Логика высказываний

- Тавтологии и противоречия
- Логическая эквивалентность высказываний
- Булева алгебра высказываний
- Выполнимые и невыполнимые высказывания
- Проблема выполнимости

Определение 1 Сложное высказывание называется **тавтологией**, если оно истинно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

Определение 2 Сложное высказывание называется **противоречием**, если оно ложно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

Определение 3 Сложное высказывание называется **контингенцией**, если оно не является ни тавтологией ни противоречием.

Пример 1 Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

Примеры тавтологии и противоречия			
p	□ p	p□ □ p	p□ □ p
T	F	T	F
F	T	T	F

- Высказывание p□□p всегда истинно, значит p□□p – тавтология.
- Высказывание p□□p всегда ложно, значит p□□p – противоречие.

Два сложных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они имеют одинаковые истинностные значения на всех возможных наборах истинностных значений входящих в них пропозициональных переменных.

Логическую эквивалентность сложных высказываний можно определить, используя тавтологию.

Определение 4 Сложные высказывания p и q называются **логически эквивалентными**, если сложное высказывание p□q является тавтологией.

Запись p□q означает, что p и q логически эквивалентны.

Для определения эквивалентности двух сложных высказываний можно использовать таблицы истинности.

Два сложных высказывания логически эквивалентны тогда и только тогда, когда столбцы истинностных значений этих высказываний совпадают.

Будьте внимательны! В таблицах истинности, соответствующих рассматриваемым высказываниям, наборы истинностных значений пропозициональных переменных должны располагаться в одинаковой последовательности.

Пример 2 Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □ (p□ q) и □ p□ □ q.

p	q	p□ q	□ (p□ q)	□ p	□ q	□ p□ □ q
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

Пример 2 Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □ (p□ q) и □ p□ □ q.						
p	q	p□ q	□ (p□ q)	□ p	□ q	□ p□ □ q
T	T	T				
T	F	T				
F	T	T				
F	F	F				

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$.						
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F			
T	F	T	F			
F	T	T	F			
F	F	F	T			

Пример 2 Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q.						
p	q	p□q	□(p□q)	□p	□q	□p□□q
T	T	T	F	F		
T	F	T	F	F		
F	T	T	F	T		
F	F	F	T	T		

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$.						
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	
T	F	T	F	F	T	
F	T	T	F	T	F	
F	F	F	T	T	T	

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$.						
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q.						
p	q	p□q	□(p□q)	□p	□q	□p□□q
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Истинностные значения высказываний □(p□q) и □p□□q совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q, значит, сложное высказывание □(p□q) □ □p□□q является тавтологией, и сложные высказывания □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

□(p□q) □ □p□□q – один из **законов Де Моргана**.

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □ p□q и p□ q				
p	q	□ p	□ p□q	p□ q
T T F F	T F T F			

Пример 3 Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □ p□ q и p□ q				
p	q	□ p	□ p□ q	p□ q
T	T	F		
T	F	F		
F	T	T		
F	F	T		

Пример 3 Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □ p□ q и p□ q				
p	q	□ p	□ p□ q	p□ q
T	T	F	T	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	F	T	T	

Пример 3 Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □ p□ q и p□ q				
p	q	□ p	□ p□ q	p□ q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Таблицы истинности для □ p□ q и p□ q				
p	q	□ p	□ p□ q	p□ q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Истинностные значения высказываний □ p□q и p□q совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q, значит, сложное высказывание □ p□q □ p□q является тавтологией, и сложные высказывания □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Пример 4 Покажем, что сложные высказывания p □ (q □ r) и (p □ q) □ (p □ r) логически эквивалентны.

В высказывания p □ (q □ r) и (p □ q) □ (p □ r) входят три пропозициональные переменные p, q и r. Поэтому в таблицах истинности будет 8 строк с комбинациями истинностных значений пропозициональных переменных p, q и r: T T T, T T F, T F T, T F F, F T T, F T F и F F F.

Мы будем всегда использовать в таблицах истинности этот порядок строк!

