Комплексный ряд Фурье

Тригонометрические формы ряда Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{2\pi}{T}kt + b_k \sin\frac{2\pi}{T}kt \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt \right) dt, \quad k = \overline{0,\infty}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt \right) dt, \quad k = \overline{1,\infty}$$

Тригонометрические формы ряда Фурье

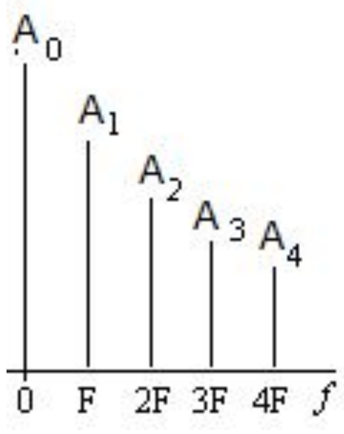
частота 1-й гармоники

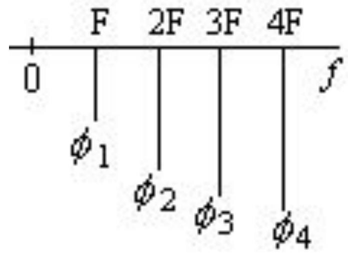
$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt+\varphi_k\right),\qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}\qquad F_1=\frac{1}{T}$$

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\qquad A_0=\frac{a_0}{2}\qquad \varphi_k=-arctg\frac{b_k}{a_k}$$

амплитудный спектр

фазовый спектр





Спектр периодического сигнала - дискретный

Комплексный ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

в общем случае комплексные

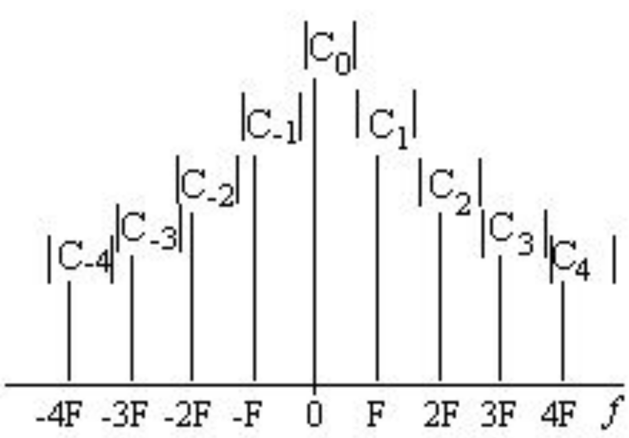
$$C_k = \left|C_k\right| e^{j\varphi_k}$$

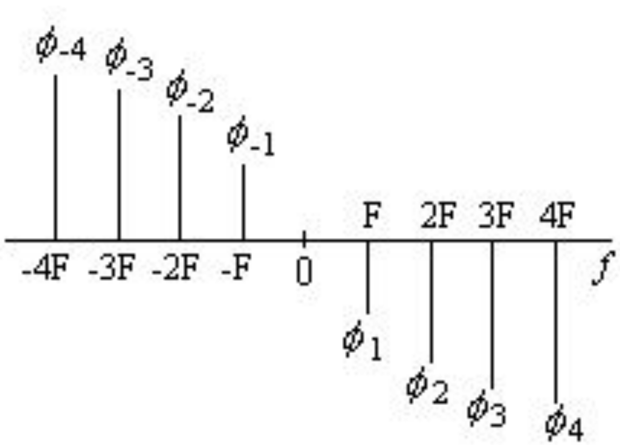
$$\left\{\left|C_k\right|, k = \overline{-\infty, \infty}\right\}$$

$$\left\{\varphi_k, k = \overline{-\infty, \infty}\right\}$$

амплитудный спектр

фазовый спектр





Тригонометрические формы ряда Фурье

$$\frac{a_k - jb_k}{2} = C_k \qquad \frac{a_k + jb_k}{2} = C_{-k}$$

Отсюда следуют связи

$$\left|C_k\right| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} \qquad C_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \varphi_k = -arctg\frac{b_k}{a_k}$$

