Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации

Дистанционное обучение

Шевелёв
Александр Юрьевич
доцент, кандидат физико-математических наук.

Математика

Тема №12.
Элементы теории вероятностей

Случайное явление можно иногда характеризовать *относительной частотой* (или *частостью*) – отношением числа наступлений явления к общему числу испытаний.

Теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются только случайные явления с устойчивой относительной частотой и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Классификация событий

Любое явление, которое может произойти, называется *событием*.

Событие рассматривается как результат *испытания*. (Обозначается большими *л*атинскими буквами).

Классификация событий

События бывают *несовместными* (несовместимыми), если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. В противном случае события называются *совместными* (совместимыми).

Классификация событий

Событие называется *достоверным*, если оно не может не произойти в условиях данного опыта или явления.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти при выполнении определённого комплекса условий.

Классификация событий

Два события, одно из которых обязательно должно произойти, причём наступление одного исключает возможность наступления другого, называются *противоположными*. $A, \overline{A}$.

В некотором испытании события А, В, С и т. д. называются *единственно возможными*, если, по крайней мере, одно из них произойдёт, как исход испытания.

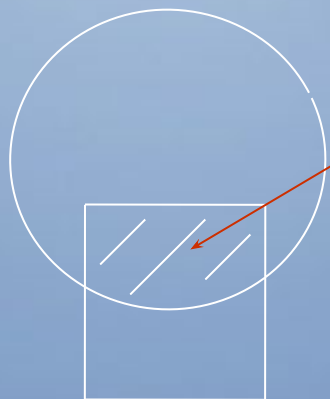
Классификация событий

События А, В, С,…,М образуют *полную систему* (*группу*), если они являются единственно возможными и несовместимыми исходами некоторого испытания.

Классификация событий

Суммой конечного числа событий называется новое событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них (A+B).

Произведением конечного числа событий называется новое событие, состоящее в том, что произойдут все эти события (A • B).



A – попадание в круг

B – попадание в квадрат

Классификация событий

События А и В называются *эквивалентными*, если наступление события А влечёт за собой наступление события В, а также наступление В влечёт за собой наступление А.

Классификация событий

Р(А) – *Вероятность* события А равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию А к общему числу возможных элементарных исходов испытания, полагая, что исходы образуют полную систему и равновозможны. (Классическое определение вероятности).

Классификация событий

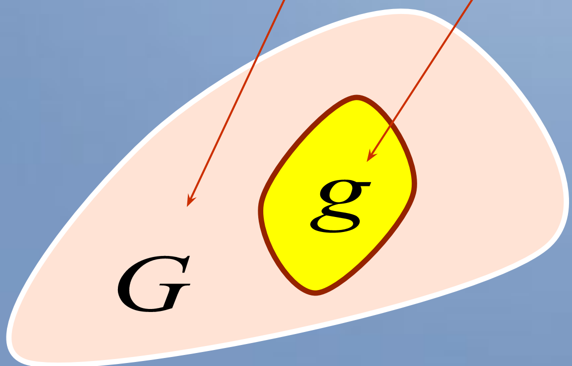
На практике не все условия классического определения вероятности можно выполнить, поэтому наряду с ним пользуются *статистическим* определением вероятности, принимая за вероятность события относительную частоту события.

Классификация событий

Недостатки классического определения (конечное число возможных исходов испытания) можно преодолеть, используя геометрическое определение вероятности.

Геометрической вероятностью события А называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события А, к мере всей области.

$$P(A)=\frac{mesg}{mesG}.$$



Задача

Пример. Бросают одновременно два кубика. Какова вероятность в сумме получить 5 очков?

Решение: Число благоприятствующих случаев четыре (1+4, 4+1, 2+3, 3+2); общее число исходов тридцать шесть.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Элементы комбинаторики

1. *Правило суммы*. Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами, элемент a_2 - другими n_2 способами, и т.д. элемент a_k - n_k способами, отличными от всех предыдущих, то выбор одного из элементов $a_1, a_2, ..., a_k$ может быть осуществлён $n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Элементы комбинаторики

2. *Правило произведения.* Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами, После каждого такого выбора элемент a_2 может быть выбран n_2 способами и т.д., после каждого $(k-1)$ выбора элемент a_k может быть выбран n_k способами, то выбор всех элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ в указанном порядке может быть осуществлён $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Задача

Пример. В пачке билетов мгновенной лотереи содержится 3 билета с относительно крупным выигрышем и 15 билетов с символическим выигрышем. Сколькими способами можно выбрать один из выигрышных билетов?

Решение. 3+15=18 способов.

Задача

Пример. В спортивной команде 22 человека. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $22 \cdot 21 = 462$ способа.

