

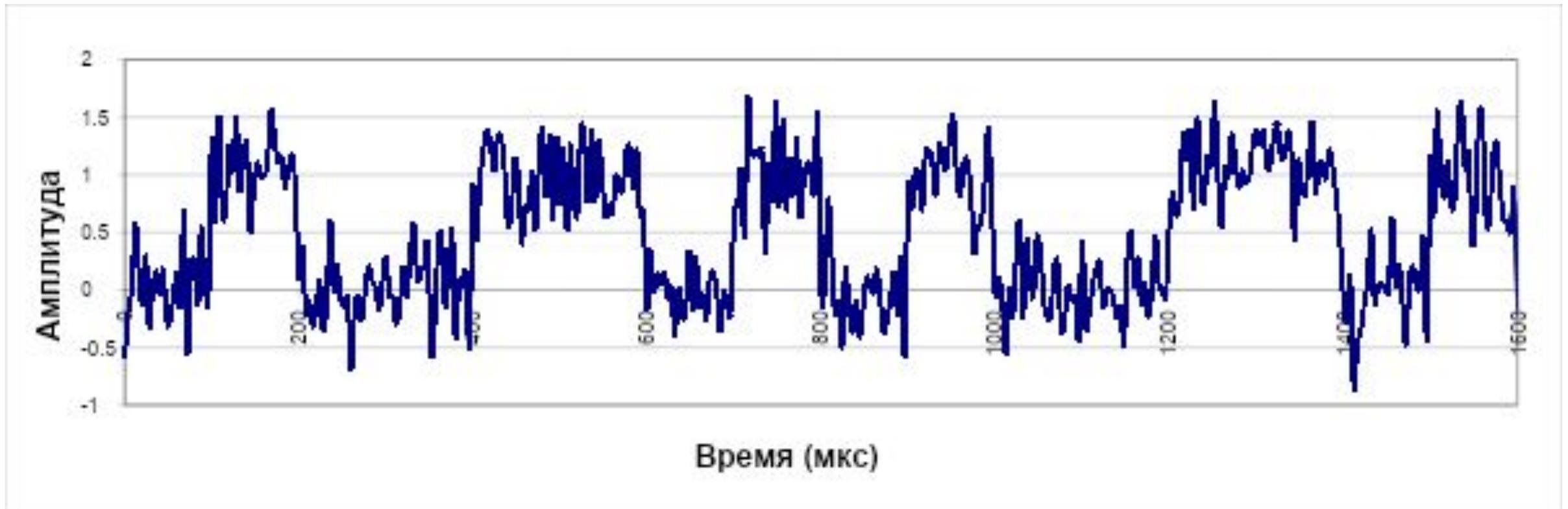
Программная реализация кода с повторением

Код с повторением без инверсии является систематическим разделимым линейным циклическим (n, k) -кодом, содержащим информационных и $r = k$ проверочных символов (при одном повторении). Длина кода $n = k + r$. Особенность кода состоит в том, что в нем проверочные символы являются просто повторенными информационными символами, т.е. в рамках

ТЛЗ $b_j = a_j$ ($j=1 \div k$). Код имеет $d = 2$ и применяется для обнаружения ошибки.

Вид сигнала кода с повторением

Период повторения сигнала $T =$	800	мкс		Число точек на период	200		
Длительность импульса $\tau =$	100	мкс		Число спектральных составляющих	20		
Задержка	0	мкс					
Двоичный код длины	8	01001101		Число повторов	2	Шум	0,0001



Перенос данных с листа 1

```
Sheets("Лист1").Select
```

```
Период = Sheets("Лист1").Cells(2, 4).Value
```

```
Длит = Sheets("Лист1").Cells(3, 4).Value
```

```
ДлинаКода = Sheets("Лист1").Cells(5, 3).Value
```

```
Код = Sheets("Лист1").Cells(5, 4).Value
```

```
ЧислоПовт = Sheets("Лист1").Cells(5, 8).Value
```

