МЕТРОЛОГИЯ И ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

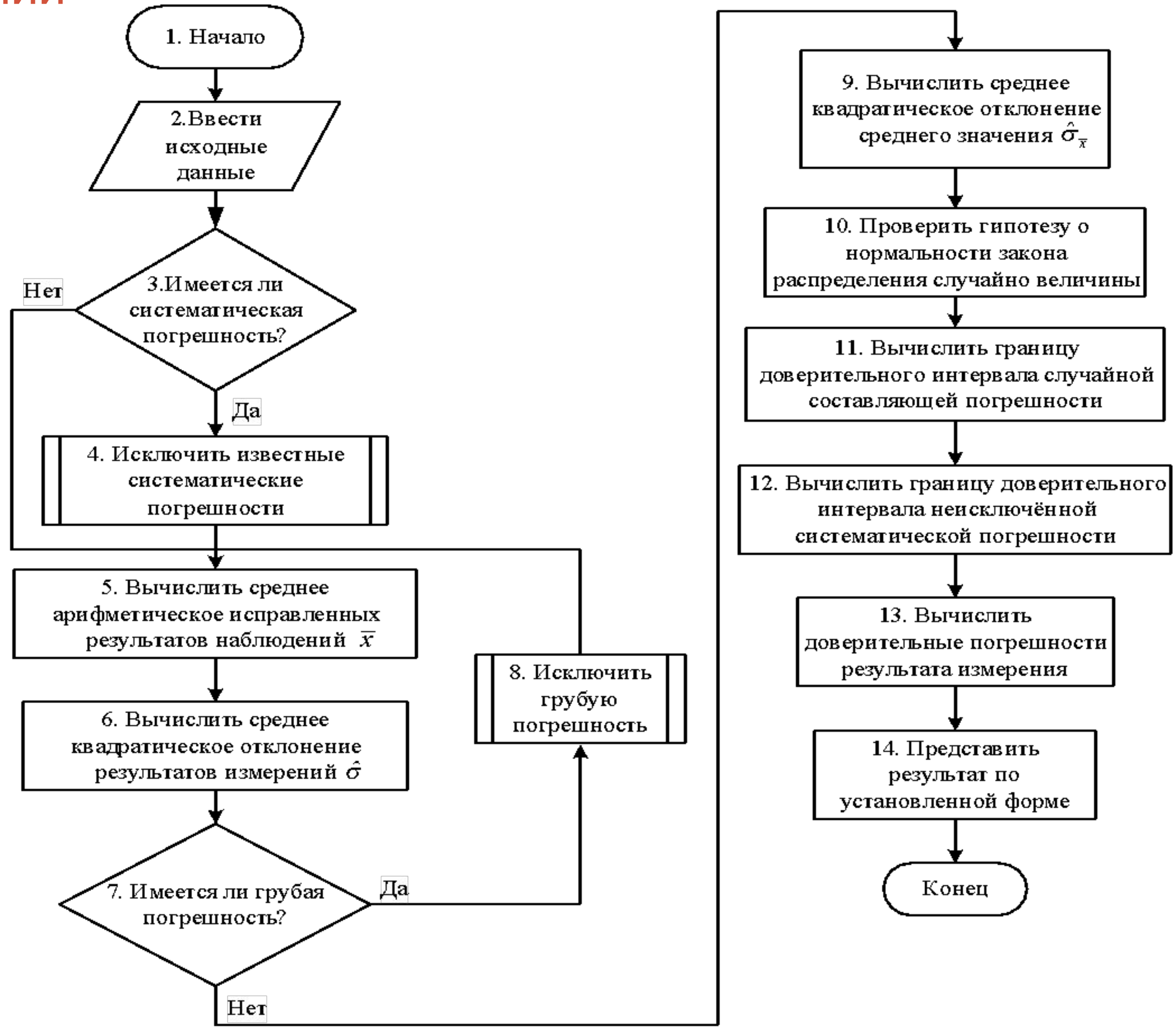
Лекция 12. Обработка результатов прямых многократных измерений

Основные аспекты

Методика выполнения прямых измерений с многократными независимыми наблюдениями и основные положения обработки результатов установлены ГОСТ 8.207-76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения».

Измерения называются ***равноточными***, если они выполнены одинаковыми по точности СИ, одним оператором и в одних и тех же условиях. Формальным признаком равноточности может быть равенство среднеквадратических погрешностей (σ) всех серий измерений.

