Решение вычислительных задач на компьютере

Решение вычислительных задач на компьютере

§ 69. Точность вычислений

Погрешности измерений

«Недостатки математического образования с наибольшей отчетливостью проявляются в чрезмерной точности численных расчетов».
Карл Фридрих Гаусс.

Погрешность (ошибка) – отклонение измеренного или вычисленного значения от истинного значения.

цена деления 0,1 см

измерено	фактически
8,2 см	**8,15 ... 8,25** см
7,8 см	**7,75 ... 7,85** см

Толщина дна:

вычислено	фактически
0,4 см	**0,3 ... 0,5** см

0,4 ± 0,1 см

Погрешности измерений

абсолютная погрешность Δx

0,4 ± 0,1 см

Можно ли оценить точность измерений?

Относительная погрешность:

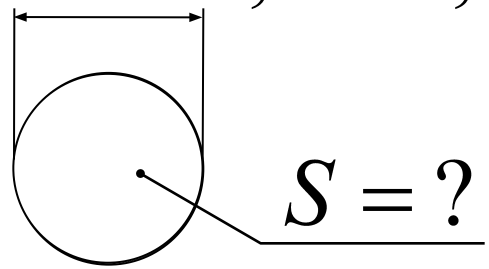
$$\delta_x = \frac{\Delta x}{\boxed{x^*}}$$

измеренное значение

$$\delta_x = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25 = 25\%$$

Погрешности вычислений

$$D = 1{,}2 \pm 0{,}1 \text{ см}$$



$$S = ?$$

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 1{,}1309733552923255658465516179806...$$

$$S_{\min} = \frac{\pi \cdot 1{,}1^2}{4} = 0{,}950... \qquad S_{\max} = \frac{\pi \cdot 1{,}3^2}{4} = 1{,}327...$$

$S = 1{,}1 \pm 0{,}2$ с
м

$$\delta_x = \frac{0{,}2}{1{,}1} \cdot 100\% \approx 18\%$$

Все практические расчеты выполняются неточно. Погрешность результата вычислений определяется погрешностью исходных данных.

Погрешности вычислений

$$x = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$$

$$a = 1000 \pm 0{,}001; \quad b = 0{,}002 \pm 0{,}001;$$
$$c = 1000 \pm 0{,}001; \quad d = 0{,}003 \pm 0{,}001.$$

$$\delta_a = \delta_c = \frac{0{,}001}{1000} = 0{,}01\%$$

$$\delta_b = \frac{0{,}001}{0{,}002} = 50\% \qquad \delta_b = \frac{0{,}001}{0{,}003} = 33\%$$

$$x = \frac{1000}{0{,}002} - \frac{1000}{0{,}003} = 166667$$

неточные числа в знаменателе

$$x_{\max} = \frac{1000}{0{,}001} - \frac{1000}{0{,}004} = 750000$$

$$x_{\min} = \frac{1000}{0{,}003} - \frac{1000}{0{,}002} = -166667$$

$$\delta_x = \frac{750000 - 166667}{166667} \approx 352\%$$

Метод **вычислительно неустойчив**: малые погрешности в исходных данных могут привести к большим погрешностям в решении.

Источники погрешностей

- неточность **исходных данных**
- неточность записи **вещественных чисел** в двоичном коде конечной длины
- погрешности приближенного вычисления некоторых стандартных **функций** (*sin*, *cos*, …)
- накопление погрешностей при **арифметических действиях** с неточными данными
- погрешность **метода**