- Среднеквадратичное отклонение шумового сигнала

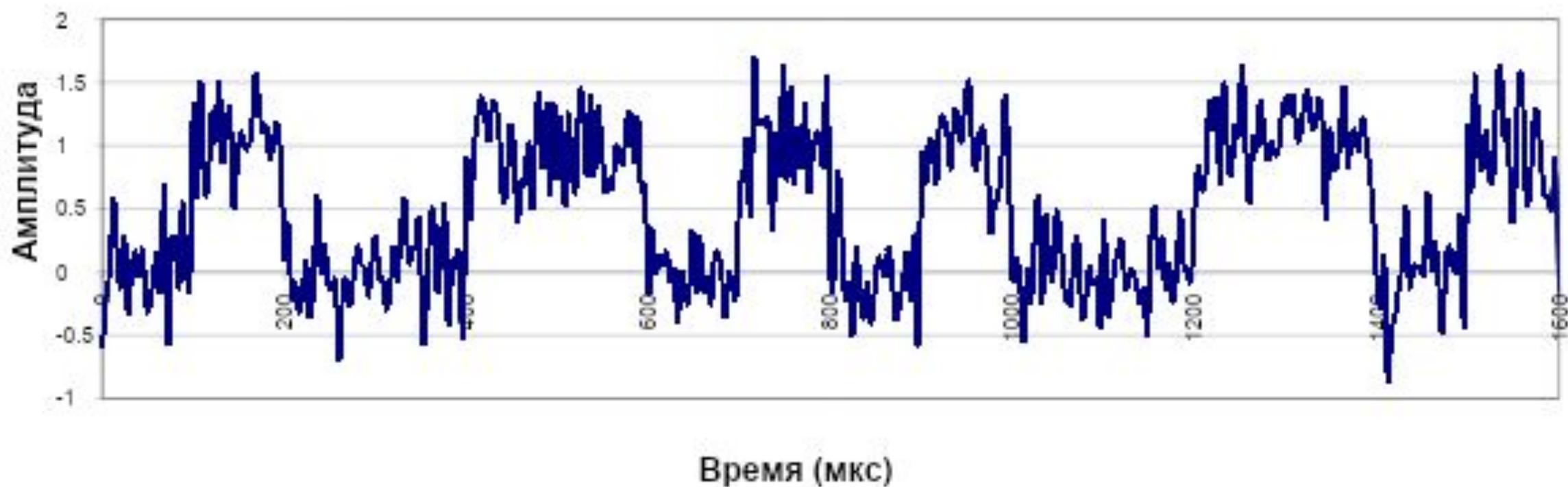
```
Sr = Sheets("Лист1").Cells(5, 10).Value
```

Формирование кода

- ШагВр = Период / ЧислТочНаПериод
- For i = 0 To ЧислТочНаПериод - 1
- t = i * ШагВр
- For j = 1 To ДлинаКода
- 'Интервал информационных символов
- НачИС = (j - 1) * Длит
- КонИС = j * Длит
- Символ = Mid(Код, j, 1)
- If t >= НачИС And t <= КонИС Then
- u = CInt(Символ)
- End If
- Next j
- Пр(i) = u
- 'Запись для графика процесса на одном периоде
- Sheets(2).Cells(i + 3, 1).Value = CSng(i) * ШагВр
- Sheets(2).Cells(i + 3, 2).Value = Пр(i)
- Next i

- **Построение графика** периодической функции
- 'Число точек графика
 - ЧислТочГраф = CInt(ЧислоПовт * ЧислТочНаПериод)
 - ГрафШагВр = ЧислоПовт * Период / ЧислТочГраф
 - For i = 0 To ЧислТочГраф
- **'Формирование временной оси на графике**
- 'область по времени от 0 до ЧислТочГраф
- ' $Время = (CSng(i) - ЧислТочНаПериод * (1 - Длит / (2 * Период))) * (Период / ЧислТочНаПериод)$
- $ВремяГраф = CSng(i) * ГрафШагВр$
- $Sheets(2).Cells(i + 3, 3).Value = ВремяГраф$
- 'Сигнал - процесс на интервале графика
- $Sheets(2).Cells(i + 3, 4).Value = Пр(CSng(i) Mod ЧислТочНаПериод) + Application.NormInv(Rnd(7), 0, Sr)$
- Next i

Вид сигнала+шум кода с повторением



Сигнал + шум



Подготовка к суммированию повторных сигналов

- 'Сумма сигналов (повтор)
- ReDim Sign(16) As Single
- 'Очистка листа 4
- Sheets(4).Select
- Sheets(4).Cells.Select
- Selection.ClearContents
- For i = 0 To ЧислТочНаПериод - 1
- Sheets(4).Cells(i + 1, 1).Value = Sheets(2).Cells(i + 3, 3).Value
- Sheets(4).Cells(i + 1, 12).Value = Sheets(2).Cells(i + 3, 3).Value
- Sign(1) = Sheets(2).Cells(i + 3, 4).Value
- Sheets(4).Cells(i + 1, 2).Value = Sign(1)
- Next i