Алгоритм обработки прямых многократных равноточных измерений



Алгоритм обработки прямых многократных равноточных измерений

1,2. Исходными данными для расчета является серия из n результатов равноточных наблюдений $x_1, x_2, ..., x_n$, а также доверительная вероятность $P_д$.

3,4. Оценка наличия и, при необходимости, исключение известной систематической погрешности из результатов наблюдения основаны на знании свойств используемого СИ, метода измерений и условий измерений.

5. Вычисляется среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений, которое принимается за наиболее вероятный результат измерения:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

При нормальной функции распределения среднее арифметическое является наилучшим приближением к истинному (действительному) значению измеряемой величины. Следовательно погрешность при каждой i –й процедуре наблюдения будет определяться формулой

$$\Delta_i = x_i - \bar{x}$$

6. Вычисление оценки СКО результата однократного измерения $\hat{\sigma}$.

С учетом введенных ограничений оценка значения среднеквадратической погрешности данного ряда измерений находится по формуле

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

7,8. Проверка наличия и, при необходимости, исключение грубых погрешностей.

Алгоритм обработки прямых многократных равноточных измерений

9. При конечном значении числа наблюдений среднее арифметическое, найденное ранее в 5 шаге отличается от истинного среднего арифметического, т.е. x также является случайной величиной. Поэтому находится среднеквадратическое отклонение среднего арифметического значения. Оценка СКО среднего значения результатов измерения, характеризующего степень разброса $\bar{x}$ выполняется следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Так как $\bar{x}$ выступает оценкой истинного значения измеряемой величины $x_{и}$ т.е. является конечным результатом выполняемых измерений, то $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ называют также средней квадратической погрешностью результата измерений.

На практике значением $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ пользуются в тех случаях, когда нужно дать оценку точности применяемого метода измерения. Если метод точен, то разброс результатов отдельных измерений мал, т.е. мало значение $\hat{\sigma}$. Значение $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ используется для характеристики точности результата измерений некоторой величины, т.е. результата, полученного посредством математической обработки итогов целого ряда отдельных прямых измерений.

Таким образом, при увеличении числа наблюдений (при независимых результатах) точность увеличивается пропорционально $\sqrt{n}$. В общем случае число наблюдений необходимо увеличивать до тех пор, пока $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ не станет меньше систематической погрешности прибора.

Алгоритм обработки прямых многократных равноточных измерений

10. Проверка гипотезы о соответствии экспериментальных данных нормальному закону распределения вероятности результата измерения. При числе наблюдений $n > 50$ для проверки их принадлежности к нормальному распределению предпочтительным является критерий χ^2 Пирсона.

Процедура проверки гипотез с использованием критериев типа χ^2 предусматривает группирование наблюдений. Область определения случайной величины разбивают на непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_{(0)}, x_{(1)}, \ldots, x_{(k-1)}, x_{(k)}$$

где $x_{(0)}$ – нижняя грань области определения случайной величины; $x_{(k)}$ – верхняя грань.

В соответствии с заданным разбиением подсчитывают число n_i выборочных значений, попавших в i –й интервал, и вероятности попадания в интервал

$$P_i(\theta) = F(x_{(i)}, \theta) - F(x_{(i-1)}, \theta)$$

соответствующие теоретическому закону с функцией распределения $F(x,\theta)$.

При этом

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} P_i(\theta) = 1$$

В основе статистик, используемых в критериях согласия типа χ^2, лежит измерение отклонений $\frac{n_i}{n}$ от $P_i(\theta)$ и определяется соотношением

$$X_n^2 = n\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}$$

Алгоритм обработки прямых многократных равноточных измерений

11. При подтверждении гипотезы о нормальности закона распределения вычисляют границы доверительного интервала случайной составляющей погрешности. Принято считать, что если число наблюдений $n > 30$, то значение интеграла необходимо вычислять через функцию Лапласа. Для заданных значений $P_д$ по табулированным значениям функции Лапласа $\Phi(z) = P_д$ находят значения $z(P_д)$, а учитывая, что $z(P_д) = \Delta / \hat{\sigma}_{\bar{x}}$, границы доверительного интервала определяют по формулам:

$$x_в = \bar{x} + z(P_д)\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

$$x_н = \bar{x} - z(P_д)\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

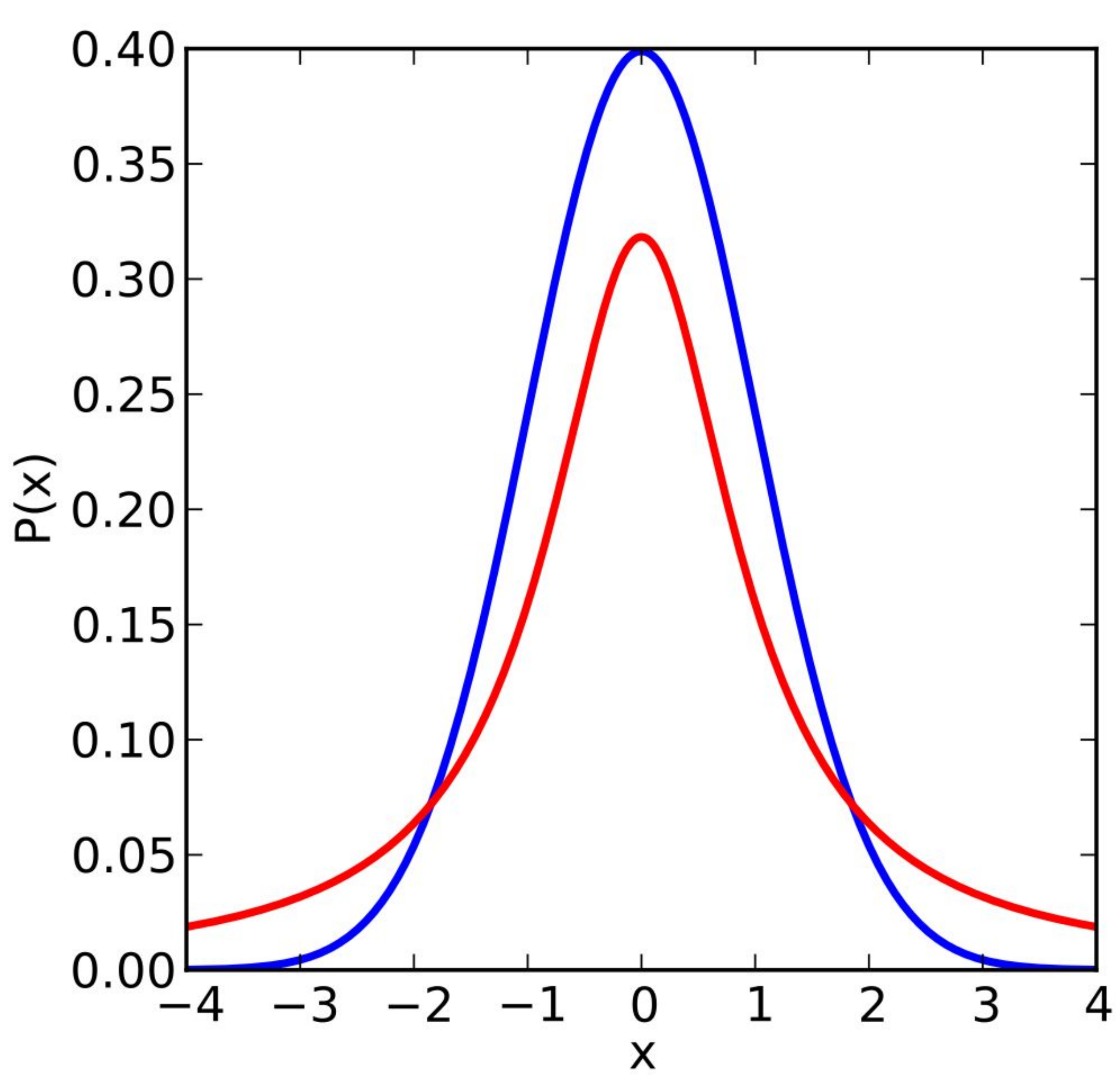
Если число отсчетов $n \le 30$, но суждение о нормальности распределения остается справедливым, то используют распределение Стьюдента. Для заданных значений $P_д$ и n по таблицам распределения Стьюдента находят коэффициент $t(n, P_д)$, а затем вычисляют верхнюю и нижнюю границы доверительного интервала:

$$x_в = \bar{x} + \hat{\sigma}_{\bar{x}} t(n, P_д)$$

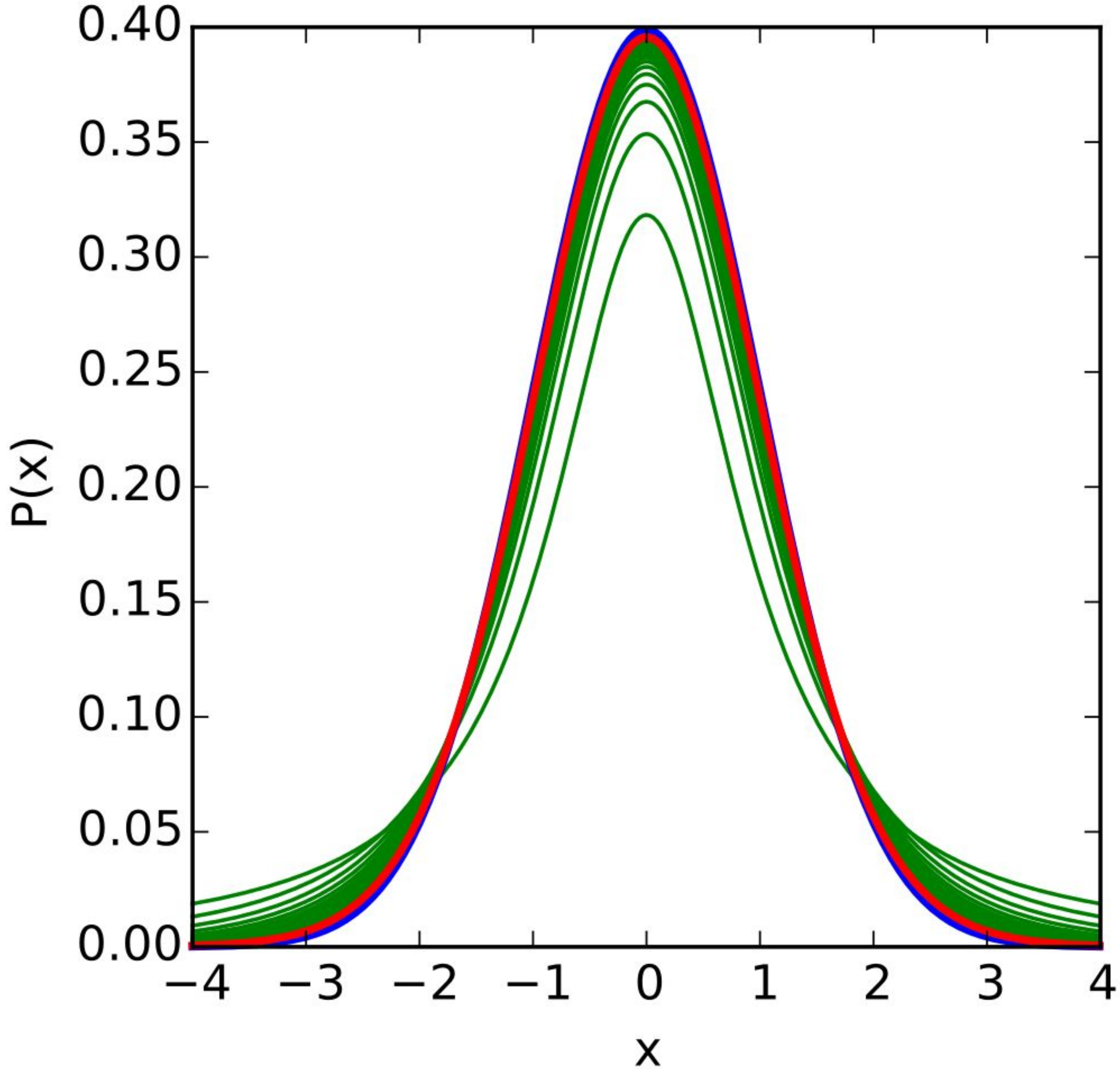
$$x_н = \bar{x} - \hat{\sigma}_{\bar{x}} t(n, P_д)$$

Если закон распределения вероятности результата измерения незначительно отличается от нормального, то применяют так называемые робастные методы обработки экспериментальных данных, что в частном случае приводит к усредненному нормальному закону распределения вероятности результата измерения. Мерой рассеяния в этом случае может быть сумма отклонений от среднего значения или некоторая ее функция.