Элементы комбинаторики

3. *Факториалом* натурального числа называется произведение всех натуральных чисел от единицы до него включительно.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$$\textit{принято считать } 0! = 1$$

$$\textit{очевидно } n! = (n-1)! \cdot n$$

Элементы комбинаторики

4. *Размещениями* из n элементов некоторого множества по m называются подмножества, состоящие из m элементов, которые отличаются *либо* составом элементов, *либо* порядком их расположения, *либо* и тем, и другим.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Задача

Пример. Школьное расписание на один день состоит из 4-х уроков по разным дисциплинам. Найти число вариантов расписания при выборе из 9-и дисциплин.

Решение.

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

вариантов.

Элементы комбинаторики

5. Если комбинации, состоящие из n элементов, отличаются только порядком расположения этих элементов, то их называют *перестановками* из n элементов.

$$P_n = n!$$

Задача

Пример. Порядок выступления пяти конкурсантов определяется жребием. Сколько существует различных вариантов жеребьёвки?

Решение.

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

вариантов.

Элементы комбинаторики

6. Если комбинации из n элементов по m отличаются только составом элементов (порядок их следования неважен), то такие подмножества называют *сочетаниями*.

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Задача

Пример. Сколькими способами можно выбрать 3 розы из 8-и, стоящих на витрине?

Решение.

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot(8-3)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$$

Основные теоремы

1. (*Сложения вероятностей*). Вероятность суммы конечного числа несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.
2. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему равна 1.
3. Вероятность события, противоположного событию А

$$\overline{P}(A) = 1 - P(A).$$

Классификация событий

Два события называют *независимыми*, если проявление одного из них не меняет вероятность проявления другого.

Если вероятность проявления другого меняется, то события называют *зависимыми*.

Вероятность события А, найденная в предположении, что событие В наступило, называется условной вероятностью события А относительно события В.

$$P_B(A)$$

Основные теоремы

4. Вероятность совместного проявления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. (Теорема верна для любого конечного числа независимых в совокупности событий).

Задача

Пример. В трёх вазах по 10 конфет. В первой – 3 шоколадных, во второй – 4, в третьей – 1. Ребёнок берёт по одной конфете из каждой вазы. Какова вероятность того, что все 3 конфеты не окажутся шоколадными.

Решение. $$P(A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{9}{10}=0{,}378.$$

Основные теоремы

5. (*Умножения вероятностей* зависимых событий). Вероятность совместного проявления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Основные теоремы

6. Вероятность совместного проявления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причём вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже проявились.

Основные теоремы

7. Вероятность проявления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного события.

Задача

Пример. Два стрелка поражают цель с вероятностями 0,8 и 0,6. С какой вероятностью будет поражена цель при одновременном залпе из обоих орудий?

Решение.

$$P(A) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}92$$

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}92$$

Основные теоремы

8. (*Формула полной вероятности*). Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии проявления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную систему, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) +$$

$$+ \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Задача

Пример. В трёх вазах по 10 конфет. В первой – 3 шоколадных, во второй – 4, в третьей – 1. Вероятность того, что ребёнок подойдёт к первой вазе равна 0,2, ко второй – 0,3. Какова вероятность того, что взятая наудачу ребёнком конфета окажется шоколадной?

Решение.

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}23.$$

Повторные независимые испытания

Если производится несколько испытаний, причём вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми* относительно события А.

Будем считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же и равна p (вероятность не наступления события равна q=1-p).

Повторные независимые испытания

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие A наступит m раз в n независимых испытаниях вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Задача

Пример. Вероятность того, что посетитель магазина совершит покупку равна 0,25. Какова вероятность того, что среди первых шести посетителей окажется два покупателя?

Решение: $\textit{По условию } p = 0{,}25;\ n = 6;\ m = 2;$

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P_{2,6} = C_6^2 \cdot (0{,}25)^2 \cdot (0{,}75)^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 =$$

$$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 3^4}{1 \cdot 2 \cdot 4^6} = \frac{15 \cdot 81}{64 \cdot 64} = \frac{1215}{4096} \approx 0{,}3.$$

Дискретная случайная величина

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает одно единственное возможное значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин, которые не могут быть учтены заранее. (Обозначаются большими латинскими буквами, а значения случайной величины соответствующими маленькими).

Дискретная случайная величина

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определёнными вероятностями.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Дискретная случайная величина

Обычно закон распределения дискретной случайной величины представляется в виде таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n

Следует помнить, что

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1.$$

Задача

Пример. Команда состоит из двух стрелков. Число очков, выбиваемых каждым из них одним выстрелом, являются случайными величинами X и Y, которые описываются следующими законами распределения:

X	8	9	10
P	0,2	0,5	0,3

Y	7	8	9	10
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Задача

Составить закон распределения количества очков, выбиваемых командой при одновременном залпе (X+Y).