Решение вычислительных задач на компьютере

§ 70. Решение уравнений

Методы решения уравнений

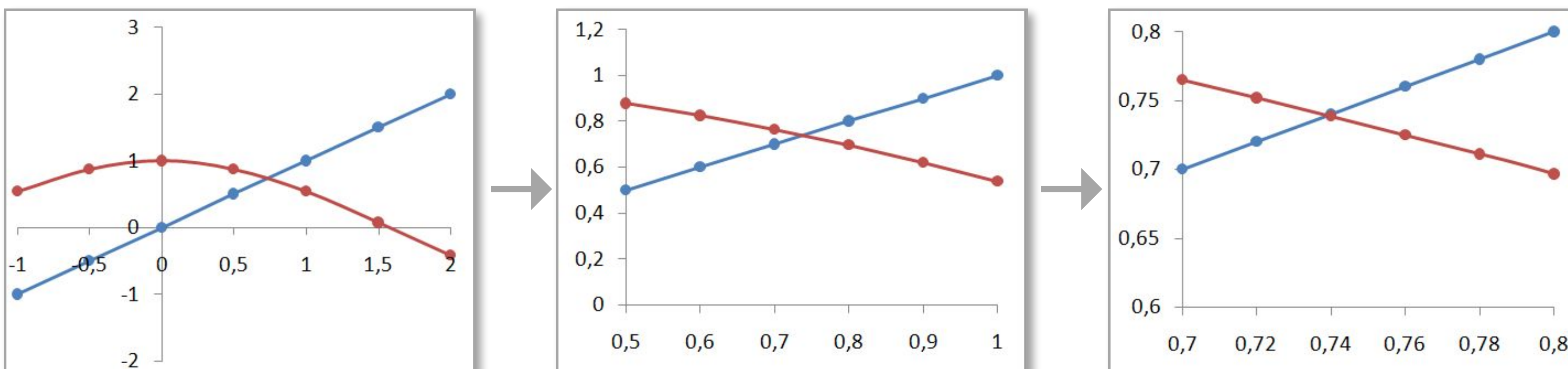
Точные (аналитические) методы:

$$ax + b = 1, \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1-b}{a}$$

$$x = \cos x$$

Как решать?

Графический метод:



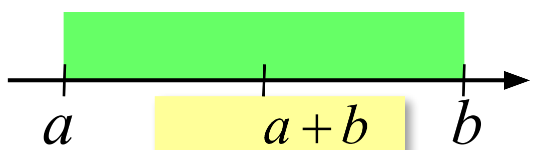
Можно поручить такой поиск компьютеру!

Можно ли получить точное решение?

Приближённые методы

Сжатие отрезка:

1) выбрать начальный отрезок $[a_0, b_0]$ (одно решение!)
2) уточнить решение с помощью некоторого алгоритма: ⇒ $[a, b]$
3) повторять шаг 2, пока длина отрезка $[a, b]$ не станет достаточно мала



$$x = \frac{a+b}{2}$$

Что лучше выбрать в качестве решения?

Как оценить ошибку?

$$\left|x - x^*\right| \le \frac{b-a}{2}$$

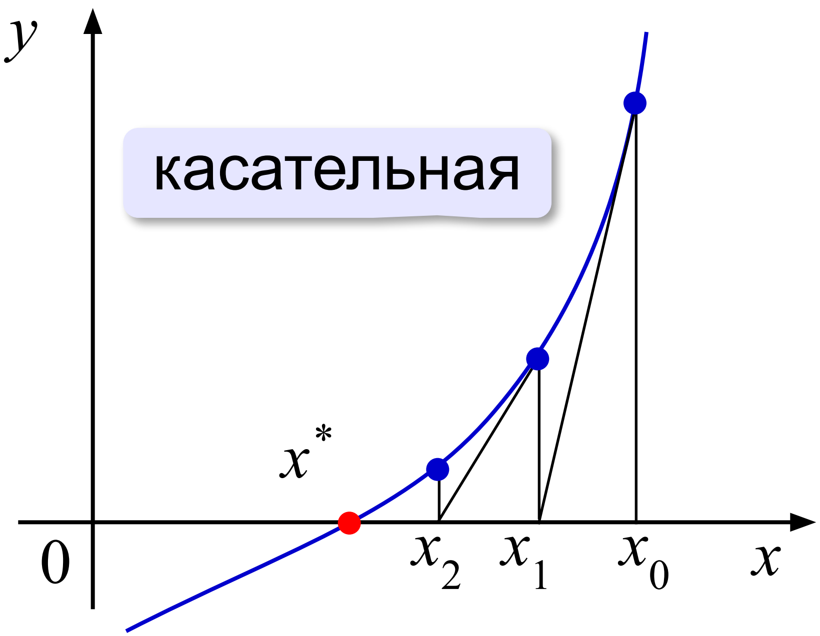
Завершение работы: $b - a \le 2\varepsilon$

допустимая ошибка

Приближенные методы

По одной точке:

1) выбрать начальное приближение x_0
2) уточнить решение с помощью некоторого алгоритма: $\Rightarrow x$
3) повторять шаг 2, пока два последовательных приближения не будут отличаться достаточно мало



Завершение работы:

$$|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon$$

метод Ньютона (метод касательных)

Приближенные методы

Итерационные методы (лат. *iteratio – повторение*) – основаны на многократном выполнении одинаковых шагов, каждый из которых уточняет решение.