сигнал четный – все синусоидальные компоненты равны 0;
сигнал нечетный – все косинусоидальные компоненты равны нулю (при этом равна нулю и постоянная составляющая)

Тригонометрические формы ряда Фурье

Просуммируем пару

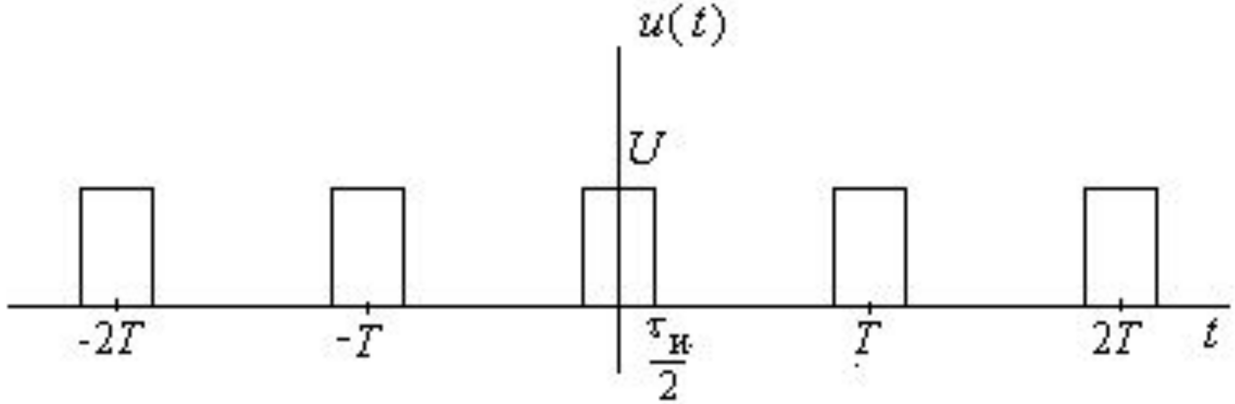
$$C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_k^* e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} =$$

$$= \left|C_k\right| e^{j\varphi_k} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + \left|C_k\right| e^{-j\varphi_k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = 2\left|C_k\right| \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right)$$

Тогда ряд Фурье можно записать в *тригонометрической* форме

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right),$$

$$A_k = \begin{cases} 2\left|C_k\right|, \quad k \neq 0, \\ A_k = \left|C_k\right| = C_0, k = 0. \end{cases}$$



$$C_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{1}{T}\int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} U\cos\frac{2\pi}{T}ktdt = \frac{U\tau_и}{T}\frac{\sin\frac{k\Omega\tau_и}{2}}{\frac{k\Omega\tau_и}{2}}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F$$

