1 Тема 3

Границы применимости классической механики. Кинематика. Пространственно-временные системы отсчета. Основы векторной алгебры. Перемещение, скорость и ускорение материальной точки. Равноускоренное движение. Путь.

Границы применимости классической механики

Механика есть наука о движении и равновесии тел.

Рис. 1: Иссак Ньютон (Англия) 1642-1727.

Механика Ньютона применима лишь к сравнительно медленным движениям со скоростями, заметно меньшими скорости света в вакууме $c \approx 300000$ км/сек. Движения, скорости которых приближаются к скорости света, называют *релятивистскими*. (первое ограничение)

- скорость звука в воздухе, $v \approx 300$ м/сек =
- = 0, 3 км/сек.
- скорость точки на поверхности Земли при ее вращении вокруг своей оси ≈ 460 м/сек.

- скорость спутника или космического корабля порядка 10 км/с.
- скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца (30 км/сек).
- скорость движения Солнца по своей орбите вокруг центра нашей Галактики порядка 300 км/сек, что меньше скорости света в 1000 раз.

Второе ограничение классической механики заключается в ее неприменимости к описанию явлений микромира, то есть к движениям тел малой массы в малых участках пространства.

Квантовая механика. Неопределенность в знании значений координат и импульса определяется соотношением неопределенности Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar / 2 \qquad (1)$$

В применении к обычным телам, например к футбольному мячу весом
0,5 кг, движущемуся со скоростью 30 м/сек, с хорошей точностью применима механика классическая. Так, если мы не знаем скорость с точностью выше, чем $\Delta v = 10^{-3}$ мкм/сек (то есть $\Delta v/v \approx 3 \cdot 10^{-11}$), а $\Delta x \approx 10^{-3}$ мкм (10 A°), то $\Delta p \cdot \Delta x \approx 5 \cdot 10^{-12}$ эрг·сек >> 10^{-27} эрг·сек. Таким образом, классическая механика Ньютона изучает *медленные движения макроскопических тел.*

Пространственно-временные системы отсчета

Движение — это перемещение тела относительно других тел (изменение его положения в пространстве).

Материальной точкой называется тело, размерами которого можно пренебречь, считая, что вся масса тела сосредоточена в одной точке.

декартова система координат, три взаимно перпендикулярных оси *x, y, z*.

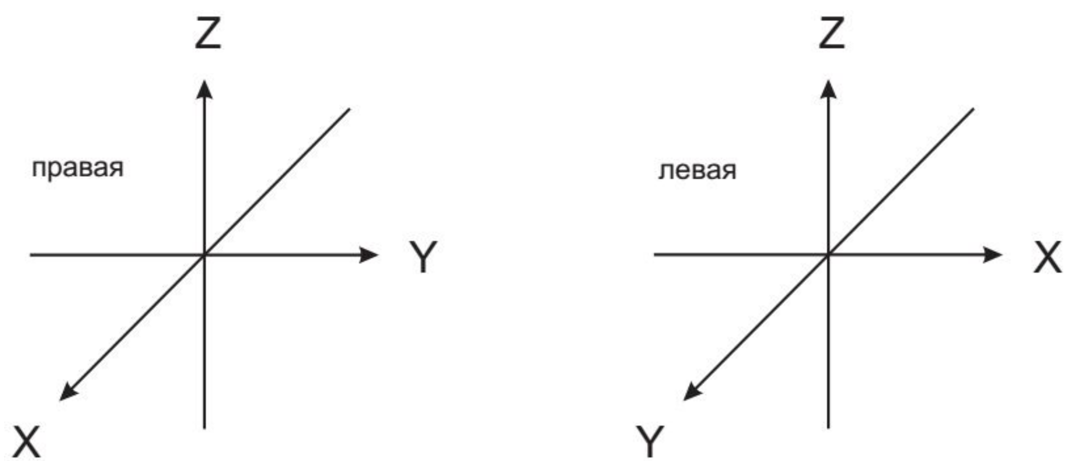


Рис. 2: Правая и левая декартовы системы координат.

левая система переходит в правую при изменении направления одной из осей, например оси x, на противоположное ($x \to -x$) (рис. 3).