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

следующее приближение

предыдущее приближение

- дают какое-то решение, если точное неизвестно
- могут давать меньшие ошибки, чем вычисления по точным формулам

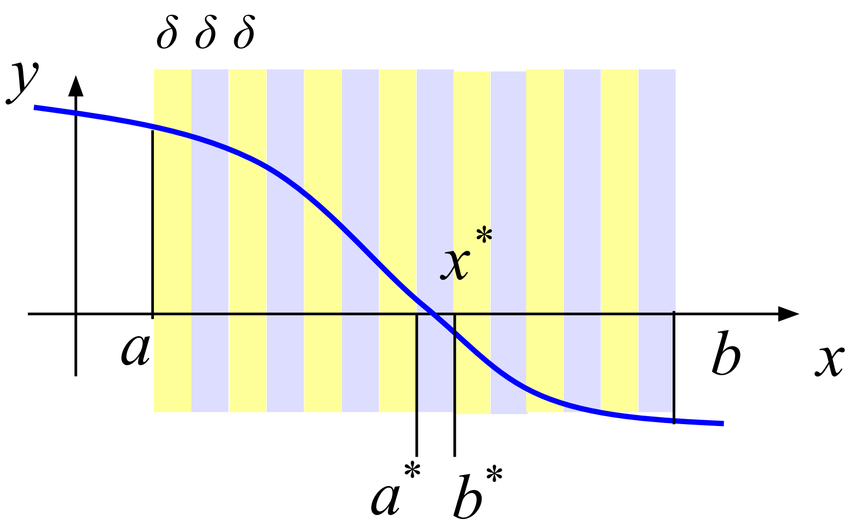
- решение приближенное: $x \boxed{\approx} 1{,}23345$
- ответ – число (зависимость от параметра?)
- большой объем вычислений
- не всегда просто оценить погрешность

Метод перебора

$$f(x) = 0$$

$$x = \cos x \quad \Rightarrow \quad x - \cos x = 0$$

Задача. Найти решение уравнения справа от точки $x = a$ с точностью ε.



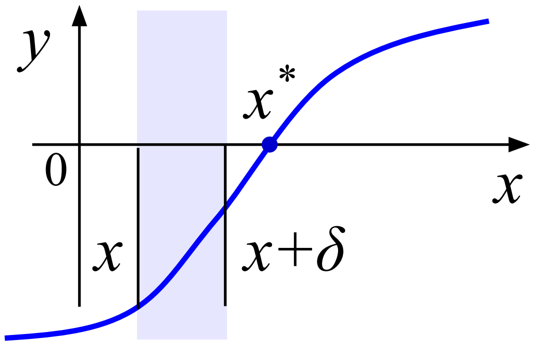
Алгоритм:

1) разбить отрезок $[a, b]$ на полосы шириной $\delta = 2\varepsilon$
2) найти полосу $[a^*, b^*]$, в которой находится x^*
3) решение:

$$x^* \approx \frac{a^* + b^*}{2}$$

Есть ли решение на $[x,\ x+\delta\ ]$?

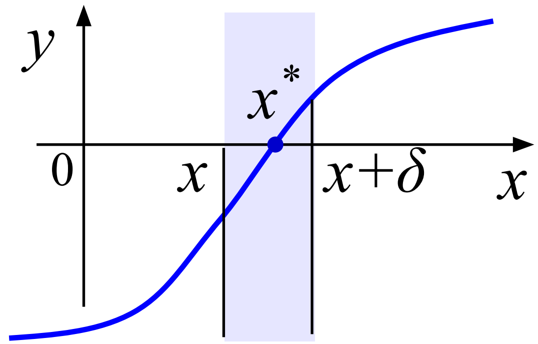
нет решения



$f(x) < 0$

$f(x+\delta) < 0$

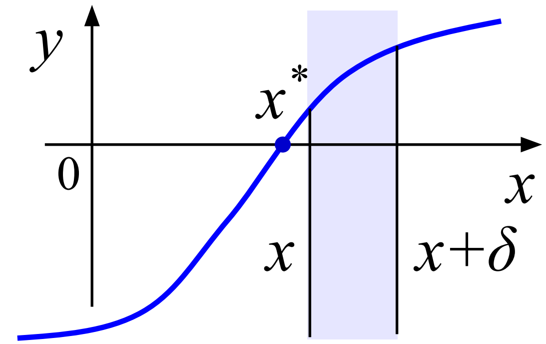
есть решение!