Решение:

Задача

$15\ \textit{очков}\ (8+7) \quad P = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$

$16\ \textit{очков}\ (8+8\ \textit{или}\ 9+7) \quad P = 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$

$17\ \textit{очков}\ (10+7\ \textit{или}\ 9+8\ \textit{или}\ 8+9)$

$$P = 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}19$$

$18\ \textit{очков}\ (10+8\ \textit{или}\ 9+7\ \textit{или}\ 8+10)$

$$P = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}29$$

$19\ \textit{очков}\ (10+9\ \textit{или}\ 9+10) \quad P = 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}29$

$20\ \textit{очков}\ (10+10) \quad P = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$

Задача

X+Y	15	16	17	18	19	20
P	0,02	0,09	0,19	0,29	0,29	0,12

Дискретная случайная величина

Закон распределения дискретной случайной величины называют *биномиальным*, если вероятность числа проявлений события в независимых испытаниях, в каждом из которых событие проявляется с вероятностью р, вычисляется по формуле Бернулли.

Дискретная случайная величина

Закон распределения полностью характеризует случайную величину, однако не всегда он известен и приходится пользоваться меньшими сведениями. Иногда выгоднее пользоваться величинами, описывающими случайную величину суммарно. Такие величины называют *числовыми характеристиками* случайной величины.

Одной из важнейших числовых характеристик случайной величины является её математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины М(Х) называют сумму произведений всех её возможных значений на соответствующие этим значениям вероятности:

$$M(X) = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \ldots + x_n \cdot P_n$$

Задача

В том же примере вычислить математические ожидания случайных величин X, Y, X+Y.

Решение:

$$M(X)=8\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}5+10\cdot 0{,}3=9{,}1$$

$$M(Y)=7\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}4=9$$

$$M(X+Y)=15\cdot 0{,}02+16\cdot 0{,}09+17\cdot 0{,}19+$$

$$+18\cdot 0{,}29+19\cdot 0{,}29+20\cdot 0{,}12=18{,}1$$

Дискретная случайная величина

Вероятностный смысл математического ожидания: математическое ожидание приближённо равно *среднему арифметическому* наблюдаемых значений случайной величины.

Дискретная случайная величина

Но в большинстве случаев математическое ожидание не может в достаточной степени характеризовать случайную величину. (Например, средняя зарплата служащих предприятия). Поэтому, наряду с математическим ожиданием используют дисперсию (или среднее квадратическое отклонение).

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

$$D(X) = \left[x_1 - M(X)\right]^2 \cdot P_1 + \left[x_2 - M(X)\right]^2 \cdot P_2 + \ldots +$$

$$+ \left[x_n - M(X)\right]^2 \cdot P_n$$

Дискретная случайная величина

Среднее квадратическое отклонение (С.К.О.) вычисляется по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Задача

В том же примере вычислить дисперсии случайных величин X, Y, X+Y.

Решение:

$$D(X)=(8-9{,}1)^2\cdot 0{,}2+(9-9{,}1)^2\cdot 0{,}5+(10-9{,}1)^2\cdot 0{,}3=0{,}49$$

$$D(Y)=(7-9)^2\cdot 0{,}1+(8-9)^2\cdot 0{,}2+(9-9)^2\cdot 0{,}3+(10-9)^2\cdot 0{,}4=1$$

$$D(X+Y)=(15-18{,}1)^2\cdot 0{,}02+(16-18{,}1)^2\cdot 0{,}09+(17-18{,}1)^2\cdot 0{,}19+$$

$$+(18-18{,}1)^2\cdot 0{,}29+(19-18{,}1)^2\cdot 0{,}29+(20-18{,}1)^2\cdot 0{,}12=1{,}49$$

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет какое-нибудь значение, меньшее чем x.

$$F(x) = P(X < x)$$

Случайная величина X называется *непрерывной*, если её функция распределения непрерывна во всех точках и дифференцируема всюду, кроме конечного числа точек.

Плотностью вероятности непрерывной случайной величины называется производная её функции распределения.

$$\varphi(x) = F'(x)$$

Непрерывная случайная величина

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины вычисляются по формулам:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 \cdot \varphi(x)dx$$

Непрерывная случайная величина

Непрерывная случайная величина X имеет на отрезке [a; b] *равномерный закон распределения*, если плотность вероятности этой величины имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & при\ x \in [a;b] \\ 0 & при\ всех\ остальных\ x \end{cases}$$

Непрерывная случайная величина

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения* (гауссовский), если её плотность вероятности имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

где $a = M(X), \quad \sigma^2 = D(X).$

Непрерывная случайная величина

Математическое ожидание и С.К.О. (или дисперсия) являются параметрами нормального закона распределения.

Конец лекции