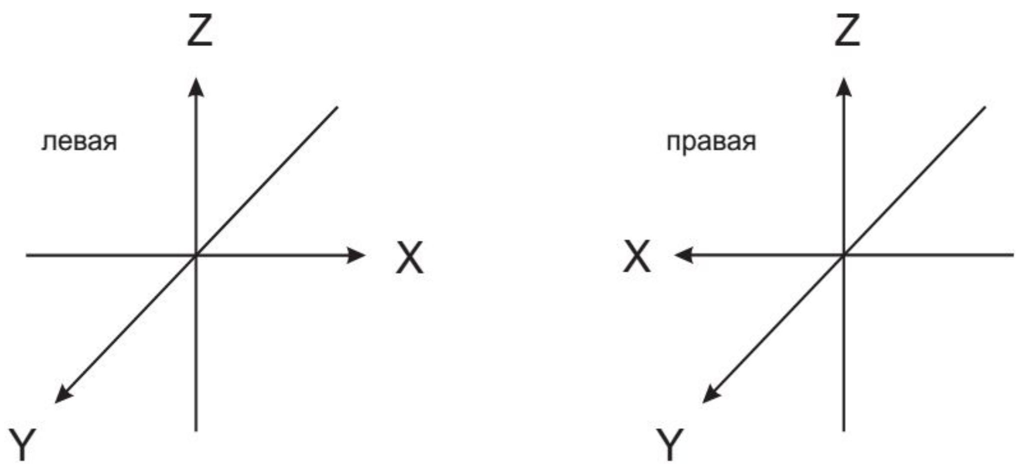


Рис. 3: Переход левой системы координат в правую при изменении знака одной из осей $x \to -x$.

Такая операция (замена $x \to -x$) называется зеркальным отражением (в плоскости ZY).

Левая система координат переходит в правую также и при изменении направления всех трех координатных осей ($x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$) с последующим поворотом. Такая операция (изменение знака всех трех осей) называется *инверсией* (рис. 4).

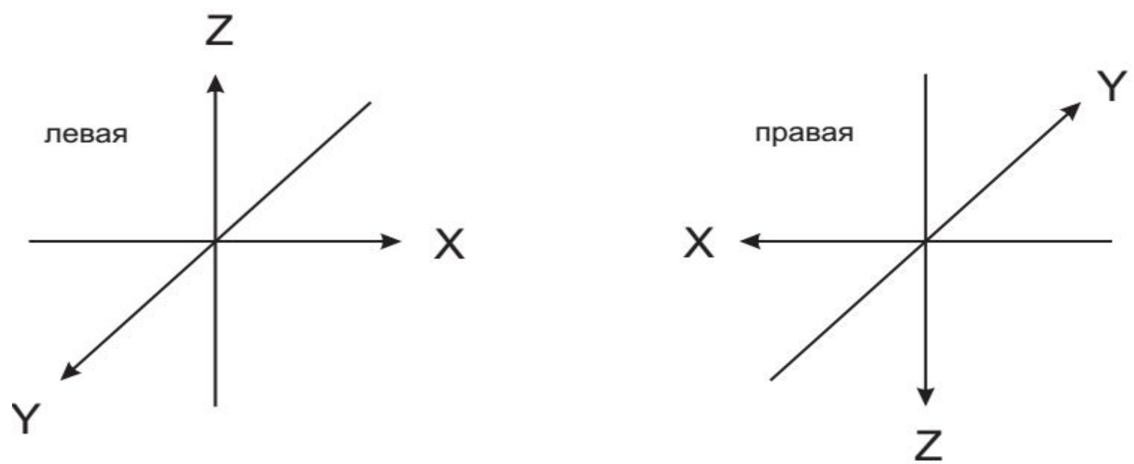
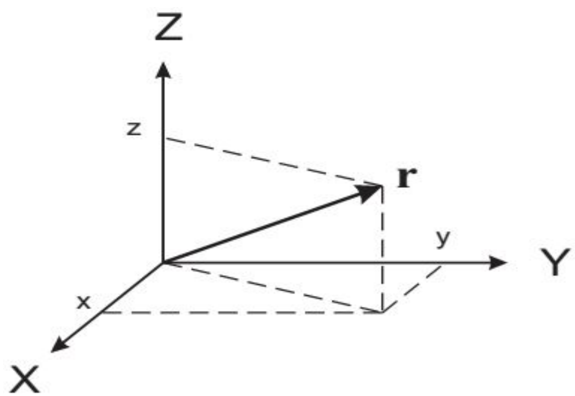


Рис. 4: Операция инверсии

Основы векторной алгебры

вектор — это физическая величина, характеризуема своей длиной и направлением в пространстве. Сложение векторов осуществляется по правилу параллелограмма.