частота повторения импульсов

$$C_0 = \frac{U\tau_и}{T} = U/q$$

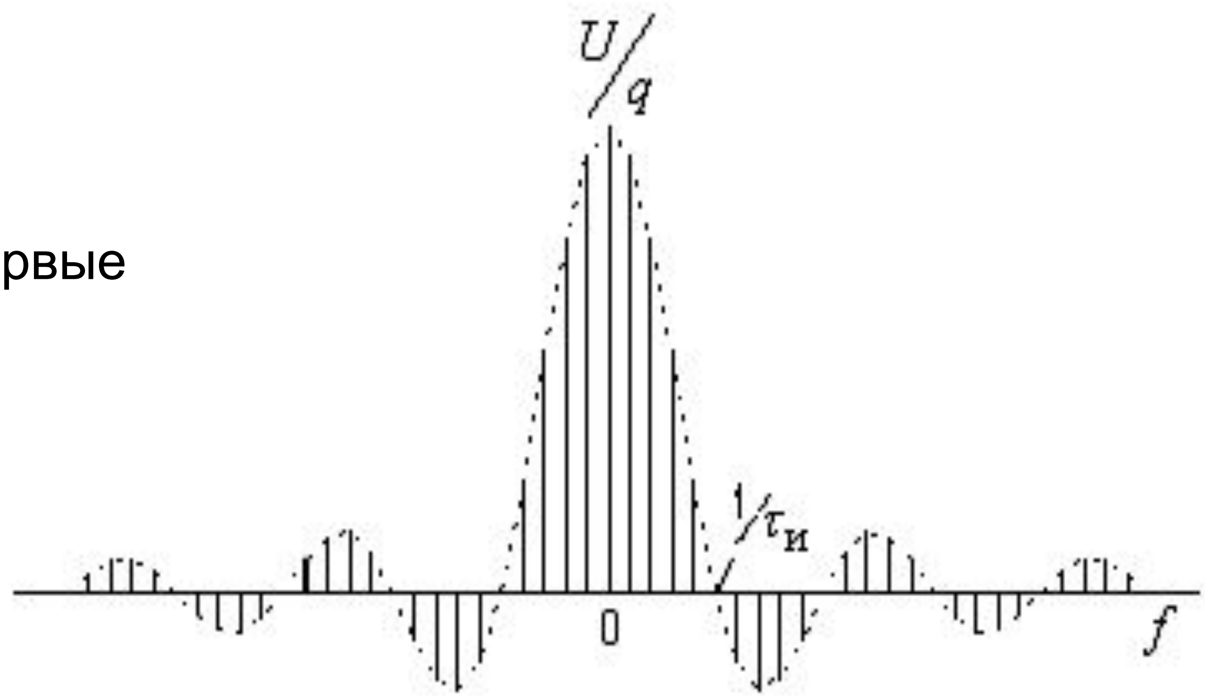
$$q = T/\tau_и$$

− скважность импульсной последовательности

$$\frac{\omega\tau_{и}}{2} = \pi$$

огибающая впервые пересекает ось абсцисс

$$f = 1/\tau_{и}$$

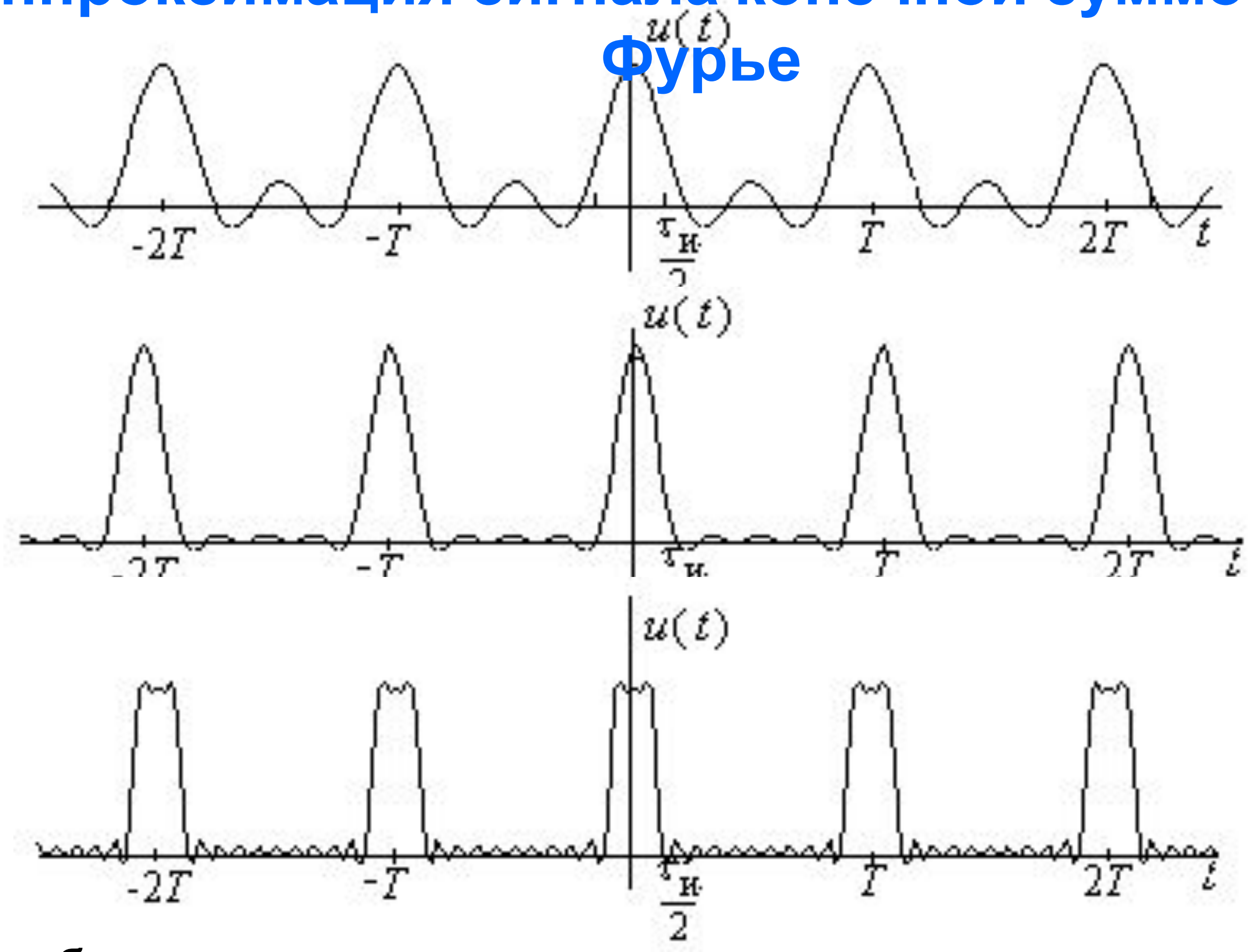


Дискреты отстоят друг от друга на $F = 1/T$

численное значение скважности

