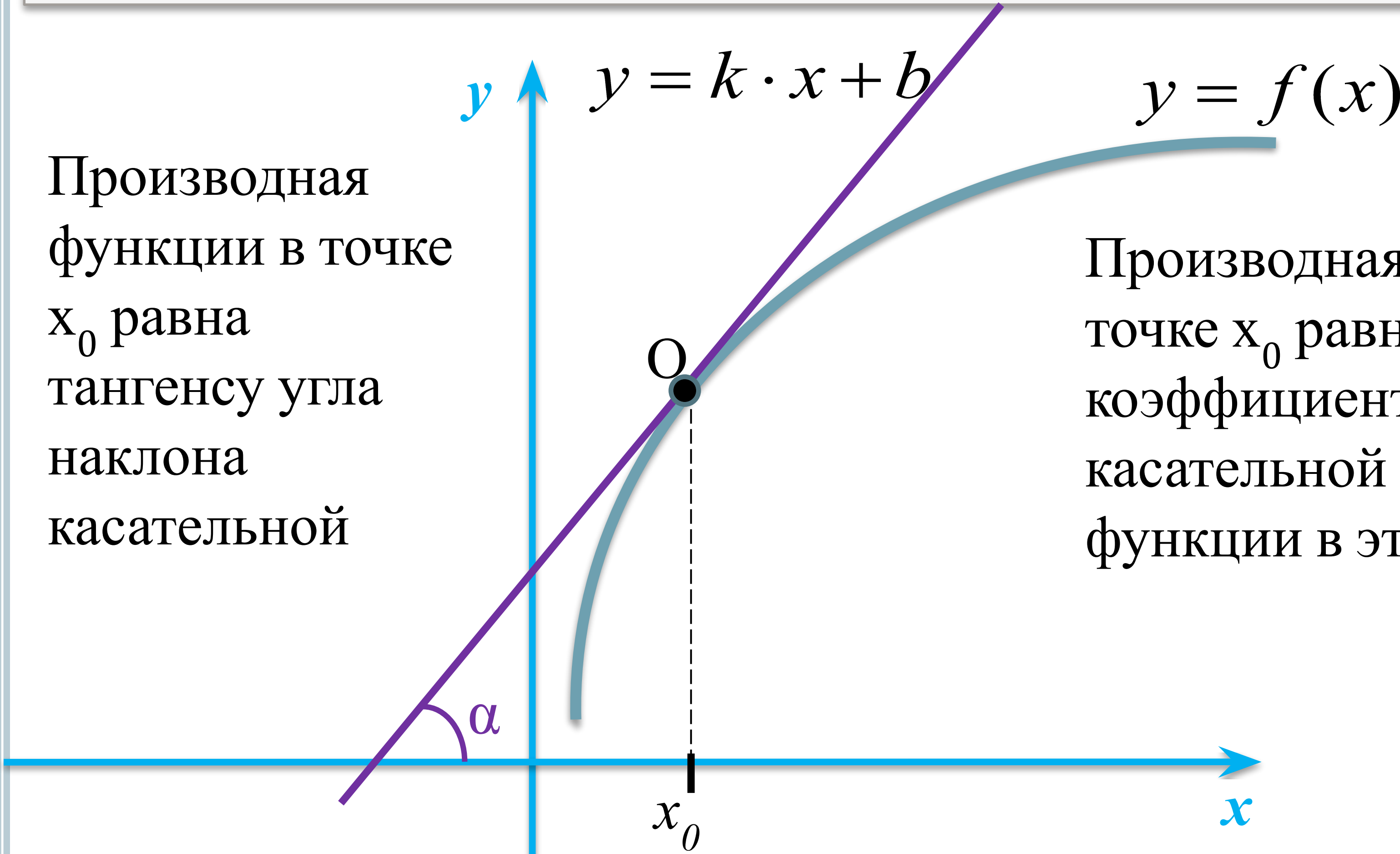
Найти кинетическую энергию тела через 6с после начала движения.