вектор $\mathbf{r}$ вполне однозначно определяется заданием трех его проекций, хотя это могут быть и другие три числа, например длина r и два угла θ и φ (так называема сферическая система координат) (рис. 5).



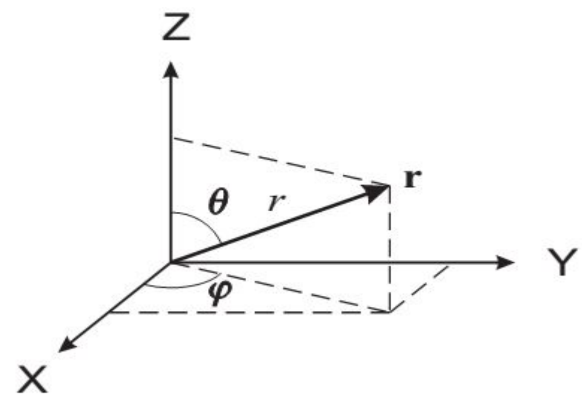


Рис. 5: Радиус-вектор в декартовой и сферической системах координат.

Декартовы координаты со сферическими связаны соотношениями

$$\begin{cases} z = r\cos\Theta. \\ x = r\sin\Theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\Theta\sin\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

В частном случае $\theta = \pi/2$ получаем полярную систему координат на плоскости XY. Цилиндрические полярные координаты ρ, φ и z определяются следующим образом

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z \tag{3}$$

Если ввести три единичных вектора **i, j, k,** направленные вдоль координатных осей (единичные орты), то радиус вектор **r** можно представить в виде суммы трех векторов:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\quad |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1. \tag{4}$$

закон сложения векторов по правилу параллелограмма (рис. 6).

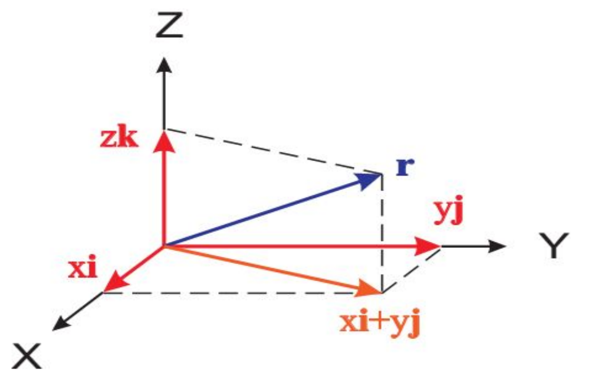


Рис. 6: Разложение радиус-вектора на составляющие вдоль координатных осей.

Длину вектора **r** можно найти, скалярно умножив его на себя самого.

скалярным произведением двух векторов A и B называется число равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\angle\mathbf{AB}) \qquad (5)$$

Если два вектора перпендикулярны друг другу, то их скалярное произведение равно нулю.

Скалярное произведение радиус вектора **r** на себя самого равно

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = |\mathbf{r}|\ |\mathbf{r}|\ \cos(\widehat{\mathbf{rr}}) = r^2, \qquad (6)$$

так как $\cos(\angle\mathbf{rr}) = 1$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} &= (x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k})\cdot(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}) = \\
&= x^2\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}+2xy\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+ \qquad (7)\\
&+ 2xz\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+2yz\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Но в силу взаимной ортогональности векторов **i, j** и **k** их скалярные произведения равны нулю,

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0, \qquad (8)$$

а квадраты равны единице

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \qquad (9)$$

квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций:

$$r^2 = x^2+y^2+z^2. \qquad (10)$$

Аналогичным образом может быть доказано равенство

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z.} \qquad (11)$$

Это легко сделать, если представить каждый из векторов в виде

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k} \qquad (12)$$

и аналогично для вектора **B**. После этого остаётся только их скалярно перемножить и воспользоваться равенствами (8, 9).