во сколько раз полуширина главного лепестка огибающей спектра больше шага следования спектральных составляющих по оси частот

Аппроксимация сигнала конечной суммой ряда Фурье



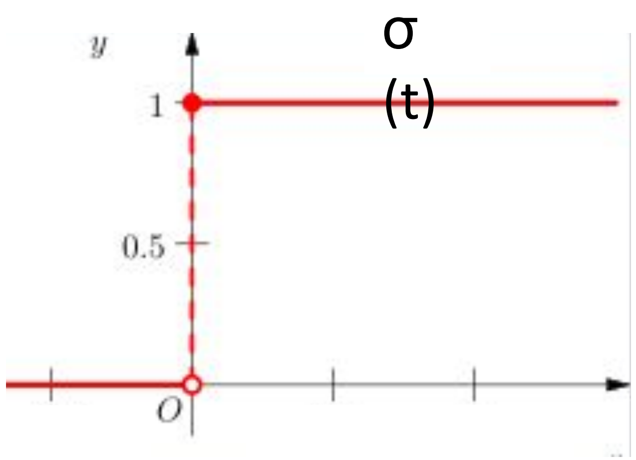
Ошибка аппроксимации

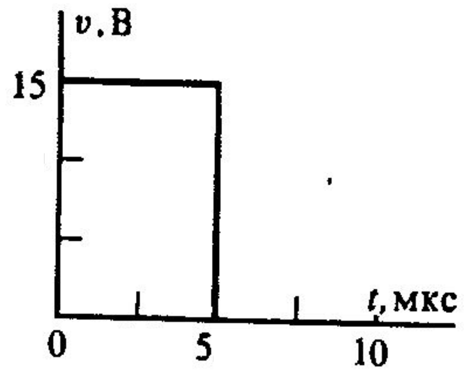
$$\|\varepsilon\|^2 = T\sum_{k=-\infty}^{-N-1}|C_k|^2 + T\sum_{k=N+1}^{\infty}|C_k|^2 = T\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2 - T\sum_{k=-N}^{N}|C_k|^2$$