Доказательство логической эквивалентности p□ (q□ r) и (p□ q)□ (p□ r)							
p	q	r	q□ r	p□ (q□ r)	p□ q	p□ r	(p□ q)□ (p□ r)
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

Доказательство логической эквивалентности p□ (q□ r) и (p□ q)□ (p□ r)

p	q	r	q□ r	p□ (q□ r)	p□ q	p□ r	(p□ q)□ (p□ r)
T	T	T	T				
T	T	F	F				
T	F	T	F				
T	F	F	F				
F	T	T	T				
F	T	F	F				
F	F	T	F				
F	F	F	F				

Доказательство логической эквивалентности $p \lor (q \land r)$ и $(p \lor q) \land (p \lor r)$

p	q	r	$q \land r$	$p \lor (q \land r)$	$p \lor q$	$p \lor r$	$(p \lor q) \land (p \lor r)$
T	T	T	T	T			
T	T	F	F	T			
T	F	T	F	T			
T	F	F	F	T			
F	T	T	T	T			
F	T	F	F	F			
F	F	T	F	F			
F	F	F	F	F			

Доказательство логической эквивалентности $p\vee(q\wedge r)$ и $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
T	T	T	T	T	T		
T	T	F	F	T	T		
T	F	T	F	T	T		
T	F	F	F	T	T		
F	T	T	T	T	T		
F	T	F	F	F	T		
F	F	T	F	F	F		
F	F	F	F	F	F		

Доказательство логической эквивалентности

p⊠ (q⊠ r) и (p⊠ q)⊠ (p⊠ r)

p	q	r	q⊠ r	p⊠ (q⊠ r)	p⊠ q	p⊠ r	(p⊠ q)⊠ (p⊠ r)
T	T	T	T	T	T	T	
T	T	F	F	T	T	T	
T	F	T	F	T	T	T	
T	F	F	F	T	T	T	
F	T	T	T	T	T	T	
F	T	F	F	F	T	F	
F	F	T	F	F	F	T	
F	F	F	F	F	F	F	

Доказательство логической эквивалентности $p \vee (q \wedge r)$ и $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Доказательство логической эквивалентности p□ (q□ r) и (p□ q)□ (p□ r)							
p	q	r	q□ r	p□ (q□ r)	p□ q	p□ r	(p□ q)□ (p□ r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Итак, p □ (q □ r) □ (p □ q) □ (p □ r) – **дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции**.

Таблица 1. Логические эквивалентности

Эквивалентность	Название
p ▯ T ▯ p p ▯ F ▯ p	Законы тождества
p ▯ T ▯ T p ▯ F ▯ F	Законы доминирования
p ▯ p ▯ p p ▯ p ▯ p	Законы идемпотентности
▯ (▯ p) ▯ p	Закон двойного отрицания
p ▯ q ▯ q ▯ p p ▯ q ▯ q ▯ p	Законы коммутативности

Логические эквивалентности (продолжение таблицы 1)	
Эквивалентность	Название
(p ⊠ q) ⊠ r ⊠ p ⊠ (q ⊠ r) (p ⊠ q) ⊠ r ⊠ p ⊠ (q ⊠ r)	Законы ассоциативности
p ⊠ (q ⊠ r) ⊠ (p ⊠ q) ⊠ (p ⊠ r) p ⊠ (q ⊠ r) ⊠ (p ⊠ q) ⊠ (p ⊠ r)	Законы дистрибутивности
⊠(p ⊠ q) ⊠ ⊠p ⊠ ⊠q ⊠(p ⊠ q) ⊠ ⊠p ⊠ ⊠q	Законы де Моргана
p ⊠ (p ⊠ q) ⊠ p p ⊠ (p ⊠ q) ⊠ p	Законы поглощения
p ⊠ ⊠p ⊠ T p ⊠ ⊠p ⊠ F	Законы отрицания

Множество сложных высказываний, на котором заданы логические операции □, □, □, удовлетворяющие законам тождества, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и отрицания, является **булевой алгеброй**.

Таблица 2. Логические эквивалентности, содержащие условные высказывания
p ▯ q ▯ ▯p ▯ q
p ▯ q ▯ ▯q ▯ ▯p
p ▯ q ▯ ▯p ▯ q
p ▯ q ▯ ▯(p ▯ ▯q)
▯(p ▯ q) ▯ p ▯ ▯q
(p ▯ q) ▯ (p ▯ r) ▯ p ▯ (q ▯ r)
(p ▯ r) ▯ (q ▯ r) ▯ (p ▯ q) ▯ r
(p ▯ q) ▯ (p ▯ r) ▯ p ▯ (q ▯ r)
(p ▯ r) ▯ (q ▯ r) ▯ (p ▯ q) ▯ r

Таблица 3. Логические эквивалентности, содержащие биимпликации
p □ q □ (p □ q) □ (q □ p)
p □ q □ □p □ □q
p □ q □ (p □ q) □ (□p □ □q)
□(p □ q) □ p □ □q

Применение законов Де Моргана

<u>Пример 5</u> Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «Сергей пойдет на концерт, или Евгений пойдет на концерт».