4) Даны два уравнения движения. Найти значения их ускорений в момент времени когда их скорости равны:

$$S_1 = 2t^3 - 7t^2 + 8t - 17$$

$$S_2 = 2t^3 - 9t^2 + 24t + 1$$

Геометрический смысл производной



Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

$$f'(x_0) = k$$

$$tg\alpha = k$$

№ 1

Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной к графику функции:

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение

$$f'(x) = 2x - 2;$$

$$k = f'(x_0) = f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2;$$

$$f'(x_0) = tg\alpha = -2$$

$$\alpha = arctg(-2) = -arctg\,2 = -63^\circ 26' 6''$$

$$\alpha_+ = 180^\circ - 63^\circ 26' 6'' = 116^\circ 33' 54''$$

$$Ответ:\ \ k = -2;\ \ \alpha_+ = 116^\circ 33' 54''$$

№ 2

Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной к графику функции:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3; \;\; x_0 = -1$$

Решение

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(-1) = 3 + 6 = 9$$

$$k = f'(-1) = 9$$

$$tg\alpha = 9$$

$$\alpha = arctg9 = 83^{\circ}39'35''$$

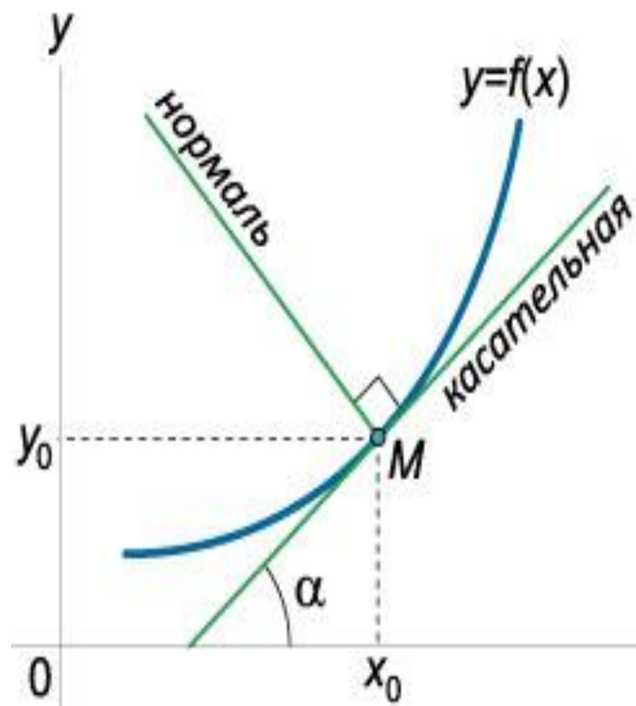
Уравнение касательной и нормали

Уравнение касательной к графику функции *f(x)* в точке x_0:

$$y_к = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции *f(x)* в точке x_0:

$$y_н = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



№ 3

Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в заданной точке:

$$f(x) = x^2 - 4, \;\; x_0 = 3$$

<u>**Решение:**</u>

1) $f(x_0) = 3^2 - 4 = 5;$

2) $f'(x) = 2x \;\;;$

3) $f'(x_0) = 2\cdot 3 \; = 6;$

4) $y_к = 5 + 6\cdot(x-3)$

$$y_к = 6x - 13$$

5) $y_н = 5 - \frac{1}{6}\cdot(x-3)$

$$y_н = -\frac{1}{6}x + 5\frac{1}{2}$$

№ 4

Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в заданной точке:

$$f(x)=4-x-x^2 \quad, x_0=-3$$

<u>Решение:</u>

$$1)\,f(-3)=4+3-9=-2$$

$$2)\,f'=-1-2x$$

$$3)\,f'(-3)=-1+6=5$$

$$4)\,y_{кас}=-2+5\cdot(x+3)=-2+5x+15=5x+13$$

$$5)\,y_{норм}=-2-\frac{1}{5}\cdot(x+3)=-2-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}x-2\frac{3}{5}$$

№ 5

Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной. Составить уравнение касательной к графику функции:

$$f(x) = 2x - 3x^4 + 12, \quad x_0 = -2$$

<u>Решение:</u>

1) $f(-2) = -4 - 48 + 12 = -40$

2) $f' = 2 - 12x^3$

3) $f'(-2) = 2 + 96 = 98 \quad , \; k = 98$

4) $\alpha = arctg98 = 89^{\circ}24'55''$

5) $y_к = -40 + 98 \cdot (x+2) = 98x + 156$

$f'(x_0) = k$ $f'(x_0) = tg\alpha$ $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной. Составить уравнение касательной к графику функции:

№ 6 $f(x) = x^3 + 1; \quad x_0 = -1$

№ 7 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 7; \quad x_0 = -4$

№ 8 $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 2x + 1; \quad x_0 = 1$