Модели детерминированных сигналов

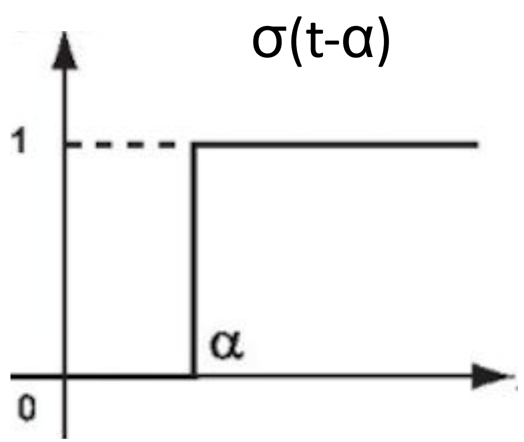
Функция включения (Хевисайда)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ \dfrac{1}{2}, t = 0, \\ 1, t > 0. \end{cases}$$



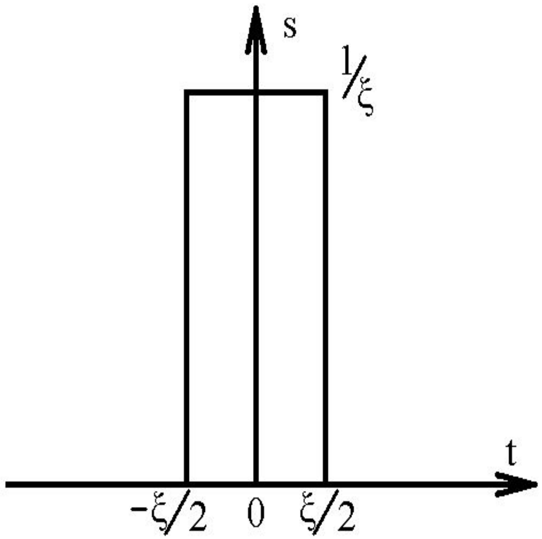


$v(t) = 15\sigma(t) - 15\sigma(t-5)$ В



Дельта-функция (Дирака)

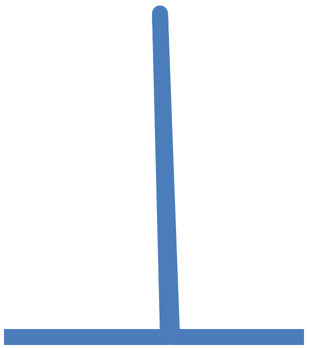
$$s_\xi(t) = \frac{1}{\xi}\left[\sigma\left(t + \frac{\xi}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\xi}{2}\right)\right]$$



Дельта-функция, или функции Дирака:

$$\delta(t) = \lim_{\xi \to 0} s_\xi(t)$$

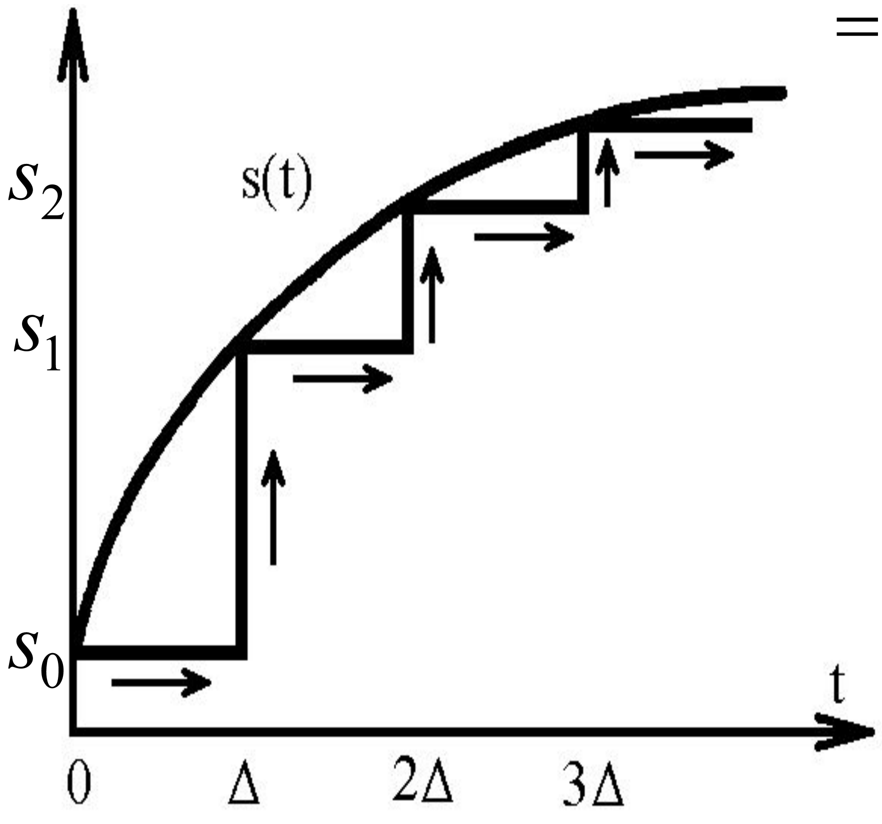
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$