<u>Решение.</u> Пусть p – «Сергей пойдет на концерт», а q – «Евгений пойдет на концерт», Тогда «Сергей пойдет на концерт, **<u>или</u>** Евгений пойдет на концерт» можно представить как p □ q. По первому закону Де Моргана □(p □ q) логически эквивалентно □p □ □q . Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «Сергей не пойдет на концерт, **<u>и</u>** Евгений не пойдет на концерт».

Применение законов Де Моргана

Пример 6 Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «У Ольги есть смартфон, и у нее есть ноутбук».

Решение. Пусть p – «У Ольги есть смартфон», а q – «У Ольги есть ноутбук», Тогда «У Ольги есть смартфон, **и** у нее есть ноутбук» можно представить как $p \land q$. По первому закону Де Моргана $\neg(p \land q)$ логически эквивалентно $\neg p \lor \neg q$. Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «У Ольги нет смартфона, **или** у нее нет ноутбука».

Построение новых логических эквивалентностей

Логические эквивалентности таблиц 1, 2 и 3 можно использовать для построения новых логических эквивалентностей.

Пусть высказывание P входит в состав сложного высказывания C(P). P можно заменить логически эквивалентным ему высказыванием Q, при этом истинностное значение сложного высказывания C(Q) будет таким же как у C(P).

Пример 7 Покажем с помощью преобразований, что высказывания □(p □ q) и p □ □q логически эквиваленты.

Решение.

□(p □ q) □ □(□p □ q) – пример 3.

Пример 7 Покажем с помощью преобразований, что высказывания □(p □ q) и p □ □q логически эквиваленты.

Решение.

□(p □ q) □ □(□p □ q)

□ □(□p) □ □q – второй закон Де Моргана

Пример 7 Покажем с помощью преобразований, что высказывания □(p □ q) и p □ □q логически эквиваленты.

Решение.

□(p □ q) □ □(□p □ q)

□ □(□p) □ □q

□ p □ □q – закон двойного отрицания.

Пример 8 Покажем с помощью преобразований, что высказывания

□(p □ (□p □ q)) и (□p □ □q)

логически эквиваленты.

Решение.

□(p □ (□p □ q)) □ □p □ □(□p □ q)

□ □p □ (□(□p) □ □q)

□ □p □ (p □ □q)

□ (□p □ p) □ (□p □ □q)

□ F □ (□p □ □q)

□ (□p □ □q) □ F

□ (□p □ □q).

<u>Пример 9</u> Покажем с помощью преобразований, что высказывание (p □ q) □ (p □ q) является тавтологией.

<u>Решение.</u>

(p □ q) □ (p □ q) □ □ (p □ q) □ (p □ q)

□ (□p □ □q) □ (p □ q)

□ (□p □ p) □ (□q □ q)

□ T □ T

□ T.

Определение 5 Сложное высказывание называется **выполнимым**, если существует набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором это сложное высказывание является истинным.

Если сложное высказывание ложно на любом наборе истинностных значений пропозициональных переменных, то оно называется **невыполнимым**.

Определение 6 Набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором выполнимое высказывание принимает значение истина, называется **решением** данной проблемы выполнимости.

Пример 9

Выясним, какие из следующих высказываний являются выполнимыми:

- (p □ □q) □ (q □ □r) □ (r □ □p) – выполнимо (p=T, q=T, r=T);
- (p □ q □ r) □ (□p □ □q □ □r) – выполнимо (p=T, q=F, r=T);
- (p □ □q) □ (q □ □r) □ (r □ □p) □ (p □ q □ r) □ □ (□p □ □q □ □r) – невыполнимо (почему?).

Применения выполнимости

В терминах выполнимости сложных высказываний моделируются задачи из различных областей науки и техники:

- робототехники,
- разработки программного обеспечения,
- компьютерного проектирования,
- проектирования функциональных схем,
- организации компьютерных сетей,
- генетики.

Головоломка Судоку 9□9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

Большой квадрат 9□9 делят на 9 маленьких квадратов 3□3. В некоторых из 81 ячеек записаны цифры от 1 до 9. Нужно заполнить пустые ячейки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом квадрате 3□3 не повторялись одинаковые цифры.

Головоломка Судоку 9□9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

<u>Задача.</u> Построить сложное высказывание, выполнимость которого равносильна решению головоломки Судоку 9□9.