Подготовка к самостоятельной работе

1) Дан закон движения материальной точки, найти скорость и ускорение за время t:

$$S(t) = 5t^3 - 2t^2 + 6t - 3, \ \ t = 3c$$

2) Тело массой 26кг движется прямолинейно по закону. Найти кинетическую энергию тела через 4 секунды после начала движения:

$$S(t) = 3t^2 - 7t - 2{,}5$$

3) Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной:

$$y = -x^3 + 46x + 13, \ \ x_0 = 2$$

4) Составить уравнение касательной к графику функции в заданной точке:

$$y = 6 + 8x - 2x^2, \ \ x_0 = -6$$

Подготовка к самостоятельной работе

4) Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной:

$$y = -x^3 + 46x + 13, \quad x_0 = -5$$

5) Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в заданной точке:

$$y = 6 + 8x - 2x^2, \quad x_0 = 3$$

Монотонность функции и точки экстремума

Рассмотрим функцию $f(x)$. Найдем $f'(x)$.

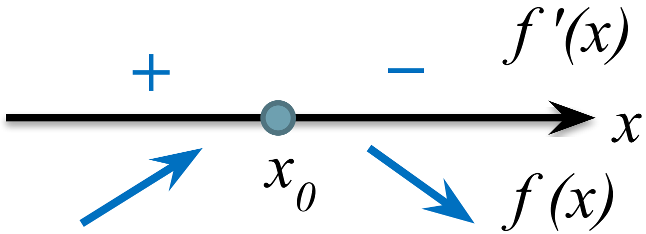
Если на некотором интервале

$f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает.
$f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает.

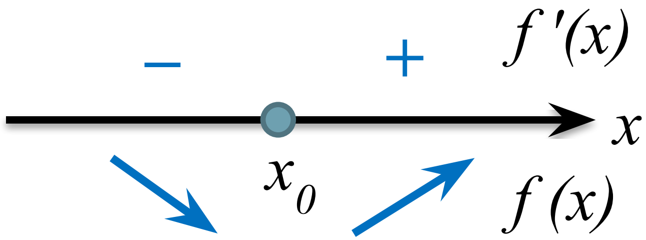
Точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует, называются **критическими точками**.

$f'(x_0) = 0 \rightarrow x_0$ – критическая точка

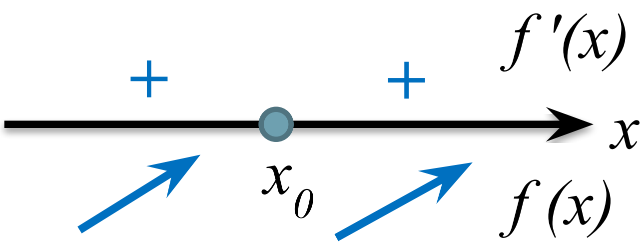
Эти точки могут быть точками **экстремума** (максимум или минимум).



Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «−», то это точка **максимума**.



Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «−» на «+», то это точка **минимума**.



Если производная не изменяет знак, то критическая точка не является точкой экстремума.

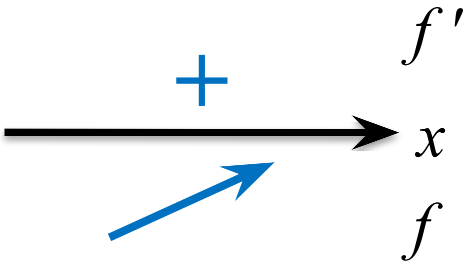
Правило исследования функции на монотонность и экстремум

1. Найти производную функции $f'(x)$;
2. Найти критические точки *($f'(x)=0$ или не существует)*;
3. Исследовать знак производной на промежутках, определить точки максимума, минимума и промежутки монотонности;
4. Вычислить значения функции в точках экстремума

№ 1 Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции: $f(x)=7x-10$

$$f'(x)=7$$

$$7\neq 0 \rightarrow \textit{критических точек нет} \rightarrow \textit{экстремума нет}$$



$$\textit{Ответ}: \ \textit{функция возрастает при } x\in R$$
$$\textit{точек экстремума нет}$$