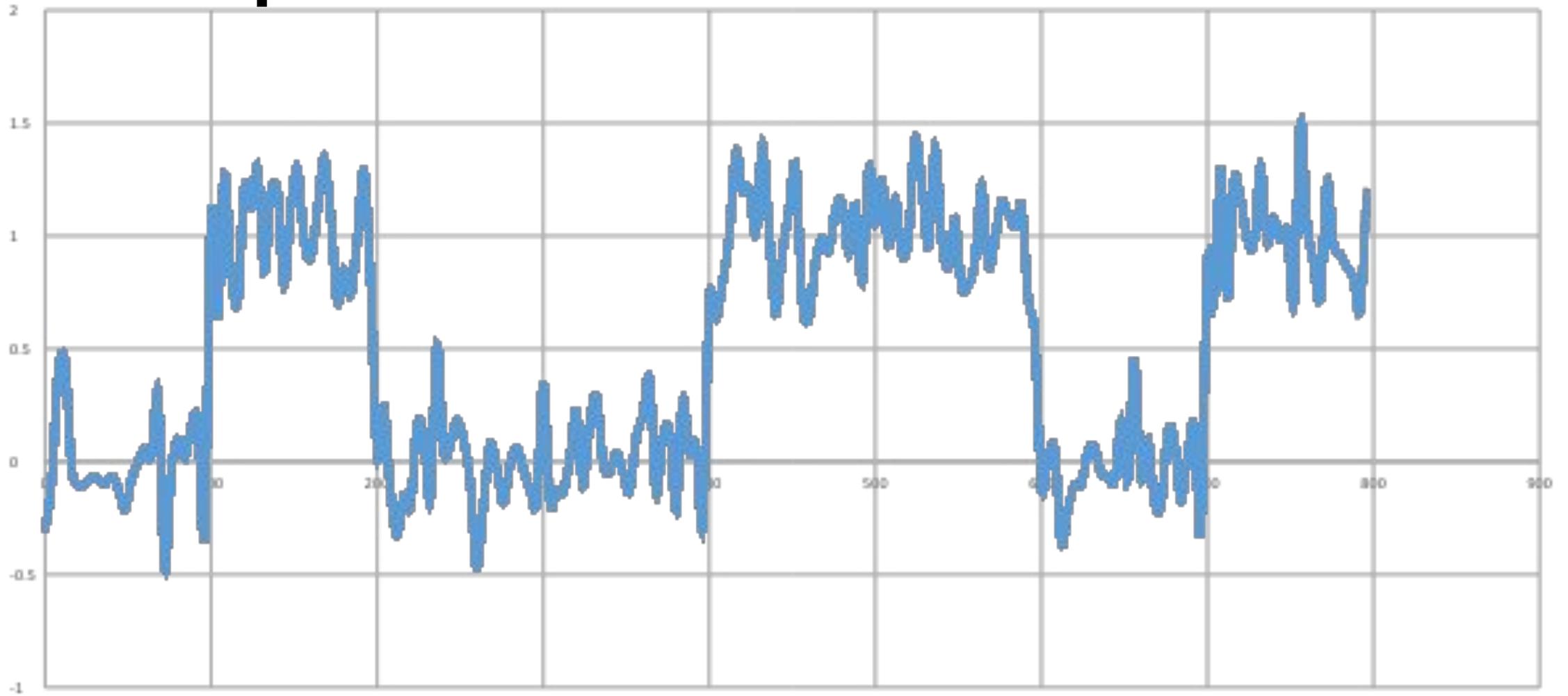
Подготовка к суммированию повторных сигналов

- 'Перенос на лист 4
- For j = 1 To ЧислоПовт - 1
- For i = 0 To ЧислТочНаПериод - 1
- k = i + 3 + ЧислТочНаПериод * j
- Sign(j) = Sheets(2).Cells(k, 4).Value
- Sheets(4).Cells(i + 1, j + 2).Value = Sign(j)
- SSign = SSign + Sign(j)
- Next i

Вычисление среднего значения по повторам

- For i = 0 To ЧислТочНаПериод - 1
- SSign = 0
- For j = 1 To ЧислоПовт
- Sign(j) = Sheets(4).Cells(i + 1, j + 1).Value
- Sheets(4).Cells(i + 1, j + 7).Value = Sign(j)
- SSign = SSign + Sign(j)
- Next j
- Sheets(4).Cells(i + 1, 13).Value = SSign / ЧислоПовт
- Next i

Сигнал + шум после усреднения 2-х выборок



КОД С ПОВТОРЕНИЕМ И ИНВЕРСИЕЙ

Код с повторением и инверсией является систематическим разделимым нециклическим нелинейным $(2k, k)$ -кодом. Имеет k информационных и $r = k$ проверочных символов. Отличается от кода с повторением (однократным) без инверсии тем, что значение проверочных символов в нем зависят от значения сумм по модулю два всех информационных символов. Если

$$\sum_{i=1}^k \boxtimes a_i = 0$$

т.е. если число единиц в информационной части кода четно. то проверочные символы повторяют информационные: $b_j = a_j (j = 1 \div k)$

Если, $\sum_{i=1}^k \boxtimes a_i = 0$ то есть, если число единиц в информационной части кода нечетно, то проверочные символы повторяют информационные в обратном (инверсном) коде с заменой 0 на 1 и 1 на 0, а именно $b_j = a_j \oplus 1$ ($j = 1 \div k$). Замена в i -том символе 0 на 1 или 1 на 0 равносильна его сложению по модулю 2 с единицей,

где $\sum_{i=1}^k \boxtimes$ – символ суммирования по mod2.

Код имеет:

$$d = \left\{ \begin{array}{l} k \text{ при } k < 4 \\ 4 \text{ при } k \geq 4 \end{array} \right\}$$

Процедура обнаружения ошибок

Корректирующая способность кода: код позволяет обнаруживать ошибки любой кратности, за исключением таких, когда искажены два информационных символа и соответствующие им два проверочных символа, четыре информационных символа и соответствующие им четыре проверочных символа, то есть четное число информационных и соответствующие им проверочные символы (a_1, a_2 и b_1, b_2 ; a_1, a_3 и b_1, b_3 ; a_2, a_3 и b_2, b_3 и др.).