Перемещение, скорость и ускорение материальной точки.

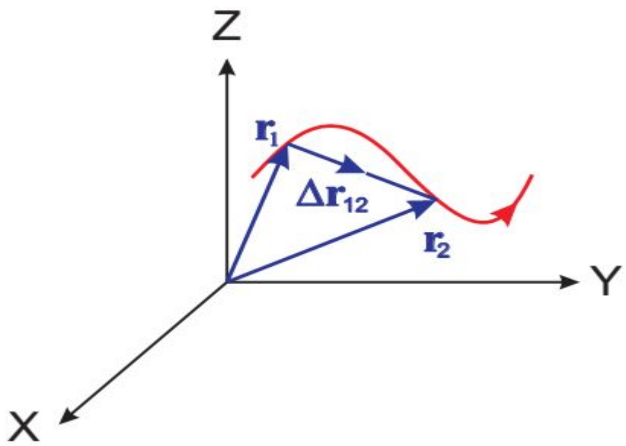


Рис. 7: Траектория и перемещение материальной точки.

Пусть радиус-вектор материальной точки в момент времени t_1 равен $\mathbf{r}_1$, а в момент времени t_2 равен $\mathbf{r}_2$. Таким образом, при движении радиус-вектор $\mathbf{r}$ изменяется со временем $r = r(t)$. Если нам известен закон этого изменения, то мы знаем, где в каждый момент времени находится материальная точка, то есть закон ее движения. Задание векторной функции $r(t)$ эквивалентно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — координат материальной точки,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \qquad (13)$$

Разность векторов $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_1$ называется *перемещением* материальной точки

$$\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (14)$$

$$\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_2, \qquad (15)$$

Отношение перемещения материальной точки Δr_{12} к интервалу времени $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$, то есть $\Delta r_{12}/\Delta t_{12}$, тоже является вектором, причем коллинеарным вектору перемещения.

Предел отношения перемещения $\Delta \mathbf{r}_{12}$ к интервалу Δt_{12}, когда последний стремятся к нулю, называют производной вектора $\mathbf{r}(t)$ по времени t:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t_{12}\to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_{12}}{\Delta t_{12}}.} \tag{16}$$

Этот вектор направлен по касательной к траектории материальной точки в точке t_1 (рис. 8).

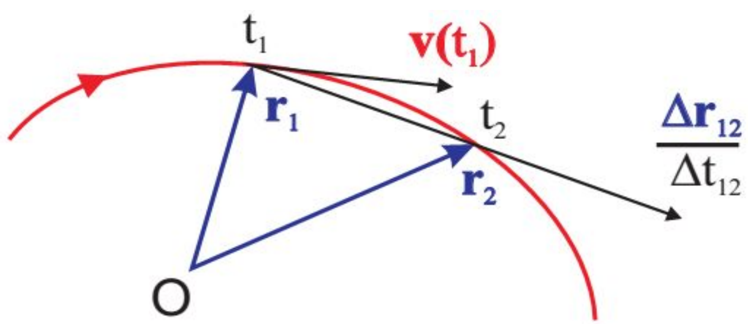


Рис. 8: Скорость материальной точки.

По определению, скорость материальной точки равна

$$\boxed{\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}.} \qquad (17)$$

Это вектор (направленный по касательной к траектории в точке, соответствующей моменту времени t) с компонентами

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\}, \quad \text{или} \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}, \quad \text{или} \qquad (18) \\ v_x &= \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Величина скорости, или ее модуль определяется суммой квадратов ее проекций

$$v \equiv |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (19)$$

Вектор скорости частицы $\mathbf{v}(t)$ так же, как и радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$, является функцией времени t.

Аналогичным образом можно определить вектор $\mathbf{a}(\mathrm{t})$, характеризующий скорость изменения скорости частицы и называемый ускорением:

$$\boxed{\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.} \tag{20}$$

Оно определяется как вторая производная радиус вектора $\mathbf{r}(t)$ по времени t.

