Алгебра логики

Немного истории

Логика традиционно понимается как наука о способах доказательств и опровержений.

Изучение различных проблем логики в Древней Греции началось, по имеющимся данным, еще в V—IV вв. до н. э.

Демокрит (ок. 460—370 до н.э.) - древнегреческий философ-материалист. Рассматривал проблемы индукции, аналогии, определения понятий и гипотезы.

Сократ (ок. 469—399 до н. э.) – философ-идеалист, высказывал свои суждения о сущности и значении таких приемов исследования, как индукция и дедукция.

Платон (ок. 427—347 до н.э.) – ученик Сократа - продолжил разработку вопроса о дефиниции, рассматривал логический прием деления, анализировал логическую форму суждения, которую он считал основным элементом мышления, и приближался к открытию основных законов формальной логики.

Но ни один не создал еще формальной логики как самостоятельной науки.

Эта задача была выполнена **Аристотелем** (384 – 322 гг. до н. э.).

Во времена Аристотеля и вплоть до II в. н.э. формальная логика разрабатывалась представителями школы стоиков — Зеноном (ок. 336—ок. 264 до н. э.), Хризиппом (ок. 281—208 до н. э.), Сенекой (ок. 4—65 н. э.).

Они исследовали ряд логических категорий, входящих составной частью в современную математическую логику (импликацию, дизъюнкцию, конъюнкцию и др.).

В **Средние века**, несмотря на застой во всех областях науки, логика Аристотеля развивалась. Яркими представителями этого периода были: французский философ-схоласт **И. Росцелин** (ок. 1050—ок. 1122), логик **Пьер Абеляр** (1079—1142).

Эпоха Возрождения. **Фрэнсис Бэкон** (1561-1626) – родоначальник индуктивной логики, считал дедуктивную логику Аристотеля бесполезной.

XIX в. **Джон Стюарт Милль** (1806—1873) систематизировал исследования Бэкона в области индуктивных методов причинной связи явлений.

XX в.: совершенствование методов логических исчислений, вызванное развитием, в первую очередь, математики и кибернетики.

Математическая логика образует теоретический фундамент современной вычислительной техники.

Благодаря применяемому математической логикой символическому аппарату можно выражать на точном языке сложные рассуждения.

Современная формальная логика зависимости от того, применяется ли математический аппарат (логические исчисления) или изучаются общие формы мысли без применения последнего, в ней выделяются две части:

1)***общая*** (несимволическая) логика,

2)***символическая*** (математическая) логика.

Математическая логика применяется для следующих целей:

- анализа и построения цифровых вычислительных машин и интеллектуальных систем;
- анализа и синтеза формальных и машинных языков;
- анализа и формализации интуитивного понятия вычислимости;
- анализа проблем сложности вычислений;
- выяснения существования механических процедур для решения задач определенного типа.

Логика высказываний

Высказыванием называется любое повествовательное положение, которое либо ***истинно*** либо ***ложно***.

Примеры высказываний в математической логике:

a) Сократ – человек;

b) 2+3=5;

c) 3>7.

Не являются высказываниями в математической логике следующие предложения:

X>5 (x∈(-∞, ∞) и считается переменной).

Когда же закончится лекция?

Высказывание есть величина, которая может принимать два значения: «истина» или «ложь».

При этом не определяется, что такое истина и ложь, но считается возможным охарактеризовать некоторые высказывания как истинные: **А=И**, другие – как ложные: **А=Л**.

Из высказываний можно образовывать другие высказывания, производя операции над ними. Эти логические операции таковы, что истинностные значения составных высказываний определяются только истинностными значениями самих высказываний, а не их содержательным смыслом.

Слова: *не; неверно, что; и; или; если..., то; тогда и только тогда, когда; либо...,либо; несовместно; ни..., ни; не..., но; но; не* и их ближайшие синонимы – ***логические союзы***.

Слова *для всех... имеет место, что; для некоторых ... имеет место, что* и их ближайшие синонимы – ***кванторы***.

Логические союзы и кванторы называются ***логическими постоянными***, служат для выражения мыслей и в повседневных рассуждениях, и в научных рассуждениях.

Высказывания, не содержащие логических постоянных, - ***элементарные высказывания***.

Примеры:

а) Аристотель – воспитатель Александра Македонского (логическое значение - истина);

б) Аристотель старше Александра Македонского (логическое значение - истина);

в) 5<7 (логическое значение - истина);

г) 5 – чётное число (логическое значение - ложь).

Высказывания, которые содержат логические постоянные, - ***сложные высказывания***.

Например, с помощью логического союза *если…,то* из элементарных высказываний ***5<7*** и ***5 – чётное число*** можно образовать сложное высказывание: ***если 5<7, то 5 – чётное число.***

Логическое значение сложного высказывания зависит от логического значения элементарных высказываний, входящих в его состав, и тех логических постоянных, с помощью которых оно составлено.