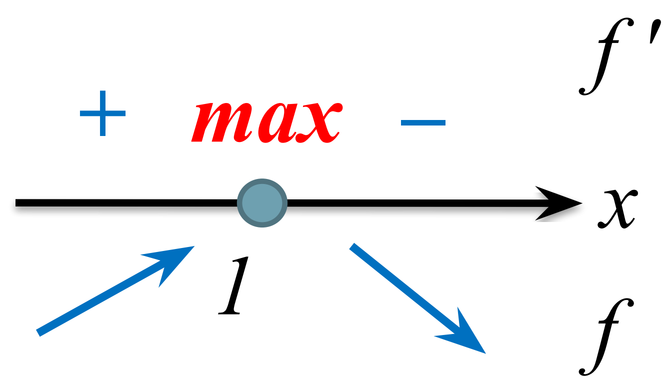
№ 2 Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции: $f(x) = -2x^2 + 4x - 9$

$$f'(x) = -4x + 4$$

$$-4x + 4 = 0$$

$$-4x = -4$$

$$x = 1$$



$$y_{max} = f(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 9 = -2 + 4 - 9 = -7$$

Ответ: функция возрастает при $x \in (-\infty; 1)$

функция убывает при $x \in (1; +\infty)$

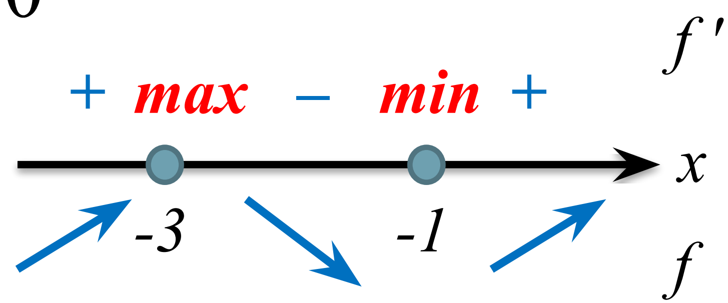
$(1; -7)$ – т. максимума

№ 3 Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 8$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$3x^2 + 12x + 9 = 0 \qquad x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases} \qquad x_1 = -3 \quad x_2 = -1$$



$$y_{\max} = f(-3) = (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) - 8 = -8$$

$$y_{\min} = f(-1) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) - 8 = -12$$

Ответ: *функция возрастает при* $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$

функция убывает при $x \in (-3; -1)$

$(-3; -8)$ – *т. максимума* $\quad (-1; -12)$ – *т. минимума*

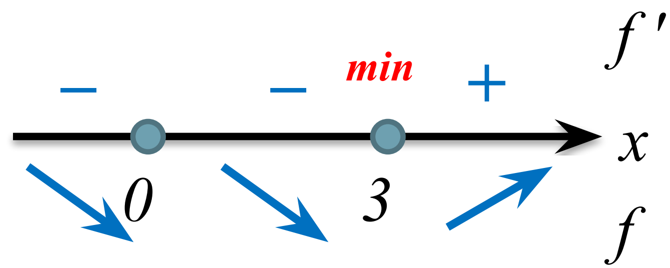
№ 4 Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции: $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 5$

$$f'(x) = 8x^3 - 24x^2$$

$$8x^3 - 24x^2 = 0 \qquad x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$



$$y_{\min} = f(3) = 2 \cdot 3^4 - 8 \cdot 3^3 + 5 = -49$$

Ответ: *функция возрастает при* $x \in (3;+\infty)$

функция убывает при $x \in (-\infty;0) \cup (0;3)$

$(3;-49)$ – *т.минимума*

Исследовать функции на монотонность и точки экстремума с помощью производной:

$$1)\ \ f(x) = -3x^2 + 18x - 77$$

$$2)\ \ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$$

$$3)\ \ f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$$

Д/З

Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции:

$$1)\ \ f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$2)\ \ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$3)\ \ f(x) = x^4 - 8x^2$$

$$4)\ \ f(x) = x^4 + 4x^3 - 9$$

Правило исследования функции на экстремум с помощью второй производной

1. Найти производную функции $f'(x)$
2. Найти критические точки *($f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует)*
3. Найти вторую производную $f''(x)$
4. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то –минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум надо искать с помощью первой производной;
5. Вычислить значения функции в точках экстремума

Исследовать функции на экстремум с помощью второй производной:

1) $f(x) = -6x^2 - 16x + 9$

2) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x - 7$

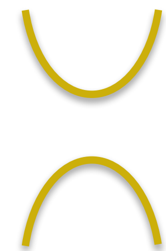
3) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 - 13$