Равноускоренное движение.

Если величина и направление вектора ускорения не изменяются со временем

$$\mathbf{a} = \mathrm{const}, \tag{21}$$

то такое движение называется *равноускоренным* (равнозамедленным). Для равноускоренного движения скорость материальной точки **v***(t)* и ее радиус-вектор ***r(t)*** изменяются со временем по закону

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t, \tag{22}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2, \tag{23}$$

Путь

Рассмотрим произвольного вида траекторию, по которой движется материальная точка.

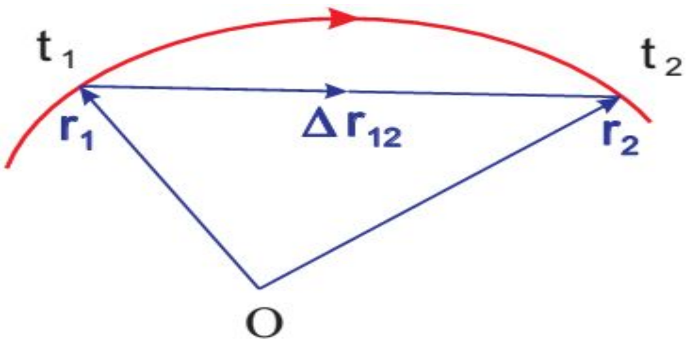


Рис. 9: Как найти путь?

Пусть в момент времени t_1 материальная точка занимала положение на траектории, характеризуемое радиус-вектором $\mathbf{r}_1$, а в момент времени t_2 — радиус-вектором $\mathbf{r}_2$ (рис. 9). Какой путь прошла материальная точка между этими двумя положениями?

Перемещение материальной точки определяется вектором $\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, но длина этого вектора не определяет пройденный материальной точкой путь.

разобьем временной интервал $t_2 - t_1$ на много одинаковых интервалов очень малой продолжительности Δt, так что в каждом таком малом интервале движение практически прямолинейное (рис. 10).

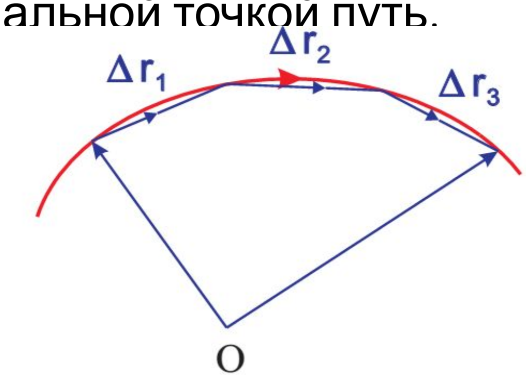


Рис. 10: Способ нахождения пути при криволинейном движении.

Число таких интервалов равно

$$n = \frac{t_2 - t_1}{\Delta t}. \tag{24}$$

Векторы перемещения материальной точки Δr_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) в каждом из этих интервалов времени. При достаточно малом Δt пройденный путь S может быть аппроксимирован суммой длин этих векторов:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} |\Delta \mathbf{r}_i|. \tag{25}$$

Разделим и помножим каждое слагаемое в этой сумме на Δt:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta \mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \tag{26}$$

точное равенство получается в пределе $\Delta t \to 0$:

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta \mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \tag{27}$$

можно поменять местами операции суммирования и предельного перехода и вспомнить, что предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t} = \mathbf{v}_i \tag{28}$$

равен скорости частицы $\mathbf{v}$ в i − том интервале. Тогда путь может быть представлен в виде суммы бесконечного числа бесконечно малых слагаемых

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{v}_i|\, dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)|\, dt.} \tag{29}$$

для некоторой функции $f(t)$ неопределенный интеграл от функции $f(t)$

$$\int f(t)\, dt \equiv F(t) + const, \tag{30}$$

где $dF/dt = f(t)$, и функция $F(t)$ называется первообразной по отношению к функции $f(t)$. Определенный интеграл в пределах от t_1 до t_2 от функции $f(t)$ вычисляется при этом по правилу (теорема Ньютона-Лейбница)

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt = F(t)|_{t_1}^{t_2} \equiv F(t_2) - F(t_1). \tag{31}$$

Это разность значений первообразной на верхнем и нижнем пределах.