Процедура обнаружения ошибок сводится к следующему. Одноименные информационные и проверочные символы принятой комбинации сравниваются между собой, причем, если сумма по модулю два всех информационных символов равна 0, то проверочные символы подаются в устройство сравнения в прямом коде (как были приняты), если же эта сумма равна 1, то проверочные символы подаются в указанное устройство в обратном (инверсном коде).

В результате сравнения **формируется синдром ошибки**

$S = S_r S_{r-1} \dots S_i \dots S_1$, $S_i = 1$ ($i = r \div 1$), если соответствующие информационные и проверочные символы в устройстве сравнения не совпадают, $S_i = 0$, если совпадают. Значение S_i находится как сложение по модулю два i -ых информационных и соответствующих им проверочных символов.

$$S_1 = a_1^* \oplus b_1^*, S_2 = a_2^* \oplus b_2^*, S_3 = a_3^* \oplus b_3^*,$$

при четном числе единиц в информационной части кода.

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = a_1^* \oplus b_1^* \oplus 1 \quad S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = a_2^* \oplus b_2^* \oplus 1$$

$$S_3 = a_3^* \oplus \bar{b}_3^* = a_3^* \oplus b_3^* \oplus 1$$

при нечетном числе единиц в информационной части, где черточка над символом обозначает знак инверсии. что равносильно сложению по модулю два символа с 1, $\bar{b}_i^* = b_i^* \oplus 1$

- Процедура обнаружения и формирования синдрома ошибки рассмотрим на следующих примерах: передавалась комбинация $V_i=110110$. В процессе передачи искажен первый символ, вектор ошибки $e_i=100000$. Принята комбинация $V_i^*=010111$. В информационной части нечетное число единиц. Инвертируем проверочную часть и анализируем полученную комбинацию 010000. Находим синдром ошибки S

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = 0 \oplus \bar{1} = 0 \oplus 0 = 0 \quad S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = 1 \oplus \bar{1} = 1 \oplus 0 = 1$$

$$S_3 = a_3^* \oplus \bar{b}_3^* = 0 \oplus \bar{1} = 0 \oplus 0 = 0$$

Откуда $S=S_3S_2S_1 = 010$ указывает на наличие ошибки.

Имеется ошибка четвертой кратности

Передавалась комбинация $V_i=110110$. В процессе передачи искажены первые и третьи символы как в информационной так и в проверочной части. Вектор ошибки $e_i=101101$. Полученная комбинация $V_j=011011$. В информационной части четное число единиц. Инверсирование не требуется. Анализируем принятую комбинацию и находим синдром S .

$$S_1 = a_1^* \oplus b_1^* = 1 \oplus 1 = 0 \quad S_2 = a_2^* \oplus b_2^* = 0 \oplus 0 = 0$$

$$S_3 = a_3^* \oplus b_3^* = 1 \oplus 1 = 0$$

Синдром $S=S_3S_2S_1=000$ указывает, что ошибки нет. Но на самом деле имеется ошибка четвертой кратности, но она не обнаруживается и осуществляется ошибочный прием.

- Вероятность появления ошибок комбинации на выходе устройства обнаружения ошибок при однократной передаче комбинации по двоичному симметричному каналу (ДСК) или вероятность необнаружения ошибок P_n и равна вероятности появления четного числа (2,4,6 ...) ошибок в информационной части кода и соответствующих им ошибок в проверочной части кода.

$$P_n = C_k^2 p^2 q^{k-2} p^2 q^{k-2} + C_k^4 p^4 q^{k-4} p^4 q^{k-4} + \dots$$

где p – вероятность искажения одного символа, $q=1-p$
 – вероятность правильного приема одного символа.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ КОД - КОД С УДВОЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Этот код является разделимым, не систематическим, длины n с k – информационными и $r = k$ проверочными символами, $n = k + r = 2k$.

Построение данного кода заключается в следующем:

Проверочные символы формируются по соответствующим информационным символам и занимают позиции сразу за информационными символами. Значение проверочного символа инверсно по отношению к информационному.

Процедура построения

Строится первичный (обычный двоичный) код длины k . Затем производится его перекодирование по следующему правилу: **1 заменяется двумя символами 10, первый символ – информационный, второй символ – проверочный. 0 заменяется 01.**

Структура комбинации выглядит следующим образом:

$a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ и т.д. на нечетных позициях располагаются информационные символы, на четных – проверочные символы.

Пример построения кодовой комбинации при $n=6$. 100110

$$b_1 = \overline{a_1} = a_1 \oplus 1, \quad b_2 = \overline{a_2} = a_2 \oplus 1, \quad b_3 = \overline{a_3} = a_3 \oplus 1$$

Код имеет кодовое расстояние $d=2$ и применяется для обнаружения ошибок.

Корректирующая способность кода: код позволяет обнаруживать ошибки любой кратности, за исключением, одновременного искажения проверочного и информационного в парах (a_1 и b_1 ; a_2 и b_2 ; a_3 и b_3 ; $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$ и т.п.).