Выпуклость и точки перегиба функции

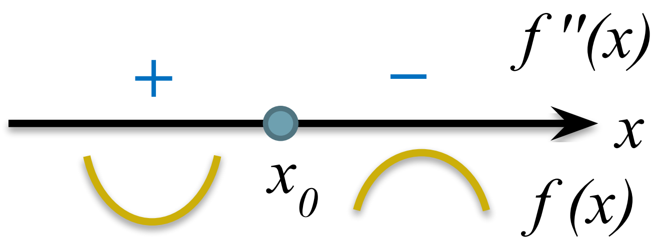
Рассмотрим $f''(x)$. Если на некотором интервале

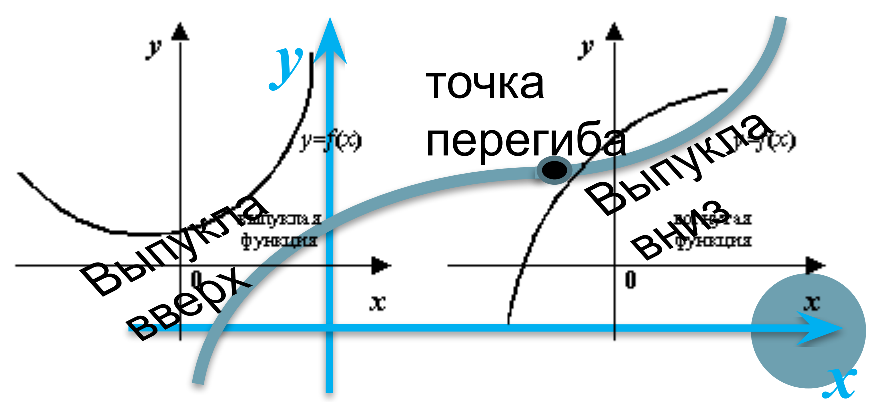
$f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпукла вниз.

$f''(x) < 0$, то $f(x)$ выпукла вверх.



Точки, в окрестности которых $f''(x)$ меняет знак, называются **точками перегиба**.





x_0 – точка перегиба

Правило нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба

1. Найти производную функции $f'(x)$;
2. Найти вторую производную функции $f''(x)$;
3. Найти критические точки ($f''(x) = 0$ *или не существует)*;
4. Исследовать знак второй производной на промежутках, определить точки перегиба и промежутки выпуклости;
5. Вычислить значения функции в точках перегиба

Исследовать функции на экстремум с помощью второй производной:

$$1)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+5$$

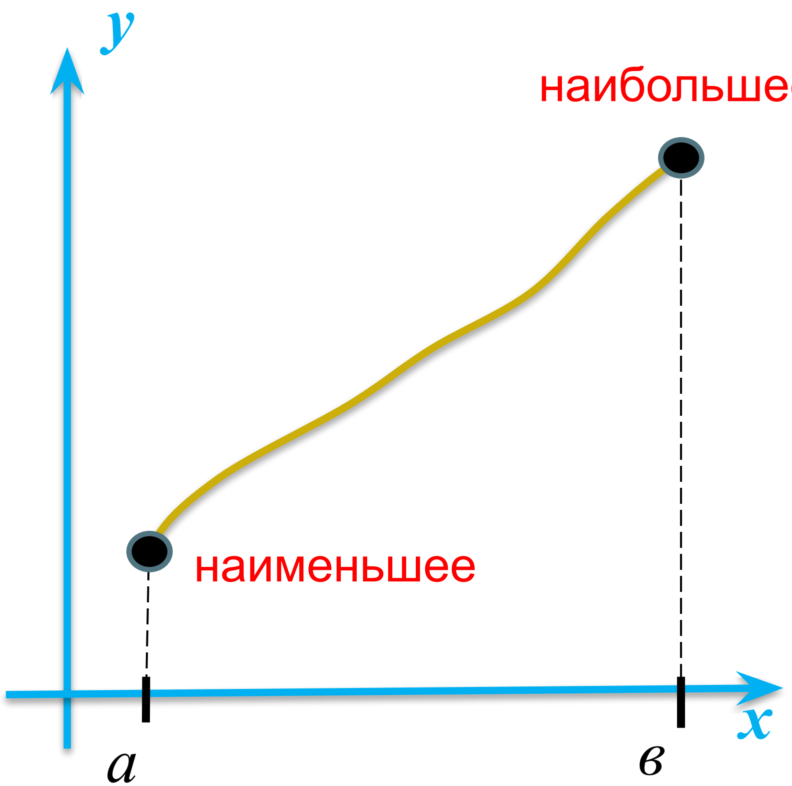
$$2)\ \ f(x)=x^4+3x^2-4$$

Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

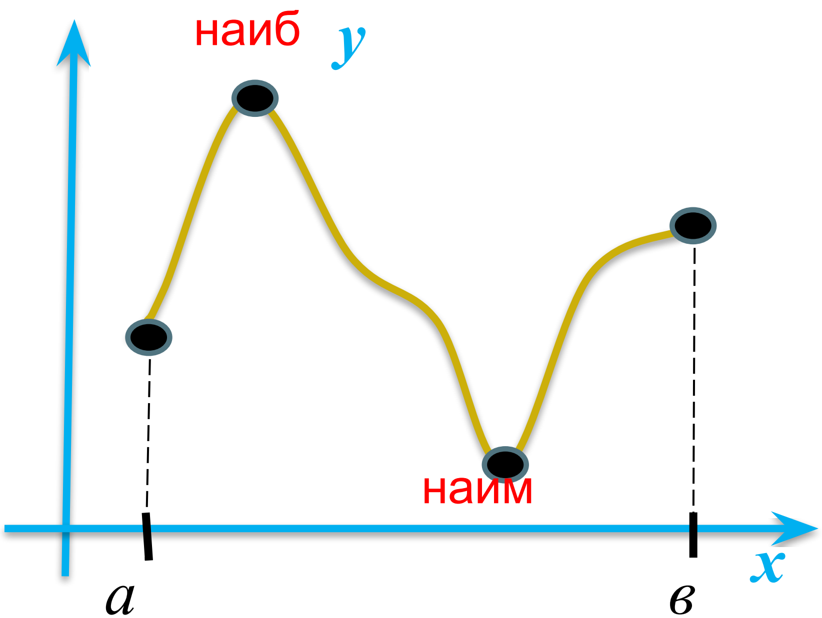
$$3)\ \ f(x)=x^3-6x^2+2x-7$$

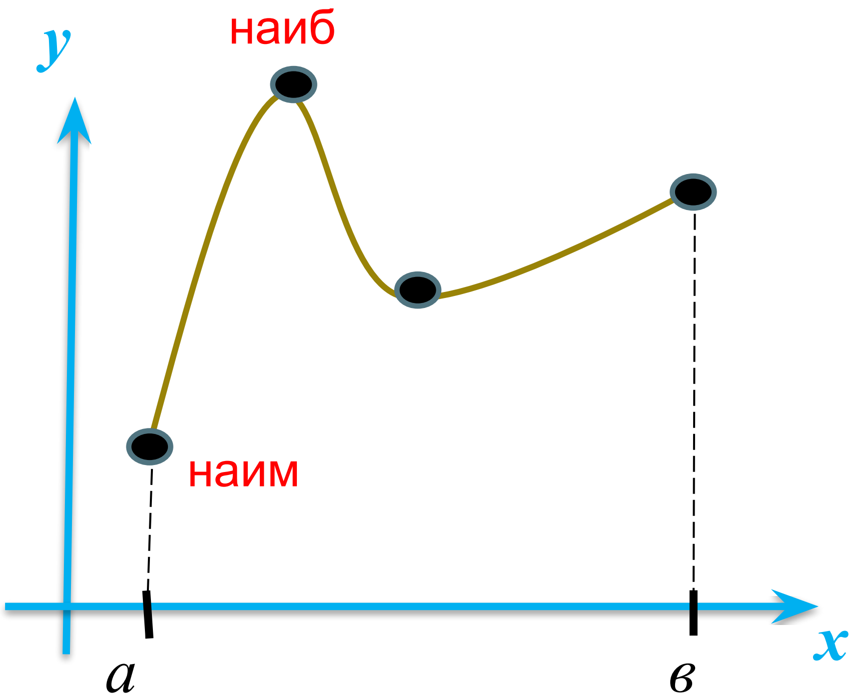
$$4)\ \ f(x)=x^4-10x^3+36x^2-11$$

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке



1) Если нет экстремума, то наибольшее и наименьшее значения функции находятся на концах отрезка.





2) Если экстремум есть, то наибольшее и наименьшее значения функции могут быть на концах отрезка или в точках экстремума.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции

1. Найти производную функции $f'(x)$;
2. Найти критические точки ($f'(x)=0$), проверить принадлежат ли они заданному промежутку;
3. Вычислить значения функции в точках, которые принадлежат промежутку;
4. Вычислить значения функции на концах промежутка ($f(a)$ и $f(b)$);
5. Сравнить полученные значения, выбрать наибольшее и наименьшее значение функции, записать ответ.