Когда логический союз **если..., то** связывает истинные элементарные высказывания ***а)*** и ***б)***, получается истинное сложное высказывание: ***Если а), то б)***.

Когда этим же союзом связывают истинное ***в)*** и ложное ***г)*** элементарные высказывания, получают ложное сложное высказывание: ***Если в), то г).***

Если же истинные элементарные высказывания ***а)*** и ***б)*** связать союзом **либо..., либо**, то сложное высказывание ***Либо а), либо б)*** будет ложным.

Основные логические операции:

Отрицание – *логическая операция, с помощью которой из данного высказывания* ***А*** *образуется новое высказывание* ***не А****, которое истинно тогда и только тогда, когда* ***А*** *ложно*.

В разговорном языке высказывание может быть отрицаемо несколькими способами, например: для высказывания «*5 – чётное число*» отрицанием будет «*5 не является чётным числом*»; «*неверно, что 5 – чётное число*».

Обозначение отрицания: $\neg$ **А** или **Ā.**

Отрицание: таблица истинности

А	**$\bar{\text{А}}$**
И	***Л***
Л	***И***

Примеры

1. A = {Город Нью-Йорк — столица США}.

Отрицанием этого высказывания будет высказывание

$\bar{A}$ = {Город Нью-Йорк **не** является столицей США}.

Будет ошибкой считать отрицанием высказывания **A** высказывание

B = {Город Вашингтон— столица США}.

2. A = {Эта лекция читается ***не*** для композиторов}, тогда отрицание:

$\bar{A}$ = {Эта лекция читается ***не не*** для композиторов}

или (по правилам русской речи):

A = {Эта лекция читается для композиторов}.

Т. е. для построения отрицания надо убрать из высказывания частицу «не».

***Конъюнкция** – логическая операция, с помощью которой из двух данных высказываний **A** и **B** образуется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания **A** и **B** истинны.*

В разговорной речи конъюнкцию можно образовать также несколькими способами: используя союз «**и**»; кванторы «**как…, так и**»; А «**вместе с»** В; А «**в то время как»** В; «не только…, но и…» и т.п.

Обозначение конъюнкции высказываний **А** и **В**: **А & В** или **А** ∧ **В**.

Конъюнкция: таблица истинности

A	B	A&B
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*

Пример

Пусть даны два высказывания:

A = {Петя не любит математику} и

B = {Петя любит физику}.

Конъюнкция

A&**B** = {Петя не любит математику и любит физику} истинна только тогда, когда Петя *любит физику*, а *математику не любит*.

В остальных трех случаях, когда Петя:

а) ***не*** любит математику и ***не*** любит физику,

б) любит математику и физику,

в) любит математику, но ***не*** любит физику

высказывание **A**&**B** – ложно.

Дизъюнкция *– логическая операция, с помощью которой из двух данных высказываний **A** и **B** образуется новое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания **A** и **B**.*

Операция дизъюнкции соответствует образованию нового высказывания из **A** и **B** соединением связкой **«или»**, где «или» традиционно понимается в соединительном – ***хотя бы одно,***- а не в разделительном – ***либо-либо*** – смысле.

Обозначение дизъюнкции: **A** ∨ **B.**

Дизъюнкция: таблица истинности

A	B	A∨B
И	***И***	***И***
И	***Л***	***И***
Л	***И***	***И***
Л	***Л***	***Л***

Примеры

1. Пусть даны два высказывания:

A = {Завтра первой парой математический анализ} и

B = {Завтра первой парой информатика}.

Дизъюнкция этих высказываний:

A∨**B** = {Завтра первой парой математический анализ или информатика}.

В данном примере продемонстрирована разделительная интонация союза ***«или» (либо A, либо B) - строгая дизъюнкция***.

2. Пусть:

A= {Для получения I разряда по шахматам достаточно набрать 11,5 очка из 15} и

B = {Для получения I разряда достаточно занять 1-е место}.

Дизъюнкцией высказываний будет высказывание

A∨**B**= {Для получения I разряда достаточно набрать 11,5 очка *или* выйти на 1-е место}.

Здесь союз ***«или»*** имеет соединительную интонацию - ***дизъюнкция.***

Импликация (следование) *– логическая операция, с помощью которой из двух высказываний* ***A*** *и* ***B*** *образуется новое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда* ***A*** *(посылка) истинна, а* ***B*** *(заключение) ложно.*

Т.е., если посылка ***A*** ложна, то вне зависимости, истинно или ложно ***B***, высказывание ***A→B*** считается истинным, иначе из *лжи следует что угодно.*

Импликация образуется связками ***«если…, то»*** *или* ***«из … следует …»: «Если A, то B»****,* ***«Из A следует B»****.*

Обозначение импликации: **A → B** или **A ⊃ B**.