$f(x) < 0$

$f(x+\delta) > 0$

нет решения



$f(x) > 0$

$f(x+\delta) > 0$

? В чём отличие?

$$f(x)\,f(x+\delta) \le 0$$

! Если *непрерывная* функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах интервала $[a,\ b]$, то в некоторой точке x^* внутри $[a,\ b]$ она равна 0, то есть $f(x^*) = 0$!

Метод перебора ($a = 0$)

```
const eps = 0.001;
var x, delta: real;
 function f(x: real):real;
 begin
   f:= x - cos(x)
 end;
begin
  x:= 0; {x:= a;}
  delta:= 2*eps;
  while f(x)*f(x+delta) > 0 do
    x:= x + delta;
  writeln('x = ',(x+eps):6:3)
end.
```

? Когда остановится?

? Зацикливание?

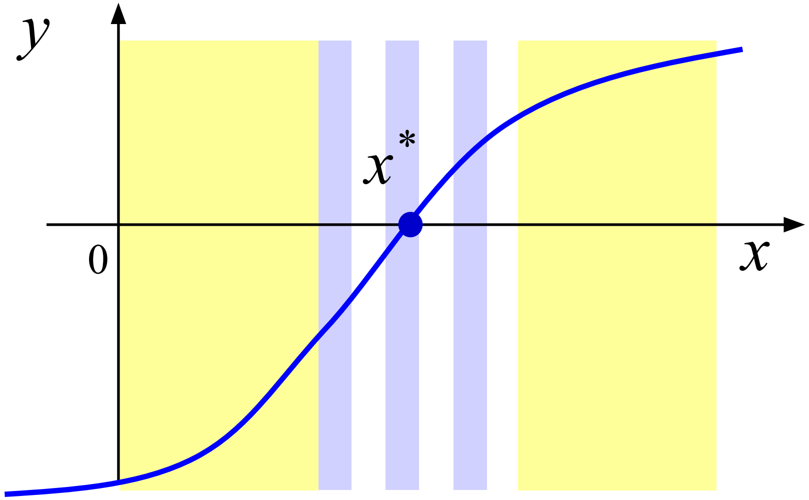
Метод перебора

- **простота**
- можно получить решение с **любой заданной точностью**

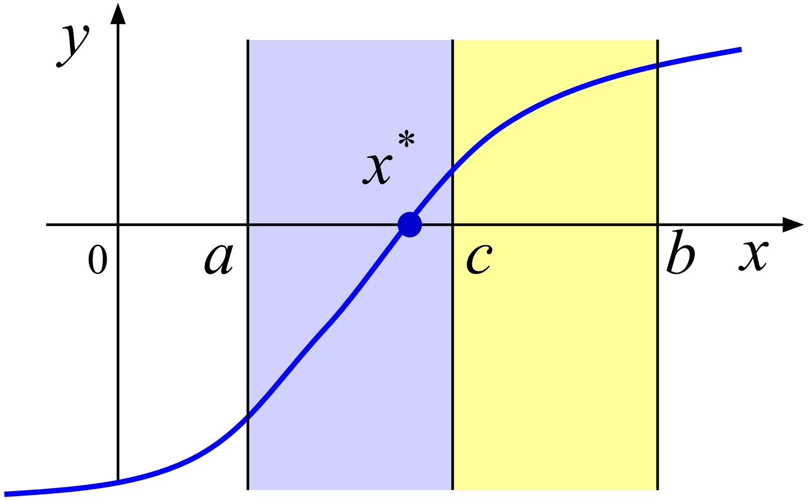
- большой **объем вычислений**

Усовершенствованный перебор:

1) **отделение корней** – перебор с большим шагом
2) **уточнение корней** – перебор с шагом 2ε



Метод деления отрезка пополам



Алгоритм:

1) вычислить середину отрезка: $c = \dfrac{a+b}{2}$
2) если на отрезке $[a,c]$ есть решение, присвоить **`b:=c`**, иначе **`a:=c`**
3) повторять шаги 1-2 до тех пор, пока $b - a > 2\varepsilon$

? Что напоминает?