№ 1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

$$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1, \ [-2;0]$$

<u>Решение:</u>

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6;$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0; \quad x^2 - x - 2 = 0; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; \ x_2 = 2. \quad -1 \in [-2;0]; \ 2 \notin [-2;0].$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 1{,}5(-1)^2 - 6(-1) + 1 = \underline{4{,}5}$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 1{,}5(-2)^2 - 6(-2) + 1 = \underline{-1}$$

$$f(0) = 0^3 - 1{,}5 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 1 = \underline{1}$$

наибольшее $: f(-1) = 4{,}5$

наименьшее $: f(-2) = -1$

№ 2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 21$ на отрезке [-1; 0].

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 11$$

$$3x^2 - 14x + 11 = 0$$

$$x_1 = 1; \ x_2 = 3\frac{2}{3} \qquad 1 \notin [-1;0] \ \ 3\frac{2}{3} \notin [-1;0]$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 11(-1) - 21 = \underline{-40}$$

$$f(0) = 0^3 - 7 \cdot 0^2 + 11 \cdot 0 - 21 = \underline{-21}$$

$f(-1) = -40$ *наименьшее* $\quad f(0) = -21$ *наибольшее*

№ 3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на отрезке [-4; 4]

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0; \;\; x_1 = -1; \;\; x_2 = 3$$

$$-1 \in [-4;4] \;\; 3 \in [-4;4]$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 35 = \underline{40} \; - \textit{наибольшее}$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 35 = 8$$

$$f(-4) = (-4)^3 - 3(-4)^2 - 9(-4) + 35 = \underline{-41} \; - \textit{наименьшее}$$

№ 4 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

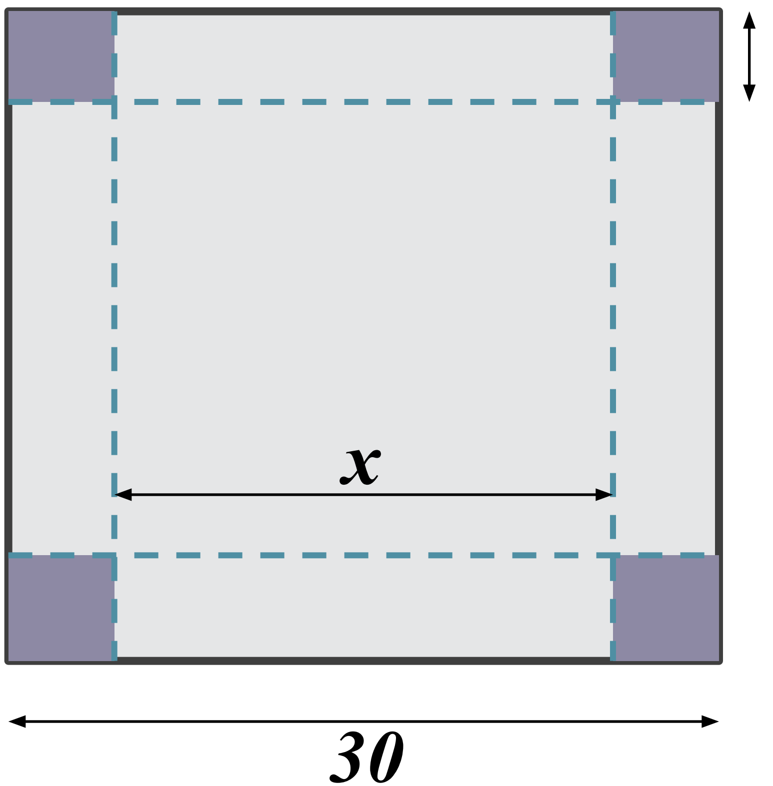
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$$ на отрезке [1; 3].