путь, пройденный частицей в интервале ее движения от t_1 до t_2, равен определенному интегралу по времени в этих пределах от модуля скорости частицы.

Если модуль (или величина) скорости в процессе движения не меняется, то пройденный материальной точкой путь равен этой скорости умноженной на время движения.
Средним значением функции $f(t)$ в некотором интервале от t_1 до t_2 называется величина

$$\boxed{\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t1}^{t_2} f(t)dt.} \qquad (32)$$

Поэтому пройденный частицей путь S в интервале от t_1 до t_2 равен среднему значению величины скорост$\overline{|\mathrm{v}(t)|}$ в этом интервале, помноженной на время движения $t_2 - t_1$.

Теорема Ньютона — Лейбница

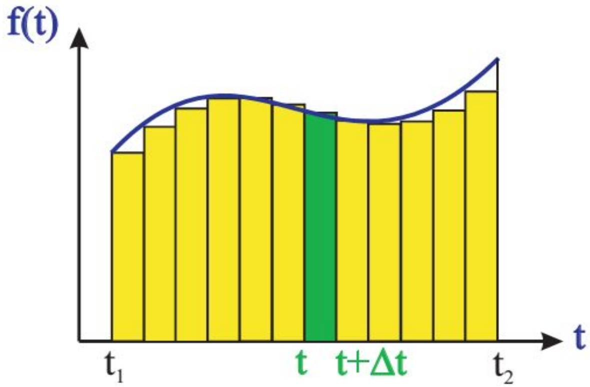


Рис. 11: Теорема Ньютона-Лейбница.

Формула Ньютона—Лейбница или основная теорема анализа даёт соотношение между двумя операциями: взятием определённого интеграла и вычислением первообразной. Определенный интеграл от функции *f(t)* в пр

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i)\Delta t \qquad (33)$$

численно равен площади под графиком функции *f(t)* в интервале от t_1 до t_2.

площадь можно аппроксимировать как сумму площадей прямоугольников — рис. 11. Аппроксимация становится точной когда основание прямоугольника $\Delta t \to 0$. Определим функцию *F(t)* следующим образом

$$F(t) = \int_{t_1}^{t} f(t)dt. \qquad (34)$$

И это есть площадь под кривой *f(t)* в интервале от t_1 до t_2.

$$F(t+\Delta t) = \int\limits_{t_1}^{t+\Delta t} f(t)dt \tag{35}$$

есть площадь под кривой $f(t)$ в интервале от t_1 до $t + \Delta t$. Разность этих площадей может быть аппроксимирована площадью заштрихованного на рис. 11 прямоугольника

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(t)dt \approx f(t)\Delta t. \tag{36}$$

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \approx f(t). \tag{37}$$

Точное равенство получиться в пределе $\Delta t \to 0$. Но

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{dF}{dt}. \tag{38}$$

Поэтом
у

$$\frac{dF}{dt} = f(t). \tag{39}$$

Над дверью своего деревенского дома Нильс Бор прибил подкову, которая, согласно поверью, должна приносить счастье. Увидев подкову, один из посетителей воскликнул:
— Неужели такой великий ученый, как вы, может действительно верить, что подкова над дверью приносит удачу?
— Нет,— ответил Бор, — конечно, я не верю. Это предрассудок. Но, вы знаете, говорят, она приносит удачу даже тем, кто в это не верит.

1.Как меняется при отражении в плоскости направление обхода плоского контура в двух случаях: а) плоскость контура перпендикулярна плоскости отражения; б) плоскость контура параллельна плоскости отражения?

2.Материальна точка начинает двигаться по прямой с постоянным ускорением a. Спустя время τ после начала ее движения ускорение меняет знак на противоположный, оставаясь неизменным по модулю. Определить, через какое время t после начала движения точка окажется в исходном положении.

3.Два тела движутся по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями v_1 и v_2 и постоянными ускорениями a_1 и a_2, направленными противоположно соответствующим скоростям в начальный момент времени. При каком максимальном начальном расстоянии l_{max} между телами они встретятся в процессе движения?