? п.2: как определить, есть ли решение?

$$f(a)\cdot f(c) \le 0$$

Вариант: $\operatorname{sign}[f(a)] \ne \operatorname{sign}[f(c)]$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Метод деления отрезка пополам

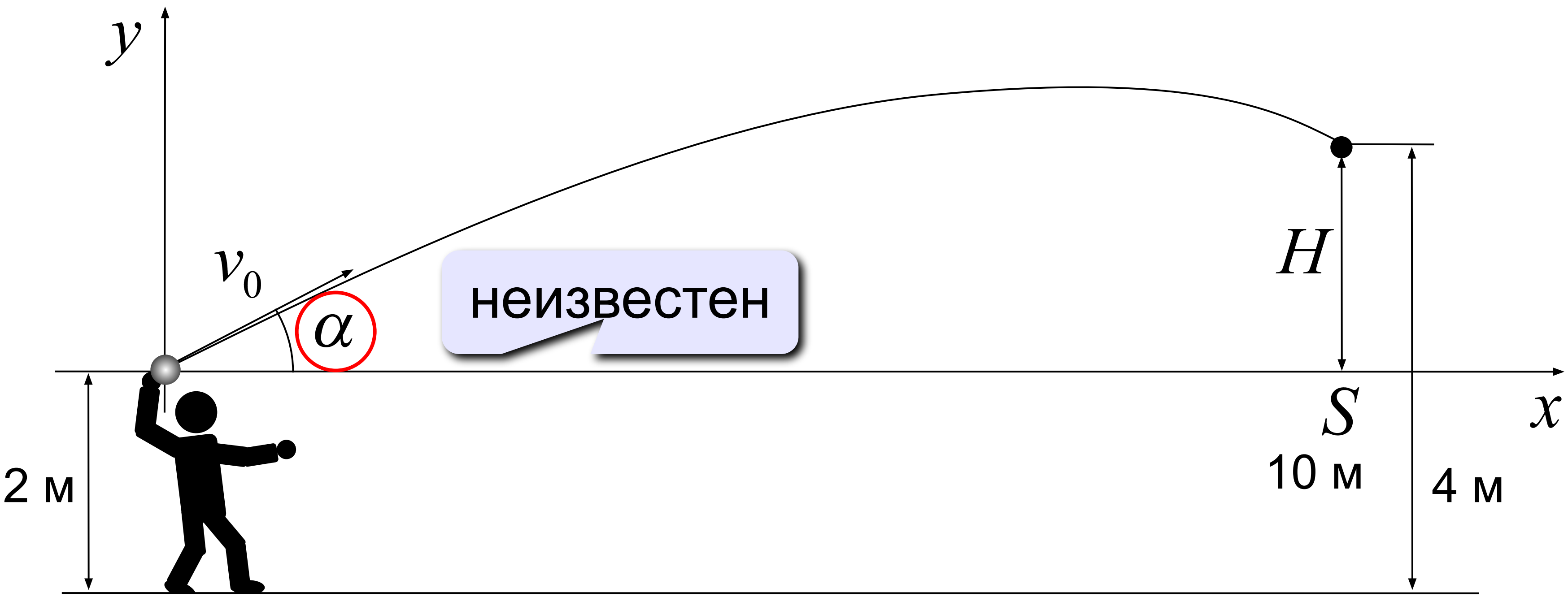
Паскаль:

```
delta:= 2*eps;
while b - a > delta do begin
  c:= (a + b) / 2;
  if f(a)*f(c) <= 0 then
       b:= c
  else a:= c;
end;
writeln('x = ', (a+b)/2:6:3);
```

? Как меняется длина отрезка?

? За сколько шагов уменьшится в 1000 раз?