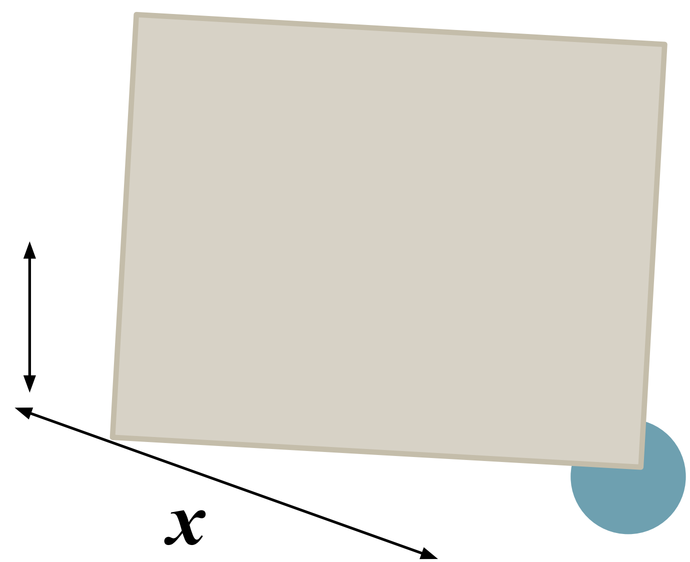
$$f'(x)=x-x^2$$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

Задача 8

Из квадратного листа жести со стороной 30 см надо изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?





Решение

Объем коробки:

Найти наибольшее значение функции V на интервале (0; 30)

Решение

Задача № 9

Как согнуть кусок проволоки длиной 20 см, чтобы площадь ограниченного ею прямоугольника была наибольшей?

Задача № 10

Представьте число 10 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Задача № 11

Найдите число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение.

Исследование функции с помощью производной и построение ее графика

Общая схема исследования

1) Найти область определения функции;
2) Найти точки пересечения графика с осями координат;
3) Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы;
4) Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба;
5) Заполнить таблицу дополнительных значений;
6) Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

*<u>**Задание:**</u>* *Исследовать функцию с помощью производной и построить её график*

<u>**Решение:**</u>

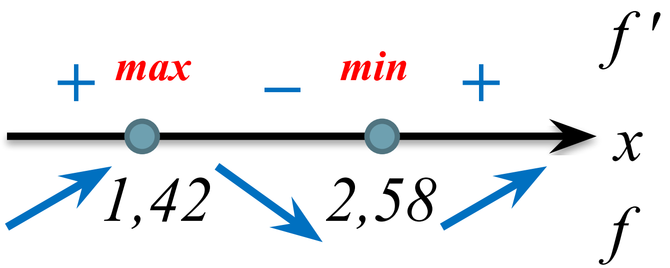
1) Область определения функции:

2) При пересечении с осью OY:

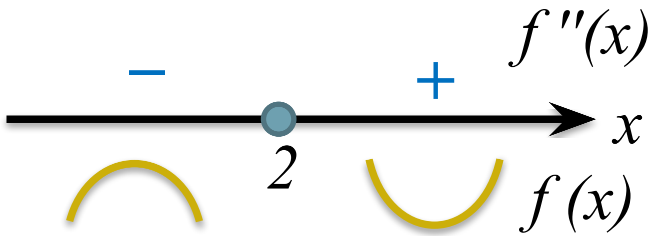
При пересечении с осью OX:

http://planetcalc.ru

3) Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции:



4) Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба:



5) Таблица дополнительных значений:

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,42	2	2,58	3	4
y										

5) Таблица дополнительных значений:

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,42	2	2,58	3	4
y										

6) График функции:

Задание для самостоятельного решения

Исследовать функцию с помощью производной и построить её график

Подготовка к контрольной работе

1) Найти чему равна производная:

Подготовка к контрольной работе

2) Найти чему равна производная функции в заданной точке:

Подготовка к контрольной работе

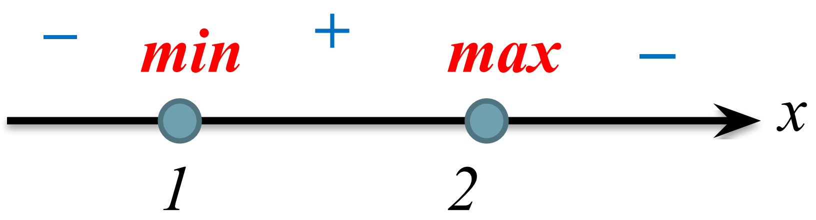
3) Дан закон движения материальной точки, найти скорость и ускорение за время t:

Подготовка к контрольной работе

4) Составить уравнение касательной:

Подготовка к контрольной работе

5) Найти экстремумы функции:



Подготовка к контрольной работе

5) Найти экстремумы функции:

Подготовка к контрольной работе

6)Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

Подготовка к контрольной работе

6)Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке: