ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 6

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.5. Выпуклые оболочки.

2.5. Выпуклые оболочки. Сформулируем и докажем одно свойство выпуклых множеств, которое иногда непосредственно берется за определение выпуклого множества.

Определение 9. ***Пусть*** $u_1, \dots, u_m \in R^n$ ***и числа*** $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ ***таковы, что*** $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$ ***Точка*** $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ ***называется выпуклой комбинацией точек*** $u_1, \dots, u_m \in R^n$.

Теорема 9 ***Множество*** $U \subset R^n$ ***выпукло тогда и только тогда, когда оно содержит все выпуклые комбинации любого конечного числа своих точек.***

Необходимость. Пусть множество U выпукло. Проведем индукцию по числу $m.$ При $m = 2$ справедливость утверждения теоремы вытекает непосредственно из определения выпуклого множества. Предположим, что утверждение теоремы верно для любого $k \leq m-1, m > 2.$ Рассмотрим произвольную выпуклую комбинацию каких-либо m точек этого множества

$$u=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i,\ u_1,\dots,u_m\in U,\qquad \alpha_1\ge 0,\dots,\alpha_m\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$$

Требуется доказать, что $u\in U$. Для определенности примем, что $\alpha_m<1$. Тогда

$$1-\alpha_m=\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j>0.$$ Полагаем

$$\beta_j=\frac{\alpha_j}{1-\alpha_m},\quad j=1,\dots,m-1,\qquad v=\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j u_j\in R^n,\quad j=1,\dots,m-1.$$

Имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{m-1}\overbrace{\beta_j}^{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_m}}=\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\alpha_j}{1-\alpha_m}=\frac{1}{1-\alpha_m}\cdot\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j\right)}^{1-\alpha_m}=1$$

тогда $v=\sum_{i=1}^{m-1}\beta_j u_j$ является выпуклой комбинацией $m-1$ точек $u_1,\dots,u_{m-1}\in U$.

В силу предположения индукции $v\in U$. Тогда из выпуклости множества U следует

$$\overbrace{\left(1-\alpha_m\right)}^{\in(0,1)}\overbrace{v}^{\in U}+\overbrace{\alpha_m}^{\in(0,1)}\overbrace{u_m}^{\in U}\in U.$$

С другой стороны

$$(1-\alpha_m)\overset{\sum_{i=1}^{m-1}\beta_j u_j}{v} + \alpha_m u_m = (1-\alpha_m)\sum_{j=1}^{m-1}\overset{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_m}}{\beta_j}\, u_j + \alpha_m u_m =$$

$$(1-\alpha_m)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\alpha_j}{1-\alpha_m}u_j + \alpha_m u_m = \sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j u_j + \alpha_m u_m = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i = u.$$

Таким образом $u \in U.$ Необходимость доказана.

Достаточность. Если множество $U \subset R^n$ содержит все выпуклые комбинации любого конечного числа своих точек, то оно содержит, в частности, и любые выпуклые комбинации любых своих двух точек, следовательно, оно выпукло. Достаточность доказана.

Приведем одно простое свойство выпуклых комбинаций конечного числа точек из R^n.

Теорема 10. ***Пусть*** $u_1, \dots, u_m \in R^n$ ***– фиксированные точки и*** $v_1, \dots, v_s$ ***– их произвольные выпуклые комбинации. Тогда любая выпуклая комбинация точек*** $v_1, \dots, v_s$ ***является выпуклой комбинацией точек*** $u_1, \dots, u_m$.

Доказательство. Действительно, для любой из точек $v_1, \dots, v_s$ справедливо представление

$$v_j=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}u_i,\qquad \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}=1,\qquad \alpha_{ji}\ge 0,\qquad j=1,\ldots,s,\ i=1,\ldots,m.$$

Тогда для любых $\beta_1\ge 0,\ldots,\beta_s\ge 0,\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j=1$ имеет место

$$w=\sum_{j=1}^{s}\beta_j\overbrace{v_j}^{\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}u_i}=\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}u_i=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{s}\beta_j\alpha_{ji}u_i=\sum_{i=1}^{m}\overbrace{\sum_{j=1}^{s}\beta_j\alpha_{ji}}^{\gamma_i}u_i=\sum_{i=1}^{m}\gamma_i u_i.$$

Очевидно, что $\gamma_i=\sum_{j=1}^{s}\beta_j\alpha_{ji}\ge 0,\ i=1,\ldots,m.$ Кроме того

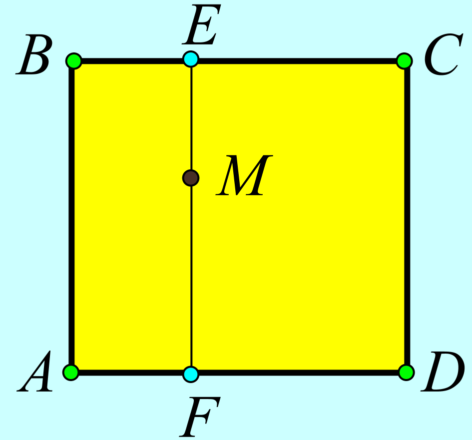
$$\sum_{i=1}^{m}\overbrace{\gamma_i}^{\sum_{j=1}^{s}\beta_j\alpha_{ji}}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{s}\beta_j\alpha_{ji}\right)=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_j\alpha_{ji}\right)=\sum_{j=1}^{s}\beta_j\overbrace{\sum_{i=1}^{m}(\alpha_{ji})}^{=1}=\overbrace{\sum_{j=}^{s}\beta_j}^{=1}=1$$

и точка w будет выпуклой комбинацией точек $u_1,\ldots,u_m$ с коэффициентами

$\gamma_i,\ i=1,\ldots,m$ Теорема доказана.

Из доказанной теоремы легко выводится, например, что любая точка n – мерного куба является выпуклой комбинацией своих вершин. Покажем это на примере двухмерного куба (квадрата).

На рисунке видно, что точка M является выпуклой комбинацией точек E и F. Те в свою очередь являются выпуклыми комбинациями вершин A, D и C, B соответственно. Таким образом, точка M является выпуклой комбинацией вершин куба $A, B, C, D.$



Упражнение. Доказать непосредственно, что точка M является выпуклой комбинацией точек $ABCD.$

Решение.

$$u_E = \alpha_B u_B + \alpha_C u_C, \quad \alpha_B \ge 0, \alpha_C \ge 0, \quad \alpha_B + \alpha_C = 1,$$

$$u_F = \alpha_A u_A + \alpha_D u_D, \quad \alpha_A \ge 0, \alpha_D \ge 0, \quad \alpha_A + \alpha_D = 1, \qquad \Rightarrow$$

$$u_M = \alpha_F u_F + \alpha_E u_E, \quad \alpha_F \ge 0, \alpha_E \ge 0, \quad \alpha_F + \alpha_E = 1.$$

$$u_M = \alpha_F \overbrace{u_F}^{\alpha_A u_A + \alpha_D u_D} + \alpha_E \overbrace{u_E}^{\alpha_B u_B + \alpha_C u_C} = \alpha_F(\alpha_A u_A + \alpha_D u_D) + \alpha_E(\alpha_B u_B + \alpha_C u_C) =$$

$$= \overbrace{\alpha_F \alpha_A}^{\beta_1} u_A + \overbrace{\alpha_F \alpha_D}^{\beta_2} u_D + \overbrace{\alpha_E \alpha_B}^{\beta_3} u_B + \overbrace{\alpha_E \alpha_C}^{\beta_4} u_C = \beta_1 u_A + \beta_1 u_D + \beta_1 u_B + \beta_1 u_C$$

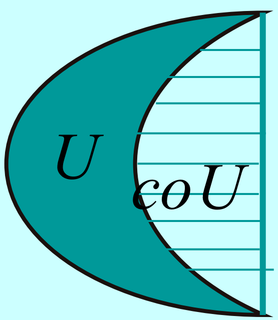
Очевидно, что $\beta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4$ и

$$\overbrace{\beta_1}^{\alpha_F\alpha_A} + \overbrace{\beta_2}^{\alpha_F\alpha_D} + \overbrace{\beta_3}^{\alpha_E\alpha_B} + \overbrace{\beta_4}^{\alpha_E\alpha_C} = \alpha_F\alpha_A + \alpha_F\alpha_D + \alpha_E\alpha_B + \alpha_E\alpha_C =$$

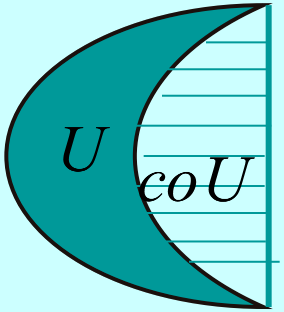
$$= \alpha_F \underbrace{(\alpha_A + \alpha_D)}_{=1} + \alpha_E \underbrace{(\alpha_B + \alpha_C)}_{=1} = \underbrace{\alpha_F + \alpha_E}_{=1} = 1.$$

В тех случаях, когда рассматриваемое множество не выпукло бывает полезно расширить его до выпуклого множества. По аналогии с аффинной оболочкой множества введем понятие выпуклой оболочки множества.

Определение 10. ***Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество*** $U \subset R^n$, ***называется выпуклой оболочкой множества и обозначается*** coU.



Множество coU выпукло как пересечение выпуклых множеств, и оно содержится в любом выпуклом множестве, содержащим U. Таким образом, выпуклую оболочку множества U можно трактовать как минимальное выпуклое множество, содержащее U.



Теорема 11. ***Выпуклая оболочка множества*** $U \subset R^n$ ***состоит из тех и только тех точек, которые являются выпуклыми комбинациями конечного числа точек из*** U.

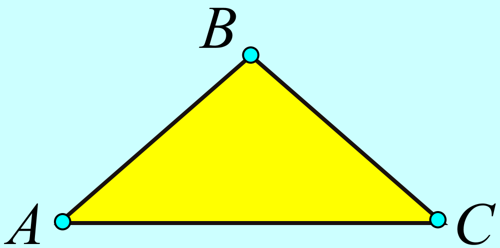
Доказательство. Пусть W — множество всех выпуклых комбинаций конечного числа точек из U. Покажем, что $co\,U = W$. Вложение $W \subset co\,U$ очевидно, так как в силу выпуклости множества $co\,U$ оно будет содержать все **(теорема 9)** выпуклые комбинации конечного числа своих точек, в частности, и точек из множества $U \subset co\,U$. Для доказательства обратного вложения $co\,U \subset W$ в силу $U \subset W$ достаточно установить выпуклость множества W. Действительно, пусть w – выпуклая комбинация конечного числа точек $w_1, \dots, w_m \in W$. Каждая из точек $w_i \in W$ является выпуклой комбинацией конечного числа точек из U. Тогда по **теореме 10** точка w будет выпуклой комбинацией конечного числа точек из U. Последнее означает, что $w \in W$. Таким образом, любая выпуклая комбинация любого числа точек множества W ему принадлежит. Следовательно в силу **теоремы 9** множество W выпукло. Теорема доказана.

В качестве примера заметим, что выпуклая оболочка двух точек на плоскости представляет собой отрезок прямой, их соединяющий; трех точек, не лежащих на одной прямой – треугольник. В общем случае выпуклая оболочка конечного числа точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, образует выпуклый многоугольник, а в пространстве – выпуклый многогранник.

Частным случаем выпуклой оболочки множества, состоящего из конечного числа точек, является $n-$ мерный симплекс.

Определение 11. ***Выпуклая оболочка множества точек*** $u_0, u_1, \ldots, u_m \in R^n$, ***для которых набор векторов*** $u_1 - u_0, \ldots, u_m - u_0$ ***линейно независим, называется симплексом, натянутым на эти точки и обозначается символом*** $S(u_0, u_1, \ldots, u_m)$.

Точки $u_0, u_1, \ldots, u_m$ ***называются вершинами симплекса.***



В частности, симплекс, натянутый на три точки A, B, C плоскости, не лежащие на одной прямой, будет треугольник с вершинами в этих точках.

Согласно **теореме 10** справедливо равенство

$$S\left(u_0, u_1, \ldots, u_m\right) = \left\{ u = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i u_i \;\middle|\; \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Теорема 12 (Каратеодори). ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***– произвольное непустое множество.***

Тогда любая точка $u \in coU$ ***представима в виде выпуклой комбинации не более чем*** $n+1$ ***точки из*** U.

Доказательство. По **теореме 11** любая точка $u \in coU$ представима в виде

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \quad \alpha_i \geq 0, u_i \in U, i = 1, \ldots, m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1. \quad (1)$$

Будем считать, что $\alpha_i > 0, i = 1, \ldots, m$, т. к. в (1) нас интересуют только ненулевые слагаемые.

Покажем, что число слагаемых (ненулевых!) в этом выражении можно уменьшить, если $m > n+1$. Пусть $m > n+1$. В пространстве R^{n+1} рассмотрим m векторов вида

$$\bar{u}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ 1 \end{pmatrix} \in R^{n+1}, i = 1, \ldots, m > n+1.$$

Число таких векторов $m > n+1,$ поэтому они линейно зависимы .

Тогда существуют числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ не все равные нулю, что будет выполняться

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \begin{pmatrix} u_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 0. \end{array} \qquad (2)$$

В силу (1) $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \quad (1)$ и (2) для всех $t \in R^1$ справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - t\gamma_i) u_i = \overbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i}^{\overset{(1)}{\Rightarrow} = u} - t \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i}^{\overset{(2)}{\Rightarrow} = 0} = u,$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - t\gamma_i) = \overbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}^{\overset{(1)}{\Rightarrow} = 1} - t \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i}^{\overset{(2)}{\Rightarrow} = 0} = 1.$$

Поскольку не все числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ равны нулю, а их сумма равна нулю, постольку среди них найдутся строго положительные. Полагаем $I = \{ i \in \{1, \ldots, m\} \mid \gamma_i > 0 \}.$

Определим номер s и число t_* из условия

$$t_* = \frac{\overbrace{\alpha_s}^{>0}}{\underbrace{\gamma_s}_{>0}} = \min_{i \in I} \left(\frac{\alpha_i}{\gamma_i} \right) > 0.$$

Покажем, что для всех номеров $i=1,\dots,m$ справедливо неравенство $\alpha_i - t_*\gamma_i \ge 0.$

Действительно, для $i \notin I = \left\{ i \in \{1,\dots,m\} \,\middle|\, \gamma_i > 0 \right\}$ это очевидно: $\overset{>0}{\alpha_i} - \overset{>0}{t_*}\,\overset{\le 0}{\gamma_i} > 0,$

а для $i \in I$ вычисляем

$$\alpha_i - t_*\gamma_i = \alpha_i - \overbrace{\frac{\alpha_s}{\gamma_s}}^{=\min\limits_{i\in I}\left(\frac{\alpha_i}{\gamma_i}\right)}\gamma_i \ge \alpha_i - \frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_i = 0.$$

При этом при $i = s$ имеем

$$\left.\left(\alpha_i - t_*\gamma_i\right)\right|_{i=s} = \alpha_s - \overbrace{t_*}^{=\frac{\alpha_s}{\gamma_s}}\gamma_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s}{\gamma_s}\gamma_s = 0.$$

Таким образом, точку u удалось представить в виде выпуклой комбинации

$u = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne s}}^{m} \overbrace{\left(\alpha_i - t_*\gamma_i\right)}^{\ge 0} u_i, \quad \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne s}}^{m} \overbrace{\left(\alpha_i - t_*\gamma_i\right)}^{\ge 0} = 1$ меньшего, чем m числа точек из множества U.

Теорема доказана.