Полёт мяча



$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha,$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Полёт мяча

Задача. Найти **угол α** (и время t) при котором $x = S$ и $y = H$:

$$S = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha, \quad H = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Решение:

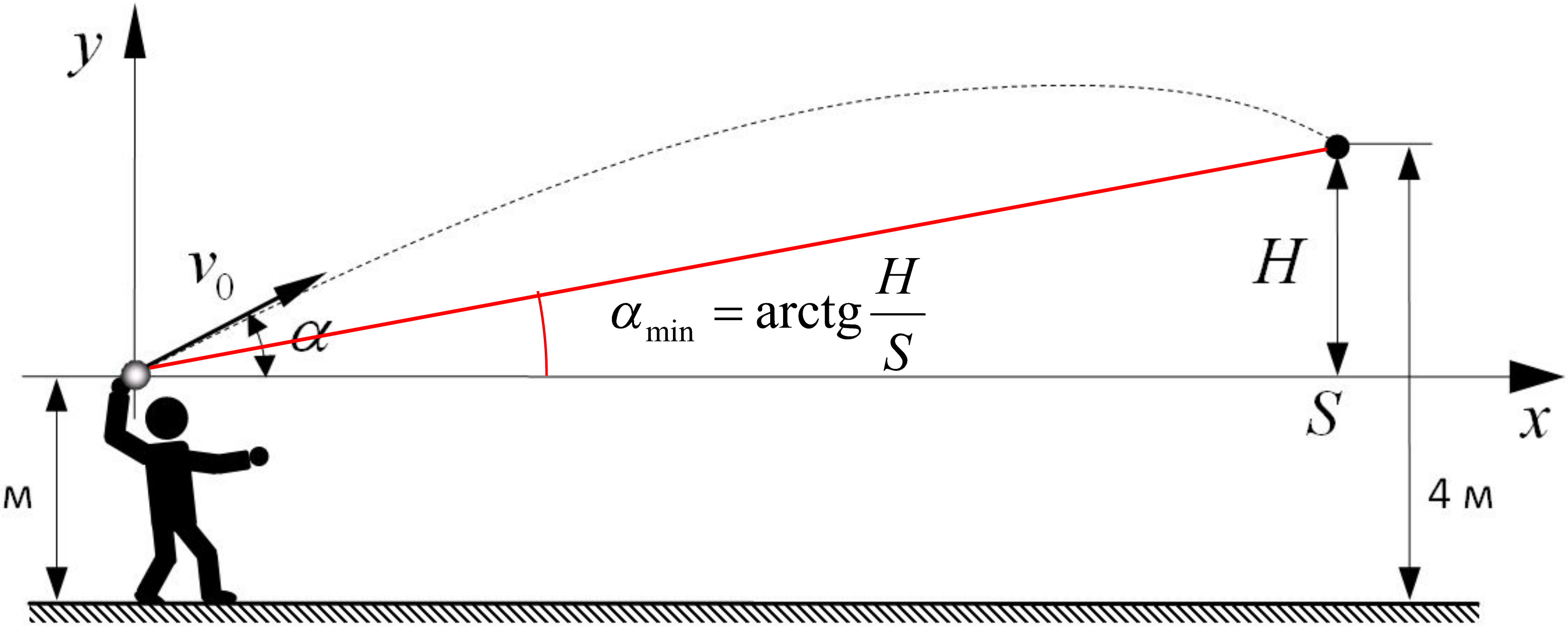
$$t = \frac{S}{v_0 \cdot \cos\alpha} \rightarrow H = \frac{\cancel{v_0} \cdot S \cdot \sin\alpha}{\cancel{v_0} \cdot \cos\alpha} - \frac{g \cdot S^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

$$f(\alpha) = S \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g \cdot S^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} - H = 0$$

Диапазон углов для поиска: $[0^\circ \ldots 90^\circ] \Rightarrow \left[0 \ldots \frac{\pi}{2}\right]$

? Как уточнить?