Распределение Стьюдента в сравнении с нормальным распредел



Распределение Стьюдента в сравнении с нормальным распределением при n=30



Алгоритм обработки прямых многократных равноточных измерений

12. Порядок определения границ неисключенных составляющих систематической погрешности зависит прежде всего от условий эксперимента. Если имеются несколько неисключенных составляющих систематической погрешности и известны их границы Δ_{ci}, то распределение этих составляющих в пределах границ принято считать равномерным, а суммарная доверительная граница определяется по формуле

$$\Delta_c(P) = K\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Delta_{ci}^2},$$

13. Результирующие доверительные границы погрешности результата измерения определяют в соответствии с правилом:

Если $\Delta_c(P)/\sigma(\tilde{A}) < 0.8$, то в качестве погрешности результата измерения принимаются доверительные границы случайных погрешностей.

Если $\Delta_c(P)/\sigma(\tilde{A}) > 8$, то в качестве погрешности результата измерения принимаются границы неисключенных систематических погрешностей.

Если $0.8 \le \Delta_c(P)/\sigma(\tilde{A}) \le 8$, то доверительную границу погрешности результата измерения вычисляют по формуле

$$\Delta(P) = K_1[\Delta_c(P) + \overset{o}{\Delta}(P)]$$

14. Интервал, в котором погрешность измерения находится с заданной вероятностью, является показателем точности измерения и выражается в форме

$$A; \Delta_н; \Delta_в; P_д$$

где A – результат измерения в единицах измеряемой величины; $\Delta_{к}, \Delta$ – соответственно погрешность измерения с нижней и верхней ее границами в тех же единицах измерения; $P_д$ – доверительная вероятность.

Алгоритм обработки прямых многократных равноточных измерений

Пример. В процессе измерения получено 10 отсчетов измеряемой величины (уровень сигнала в дБ):

$x_1 = 72{,}36;\ x_2 = 72{,}35;\ x_3 = 72{,}35;\ x_4 = 72{,}34;\ x_5 = 72{,}33;$

$x_6 = 72{,}37;\ x_7 = 72{,}36;\ x_8 = 72{,}35;\ x_9 = 72{,}35;\ x_{10} = 72{,}36.$

Определить результат измерения, если $P_д = 0{,}95$. Систематической погрешностью пренебречь. Распределение результатов отсчетов считать нормальным.

Решение.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 72{,}352;$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0{,}011;$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 0{,}003.$$

Результат $\bar{x} = 72{,}35$ дБ, $\hat{\sigma}_x = 0{,}003$ дБ.

По таблице находим $t(n, P_д) = t(10;0{,}95) =$ = t(10;0,95) = 2,26. Границы доверительного интервала: $x_н = 72{,}35 - 2{,}26 \cdot 0{,}003 = 72{,}34$; $x_в = 72{,}35 + 2{,}26 \cdot 0{,}003 = 72{,}36$.

Результат: $A = 72{,}35$ дБ; $\Delta_н = -0{,}01$ дБ; $\Delta_в = +0{,}01$ дБ; $P_д = 0{,}95$.

Особенности обработки многократных неравноточных измерений

Группы измерений называют ***неравноточными***, если характеристики погрешностей этих групп различны ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \sigma_n$).

В качестве оценки результата измерения в данном случае берется весовое среднее $\bar{x}_p$ (арифметическая середина).

Если в результате многократных неравноточных измерений получены серии результатов $x_1, x_2, \dots, x_n$ со среднеквадратическими погрешностями $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, то значение $\bar{x}_p$ может быть найдено по формуле

$$\bar{x}_p = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2}x_1 + \frac{1}{\sigma_2^2}x_2 + \dots + \frac{1}{\sigma_n^2}x_n}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n^2}}$$

или по формуле

$$\bar{x}_p = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

которая получается из предыдущей, если числитель и знаменатель умножить на некоторый коэффициент μ^2.

Особенности обработки многократных неравноточных измерений

Величину $p_i = \dfrac{\mu^2}{\sigma_i^2}$ называют весом, при этом μ^2 выбирают так, чтобы p_i была ближе к единице ($i = [1,.., n]$).

Таким образом, при определении среднего взвешенного $\bar{x}_p$ вес p_i обратно пропорционален соответствующей дисперсии σ_i^2, тем самым более точным значениям измерений придается больший вес.

В случаях, когда значение σ_i неизвестно, а известно число измерений n в серии, x_p рассчитывают по формуле

$$\bar{x}_p = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \ldots + \bar{x}_n n_n}{n_1 + n_2 + \ldots + n_n}$$

где $\bar{x}_i$ – среднее арифметическое i-й серии измерений.

Среднеквадратическая погрешность единицы веса при неравноточных измерениях определяется по формуле

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_p)^2 p_i}$$

а среднеквадратическая погрешность среднего весового значения — по формуле

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$