Процедура обнаружения

Процедура обнаружения состоит в сравнении символов в парах и формировании по этим проверкам синдрома ошибки $S = S_r S_{r-1} \dots S_1 \dots S_1$. $S_i = 0$ ($i = r \div 1$), если значение символов в парах разное; $S_i = 1$, если значение символов в парах одинаковое. Значение S_i находится как результат сложения по модулю два символов в паре, причем проверочный символ берется в инверсном виде.

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = a_1^* \oplus b_1^* \oplus 1$$

$$S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = a_2^* \oplus b_2^* \oplus 1$$

.....

$$S_r = a_r^* \oplus \bar{b}_r^* = a_r^* \oplus b_r^* \oplus 1$$

Процедура обнаружения

Процедура обнаружения состоит в сравнении символов в парах и формирование по этим проверкам синдрома ошибки $S = S_r S_{r-1} \dots S_1 \dots S_1$. $S_i = 0$ ($i = r \div 1$), если значение символов в парах разное; $S_i = 1$, если значение символов в парах одинаковое. Значение S_i находится как результат сложения по модулю два символов в паре, причем проверочный символ берется в инверсном виде.

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = a_1^* \oplus b_1^* \oplus 1$$

$$S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = a_2^* \oplus b_2^* \oplus 1$$

.....

$$S_r = a_r^* \oplus \bar{b}_r^* = a_r^* \oplus b_r^* \oplus 1$$

Где a_i^* и b_i^* значение i -ых информационных и проверочных символов в принятой кодовой комбинации, $\bar{b}_i^* = b_i^* \oplus 1$

Относительная скорость передачи находится по формуле

$q = k / n$, а избыточность кода $I = (n - k) / k$

Корректирующая способность кода проявляется в том, что код обнаруживает все ошибки за исключением одновременного искажения символов в парах a_1 и b_1 , a_2 и b_2 , a_3 и b_3 , $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$, $a_1 b_1$ и $a_3 b_3$, $a_2 b_2$ и $a_3 b_3$

Процедура обнаружения и формирования синдрома ошибки рассмотрена на следующих примерах:

Процедура обнаружения и формирования синдрома ошибки

1) передавалась комбинация 100110. В процессе передачи искажен первый символ, вектор ошибки $e=100000$. Принята комбинация 000110. Находится синдром ошибки $S = S_3 S_2 S_1$

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = a_1^* \oplus b_1^* \oplus 1 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = a_2^* \oplus b_2^* \oplus 1 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$S_3 = a_3^* \oplus \bar{b}_3^* = a_3^* \oplus b_3^* \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Откуда $S = 001$ Синдром не нулевой, ошибка есть и она обнаружена.

Ошибка есть, но она не обнаружена

- 2) передавалась комбинация $V_i = 100110$. В процессе передачи **искажены третий и четвертый символы**. Вектор ошибки $e_i = 001100$. Принята комбинация $V_i^* = 101010$. Находится синдром ошибки $S = S_2 S_1 S_3$.

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = a_1^* \oplus b_1^* \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = a_2^* \oplus b_2^* \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$S_3 = a_3^* \oplus \bar{b}_3^* = a_3^* \oplus b_3^* \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Синдром $S = 000$. **Ошибка есть, но она не обнаружена.**

Вероятность появления ошибочной комбинации

- Вероятность появления ошибочной комбинации на выходе устройства обнаружения ошибок при однократной передаче комбинации по двоичному симметричному каналу (ДСК) равна вероятности необнаружения ошибки P_n (равна вероятности одновременного искажения информационных и проверочных символов в парах (одной, двух, и т.д. до k -той)) и определяется по формуле

$$P_n = C_{n/2}^1 p^2 q^{k-2} + C_{n/2}^2 p^4 q^{k-4} + \dots$$

где p – вероятность искажения одного символа, $q=1-p$ – вероятность правильного приема одного символа

КОД С ПОСТОЯННЫМ ВЕСОМ

Этот код является неразделимым, не систематическим, циклическим, нелинейным кодом длины n . Код имеет постоянное число единиц l и нулей m в кодовых комбинациях, характеризуется эквивалентным числом k_9 информационных и r_9 проверочных символов. $k_9 + r_9 = n$. N – количество комбинаций кода. Длина кода n определяется путем подбор а при использовании соотношения

$$\bullet C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!} \quad \text{Обычно } l \approx \frac{n}{2} \text{ В этом случае имеем}$$

наибольшее число сочетаний. Код имеет $d = 2$ и применяется для обнаружения ошибки.

Процедура построения: используя соотношение $N \leq C_n^l$. Методом подбора для заданного N определяем n и l . Из всех комбинаций $N_0 = 2^n$ выбираем комбинации, содержащие l единиц. Затем строим кодовые комбинации $V_i = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$,

Корректирующая способность кода: код обнаруживает все ошибки за исключением одновременного перехода 1 в 0 и такого же количества переходов 0 в 1. В этом случае число 1 остается равным l и такие ошибки не обнаруживаются. Процедура обнаружения состоит в подсчете числа единиц в кодовой комбинации. Результаты проверки характеризуются одним символом синдрома $S = S_1$. $S_1 = 0$, если число единиц n_l в принятой кодовой комбинации равно l ($n_l = l$), то считается, что ошибки нет или ошибка есть, но она не обнаруживается. Здесь осуществляется обычно сложение (не по модулю два), $n_l = a_1^* + a_2^* + a_3^* + \dots + a_n^*$, $a_1^*, a_2^* \dots a_n^*$ - символы искаженной кодовой комбинации.

Вероятность появления ошибочной комбинации

$S_1 = 1$, если число единиц n_l принятой кодовой комбинации неравно

l ($n_l \neq l$)

то ошибка есть и она обнаруживается. Относительная

скорость передачи q и избыточность кода I определяются

формулами

$$q = \frac{\lg N}{n} \quad I = \frac{n - \log_2 N}{\log_2 N}$$

Вероятность появления ошибочной комбинации на выходе устройства обнаружения ошибок при однократной передаче комбинации по двоичному симметричному каналу (ДСК) равна вероятности искажения

одной единицы $P_{ош} = P_n = C_l^1 p^1 q^{l-1} C_{n-l}^1 p^1 q^{n-l-1} \dots$ т.д.

$$+ C_l^2 p^2 q^{l-2} C_{n-l}^2 p^2 q^{n-l-2} + \dots + C_l^l p^l q^l C_{n-l}^l p^l q^{n-l-l}$$

- где $q = 1 - p$ – вероятность правильного приема одного символа, p – вероятность искажения одного символа.

ЛИНЕЙНЫЕ (n, k) -КОДЫ

В классе блочных разделимых корректирующих кодов различают **коды систематические и несистематические**. Систематическим называют такой код, в комбинациях которого информационные символы занимают первые k позиций, а проверочные – последние $r = n - k$ позиций. Если информационные символы обозначать через a_i ($i = 1 \div k$), а проверочные – через b_j ($j = 1 \div r$), то любая комбинация V систематического кода, согласно определению, должна иметь структуру $V = (a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_r)$

При ином расположении информационных и проверочных символов код называется несистематическим.

Остановимся на рассмотрении систематических линейных кодов в рамках теории линейных зависимостей.

Систематический линейный код

Двоичный (n, k) – код называется линейным, если его проверочные символы b_j ($j = 1 \div r$) находятся как суммы по mod2 определенных информационных символов a_i ($i = 1 \div k$).

$$b_j = \sum_{i=1}^k \boxtimes C_{ji} a_i$$

Где $\sum_{i=1}^k \boxtimes$ – символ суммирования по mod2. C_{ji} – коэффициенты, могущие принимать значения либо 0, либо 1. Операция сложения по mod2 является линейной операцией, отсюда и название кода. Если проверочные символы определяются по другому правилу, то (n, k) -код называется нелинейным.

Закон построения линейного кода

$$b_i = C_{ji}a_1 \oplus C_{ji}a_2 \oplus \dots \oplus C_{jk}a_k$$

$$b_1 = C_{11}a_1 \oplus C_{12}a_2 \oplus \dots \oplus C_{1k}a_k$$

$$b_2 = C_{21}a_1 \oplus C_{22}a_2 \oplus \dots \oplus C_{2k}a_k$$

.....

$$b_r = C_{r1}a_1 \oplus C_{r2}a_2 \oplus \dots \oplus C_{rk}a_k$$

Закон построения линейного кода задается совокупностью коэффициентов C_{ji} , число которых $k \cdot r$.

Линейный систематический код

- Построить линейный систематический $(7,4)$ -код, заданный следующей совокупностью коэффициентов C_{ji} (всего таких коэффициентов должно быть задано $4 \cdot 3 = 12$): $i=(1 \div 4), j=(1 \div 3)$

$$C_{11} = 1 \quad C_{12} = 1 \quad C_{13} = 0 \quad C_{14} = 1$$

$$C_{21} = 1 \quad C_{22} = 0 \quad C_{32} = 1 \quad C_{24} = 1$$

$$C_{31} = 0 \quad C_{32} = 1 \quad C_{33} = 1 \quad C_{34} = 1$$

- Проверочные символы находятся по формулам:

$$b_j = \sum_{i=1}^k \boxtimes C_{ji} a_i$$

$$b_j = \sum_{i=1}^k \boxtimes C_{ji} a_i = C_{11} a_1 \oplus C_{12} a_2 \oplus C_{13} a_3 \oplus C_{14} a_4 =$$

$$= 1 \cdot a_1 \oplus 1 \cdot a_2 \oplus 0 \cdot a_3 \oplus 1 \cdot a_4 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$$

$$b_j = \sum_{i=1}^k \circ C_{ji} a_i = C_{11} a_1 \oplus C_{12} a_2 \oplus C_{13} a_3 \oplus C_{14} a_4 =$$

$$= 1 \cdot a_1 \oplus 0 \cdot a_2 \oplus 1 \cdot a_3 \oplus 1 \cdot a_4 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4$$

$$b_j = \sum_{i=1}^k \boxtimes C_{ji} a_i = C_{11} a_1 \oplus C_{12} a_2 \oplus C_{13} a_3 \oplus C_{14} a_4 =$$

$$= 0 \cdot a_1 \oplus 1 \cdot a_2 \oplus 1 \cdot a_3 \oplus 1 \cdot a_4 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$$