Уточнение диапазона углов



Диапазон углов для поиска: $\left[\mathrm{arctg}\,\frac{H}{S} \ldots \frac{\pi}{2}\right]$

Полёт мяча

Программа на языке Паскаль:

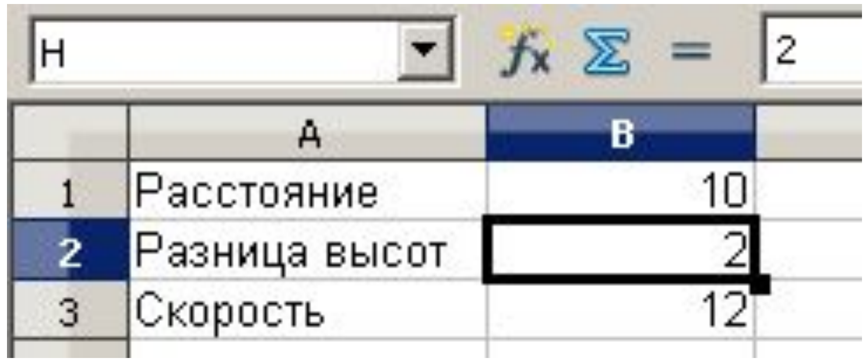
```
u:= 0;
delta:= 2*eps;
while u < pi/2 do begin
  if f(u)*f(u+delta) <= 0 then begin
    alpha:= (u+eps)*180/pi;
    writeln('Угол: ', alpha:4:1, ' градусов');
  end;
  u:= u + delta
end;
```

$$\alpha_1 \approx 35{,}6^\circ$$
$$\alpha_2 \approx 65{,}8^\circ$$

Полёт мяча

Использование табличного процессора:

имя ячейки
или диапазона



Диапазон углов:

Полёт мяча

	A	B	C	D	E
1	Расстояние	10			
2	Разница высот	2			
3	Скорость	12			
4					
5	Угол	Угол(рад)	Время	y	f(alpha)
6	0	=RADIANS(A6)	=S/v/COS(B6)	=v*SIN(B6)*C6-9,81*C6^2/2	=D6-H
7	5				
8	10				

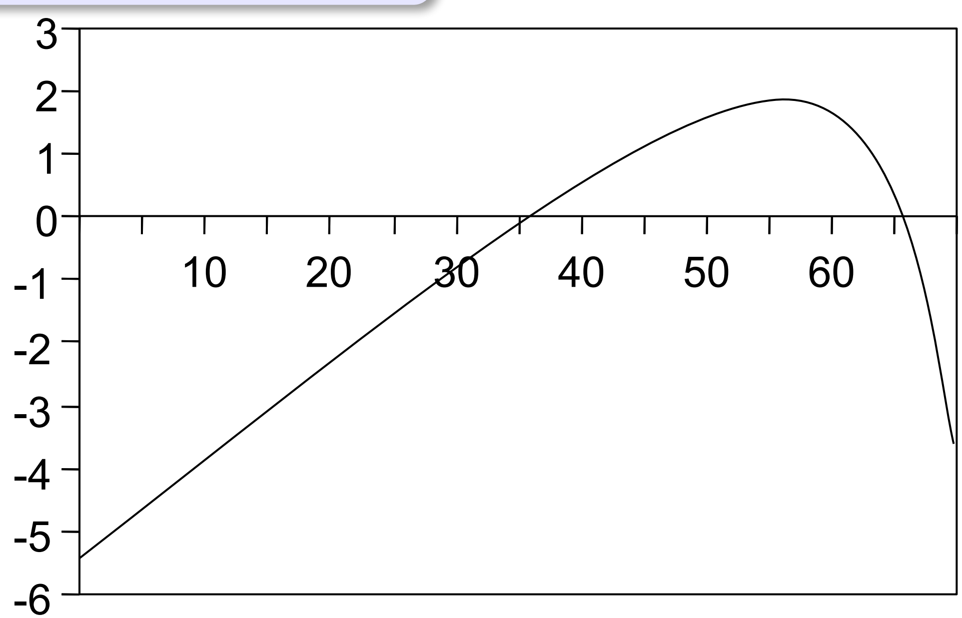
S ⇔ B1

Excel: **РАДИАНЫ**

Диаграмма XY:

Excel: **Точечная**

$$\alpha_1 \approx 35^\circ$$
$$\alpha_2 \approx 65^\circ$$



Полёт мяча

с графика!

	H	I	J	K	L
1	Угол	Угол(рад)	Время	y	f(alpha)
2	35				

начальное приближение

целевая ячейка

Сервис – Подбор параметра:

нужно $f(\alpha) = 0$

? Как найти второе решение?

изменяем начальное приближение → результат в **H2**!