Динамическое представление сигналов

$$s(t) \approx s_0\sigma(t) + (s_1 - s_0)\sigma(t-\Delta) + (s_2 - s_1)\sigma(t-2\Delta) + \ldots =$$

$$= s_0\sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})\sigma(t - k\Delta)$$

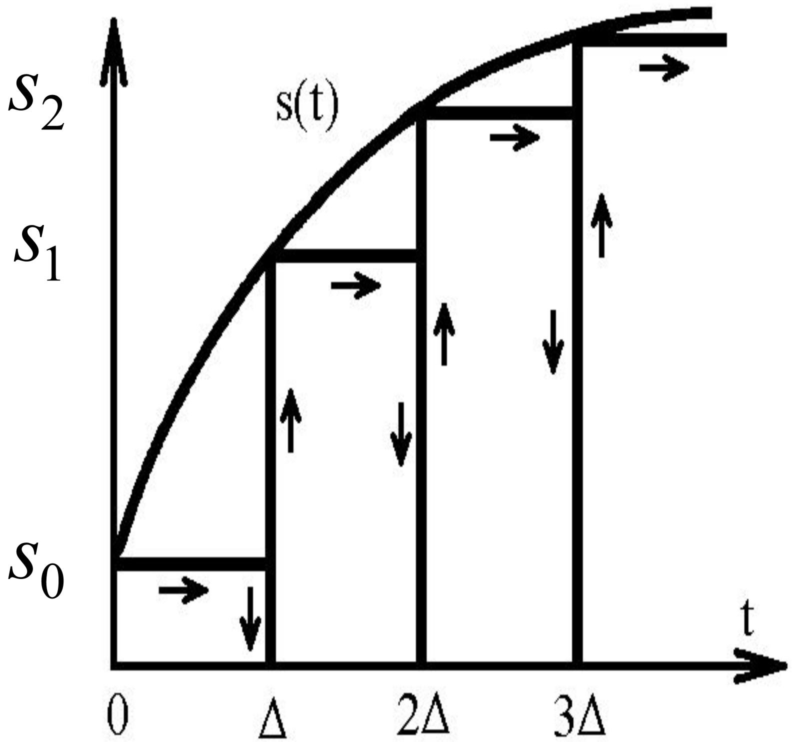


При Δ □ 0:

$$s(t) = s_0\sigma(t) + \int_0^{\infty}\frac{ds}{d\tau}\sigma(t-\tau)\,d\tau$$

Динамическое представление сигналов

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \underbrace{\frac{1}{\Delta}\left[\sigma(t-t_k)-\sigma(t-t_k-\Delta)\right]}_{\lim\limits_{\Delta\to 0}\;=\;\delta(t-\tau)}\cdot\Delta$$



При $\Delta \to 0$:

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$