Строим первичный код с числом комбинаций $N=2^k = 16$ и записываем его в таблицу графы 2,3, 4,5. По приведенным формулам определяются проверочные символы и записываются в графы 6,7,8 таблицы. В графу 8 записывается вес полученных кодовых комбинаций. Например, первичная комбинация $a_1a_2a_3a_4 = 1001$, $b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$, $b_2 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$, $b_3 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$. Корректирующий код 1001001. Вес этой комбинации $w=3$. Комбинация 9

Таблица 1

№ комбинации	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	w_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1				
2	0	0	1	0				
3	0	0	1	1				
4	0	1	0	0				
5	0	1	0	1				
6	0	1	1	0				
7	0	1	1	1				
8	1	0	0	0				
9	1	0	0	1	0	0	1	3

10	1	0	1	0				
11	1	0	1	1				
12	1	1	0	0				
13	1	1	0	1				
14	1	1	1	0				
15	1	1	1	1				

В таблице представлены все $N = 2^4 = 16$ комбинаций первичного кода и одна комбинация корректирующего кода.

Для другой совокупности коэффициентов C_{ji} был бы получен другой линейный код с тем же или иным d .

Отметим два интересных свойства линейных кодов.

1. Сумма по mod2 любых двух комбинаций линейного кода снова дает комбинацию этого же кода. В справедливости этого легко убедиться, сложив любые две комбинации.

2. Кодовое расстояние d линейного кода равно минимальному весу его ненулевых комбинаций. Построив код и проставив справа веса всех комбинаций, можно убедиться, что

$d = w_{\min} = 3$. Это свойство дает очень простой способ определения кодового расстояния для любого линейного (n, k) -кода.

Характеристики систематического (n,k) -кода на примере $(7,4)$ -кода с совокупностью коэффициентов C_{ji} , приведенных выше,
 $n = 7, k = 4, r = n - k = 3$.

1. Код делимый, длина кода $- n$.
2. Число информационных символов $k=4$, число проверочных символов $r = n - k = 7 - 4 = 3$.
3. Кодовое расстояние d , равно минимальному весу его ненулевых комбинаций $d = 3$.
4. Избыточность кода $I = (n - k) / k$
5. Относительная скорость передачи $q = k / n$.
6. Корректирующая способность кода. Код обнаруживает все однократные и двукратные ошибки и некоторые ошибки большей кратности. Код исправляет однократные ошибки.
7. Процедура обнаружения и исправления ошибок.

Обнаружение ошибок в комбинациях линейных кодов.

Пусть передана комбинация $V = (a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_r)$, а принята комбинация $V^* = (a_1^* a_2^* \dots a_k^* b_1^* b_2^* \dots b_r^*)$.

В общем случае² из-за возможных искажений не все одноименные символы этих комбинаций совпадают.

По принятым информационным символам на приемной стороне вычисляются проверочные:

$$b_j^{**} = \sum_{i=1}^k c_{ji} a_i^*$$

Вычисленные значения сравниваются с принимаемыми символами b_j^* . Это сравнение можно осуществить путем операции сложения по mod2

$$S_j = b_j^* \oplus b_j^{**}, j = 1 \div r$$

Результаты сравнения можно представить в виде набора из r символов $(S_r S_{r-1} \dots S_2 S_1)$. Ясно, что **если для всех j сравнение показало совпадение вычисленного и полученного проверочного символа ($b_j^{**} = b_j^*$), то это свидетельствует об отсутствии искажений в принятой комбинации.** Иными словами, если r – элементная комбинация $(S_r \dots S_2 S_1)$ состоит из одних нулей, то ошибки нет; если хотя бы один символ в этом наборе принял значение 1, то это говорит о наличии ошибок в принятой комбинации. Поэтому набор символов $S=(S_r \dots S_1)$ называют синдромом или опознавателем ошибок.

Пусть была передана комбинация кода $V_i=1001001$, а принята $V_i^* = 1001011$, $V_i^* = a_1^* a_2^* a_3^* a_4^* b_1^* b_2^* b_3^*$.

Тогда $b_1^{**} = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$$b_2^{**} = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$b_3^{**} = a_2^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

Сравнение вычислительных символов с принятыми проверочными дает:

$$S_1 = b_1^{**} \oplus b_1^* = 0 \oplus 0 = 0$$

$$S_2 = b_2^{**} \oplus b_2^* = 0 \oplus 1 = 1$$

$$S_3 = b_3^{**} \oplus b_3^* = 1 \oplus 1 = 0$$

Т.е. получен ненулевой синдром $S = 010$, что свидетельствует об ошибке в принятой комбинации.

Процесс исправления ошибок осуществляется аналогичным способом. Полученный ненулевой синдром, в виде трехзначного двоичного кода указывает позицию, на которой произошла ошибка.

Исправление ошибки заключается в замене принятого значения символа на инверсный (0 на 1 или 1 на 0).

Верность передачи определяется как вероятность обнаружения ошибки, при использовании (n,k) -кода в качестве обнаруживающего ошибку, или как вероятность исправления одиночной ошибки, при использовании (n,k) -кода в качестве исправления одиночной ошибки.

ЛИНЕЙНЫЙ НЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КОД (КОД ХЭММИНГА НЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ)

Этот код является **разделимым не систематическим линейным кодом** длины n с k информационными и r проверочными символами, обозначается как (n,k) -код. $(7,4)$ - код Хэмминга позволяет обнаруживать одиночные и двойные ошибки и ряд ошибок большей кратности или исправлять одиночную ошибку.

Построение корректирующего кода.

В качестве первичного (исходного) берется двоичный код на все сочетания с числом информационных символов k , к которому добавляются проверочные символы r , общая длина комбинации кода $n = k + r$.

Определение числа контрольных символов.

Для этого можно воспользоваться следующими рассуждениями. При передаче по каналу с шумами может быть или искажен любой из n символов кода, или слово передано без искажений. Таким образом, может быть $n+1$ вариант искажения (включая передачу без искажений). Используя контрольные символы, необходимо различить все $n+1$ вариантов. С помощью контрольных символов r можно описать 2^r событий. Значит, должно быть выполнено условие: $2^r \geq n + 1 = k + r + 1$

В таблице представлена зависимость между n , k и r полученная из этого неравенства.

Размещение проверочных символов

В принципе место расположения проверочных символов может быть произвольным. Однако, произвольное расположение проверочных символов затрудняет проверку принятого кода. Для удобства обнаружения искаженного символа и его исправления целесообразно размещать их на местах, определяемых по значению 2^i ($i = 0 \div n-1$), т.е. на позициях 1,2,4,8, и т.д. Информационные символы располагаются на оставшихся местах. Поэтому, например, для семиэлементной закодированной комбинации можно записать $b_1 b_2 a_1 b_3 a_2 a_3 a_4$.

Значения информационных символов $a_1 a_2 a_3 a_4$ определяется первичным двоичным кодом на все сочетания. Первичный код имеет $2^k=N$ комбинаций.

Значения проверочных символов в коде определяются из выражения:

$$b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4, \quad b_2 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4, \quad b_3 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$$

Пример построения комбинации корректирующего кода.

- Пусть комбинация первичного кода будет 1001 тогда:
 - $a_1=1, a_2=0, a_3=0, a_4=1.$
- Значения проверочных символов:
 - $b_1=a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$ $b_2=a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$
 $b_3=a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$
- Комбинация корректирующего кода будет иметь вид:
 - $b_1 b_2 a_1 b_3 a_2 a_3 a_4 = 001001$

Характеристики не систематического (n,k) -кода на примере $(7,4)$ -кода.

1. Код делимый, длины кода – n
2. Число информационных символов k , число проверочных символов $r = n - k$
3. Кодовое расстояние d , равно минимальному весу его ненулевых комбинаций
4. Избыточность кода $I = (n - k) / k$
5. Исправляющая способность кода. Код обнаруживает все однократные и двукратные ошибки и некоторые ошибки большей кратности. Код исправляет однократные ошибки.

Обнаружение ошибок

Обнаружение ошибки сводится к проверке выполнения соотношений и нахождению синдрома ошибки для каждой принимаемой комбинации:

$$S_1 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* \oplus b_1^*$$

$$S_2 = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_2^*$$

$$S_3 = a_2^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_3^*$$

При исправлении ошибки по тем же правилам находится синдром. Синдром представляет собой r - разрядное двоичное число, указывающее позицию искаженного символа $S = S_3 S_2 S_1$,

Пример:

Передаваемая комбинация =0011001. Искажен четвертый символ, тогда принятая комбинация:

$$\bullet \quad 0010001 = b_1^* b_2^* a_1^* b_3^* a_2^* a_3^* a_4^*$$

Синдром определяется в соответствии с формулами:

$$S_1 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* \oplus b_1^* = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$

$$S_2 = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_2^* = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$

$$S_3 = a_2^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_3^* = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \quad S = S_3 \quad S_2 S_1 = 100.$$

Двоичное число 100 указывает на искажение 4-го символа. После замены значения четвертого символа на инверсный получается исходная комбинация 0011001. В приведенной ниже таблице указан синдром и соответствующий ему искаженный символ, который обнаруживается и исправляется.

<p>Комбинация корректирующего о кода $b_1 b_2 a_1 b_3 a_2 a_3 a_4$</p>	<p>Вектор ошибки e_i</p>	<p>Искаженная комбинация, позиции символа $b_1^* b_2^* a_1^* b_3^* a_2^* a_3^* a_4^*$ 1 2 3 4 5 6 7</p>	<p>S</p>	<p>Номер позиции искаженного символа</p>
0010001	0000001			
	0000010			
	0000100			
0011001	0001000	0011001	100	четвертый
	0010000			
	0100000			
	1000000			
	0000000			

Вероятность передачи

Вероятность передачи определяется как вероятность обнаружения ошибки при использовании (n,k) -кода в качестве обнаруживаемого ошибку или как вероятность исправления одиночной ошибки при использовании (n,k) -кода в качестве исправляющего одиночную ошибку.