Импликация: таблица истинности

A	**B**	**A→B**
И	***И***	***И***
И	***Л***	***Л***
Л	***И***	***И***
Л	***Л***	***Л***

Пример

Пусть даны два *ложных* высказывания:

A = {Число 3 является делителем числа17} и

B = {Число 8 – простое число}.

Тогда высказывание **A** → **B** = {Если число 3 — делитель 17, то 8 — простое число} является истинным.

Эквивалентность — *логическая операция, при помощи которой из двух высказываний* ***А*** *и* ***В*** *образуется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда* ***А*** *и* ***В*** *принимают одинаковые истинностные значения.*

Эквивалентность образуется связкой «***тогда и только тогда***».

Обозначение эквивалентности: ***А≡В***, ***А~В***, ***А ‹—›В***, ***А‹=› В.***

Эквивалентность: таблица истинности

A	B	*A≡B*
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*

Пример

Пусть даны два высказывания:

A = {Студенты сдадут экзамены на «отлично»} и

B = {Рак на горе свистнет}.

Эквиваленцией этих высказываний будет высказывание:

A ≡ **B** = {Студенты сдадут экзамены на «отлично» тогда и только тогда, когда рак на горе свистнет}.

Высказывание **A ≡ B** будет истинным, если:

а) Студенты сдадут экзамены на «отлично» и рак на горе действительно свистнет,

в) Студенты не сдадут экзамены на «отлично», а рак на горе не будет свистеть;

и ложным, если:

c) Студенты сдадут экзамены на «отлично», но рак на горе не свистнет,

d) Студенты не сдадут экзамены на «отлично», а рак на горе будет свистеть.

Законы логики

<u>Законы логики</u> *- объективные, не зависящие от человека связи между мыслями (например, между высказываниями), обусловленные их логическими содержаниями.* Сами эти логические содержания являются отражением в сознании (и далее, мышлении) некоторых наиболее общих сторон, связей и отношений, реально существующих.

В формальной логике традиционно указывают три (иная позиция, четыре закона), которые называют основными законами логики.

Имеются в виду три закона, сформулированные Аристотелем:

- закон тождества;

- закон противоречия;

- закон исключенного третьего.

Закон тождества: *«Необходимо выделять в предметах и явлениях нечто качественно определенное, устойчивое, относительно тождественное, придавая таким образом словам, в которых выражаются мысли, определенное предметное значение».* Иначе: не допускать подмены одних понятий другими и смешения слов с различными значениями.

Закон противоречия: «*Из двух указанных типов высказываний* ***А*** *и* ***не-А****, по крайней мере, одно является ложным или, иначе говоря, противоречащие друг другу высказывания не могут быть оба истинными».*

Закон исключенного третьего: «*Если мы имеем два противоречащих высказывания, то есть таких, в одном из которых* ***А*** *что-либо утверждается, а в другом то же самое отрицается* ***не-А****, то по крайней мере одно из них истинно».* Иначе говоря, противоречащие высказывания не могут быть оба ложными.

И введенный в логику Готфридом Лейбницем ***закон достаточного основания*** как необходимое условие правильности мышления: *в процессе познания можно принимать то или иное суждение (высказывание) за истину лишь на достаточном основании*.

Поскольку не выяснено, что именно есть достаточное основание для признания истинности некоторого высказывания, требование Г. Лейбница будем понимать как стремление к максимальному обоснованию (или подтверждению) выдвигаемых и принимаемых нами утверждений.

<u>Законом логики высказываний</u> называется формула, которая при любых распределениях истинностных значений входящих в нее любых высказываний, которые могут быть получены из данной формулы, принимает значение ***И*** — **истинно**.

Про формулу, представляющую собой закон логики высказываний, говорят, что она всегда истинна или, как в логике принято говорить, она тождественно истинна.

Законы логических операций:

1. ***<u>Закон двойного отрицания:</u>***

   $\neg(\neg A) \equiv A$.

2. ***<u>Законы коммутативности:</u>***

   $A \& B \equiv B \& A$,

   $A \vee B \equiv B \vee A$.

3. ***<u>Законы ассоциативности:</u>***

   $(A \& B) \& C \equiv A \& (B \& C)$,

   $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$.

4. ***<u>Первый закон дистрибутивности:</u>***

   $A \& (B \vee C) \equiv A \& B \vee A \& C$.

5. ***<u>Второй закон дистрибутивности:</u>***

   $A \vee B \& C \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$.

6. ***<u>Законы де Моргана</u>*:**

$\neg (A \mathbin{\&} B) \equiv \neg A \vee \neg B,$

$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \mathbin{\&} \neg B.$

7. ***<u>Законы идемпотентности</u>*:**

$A \mathbin{\&} A \equiv A,$

$A \vee A \equiv A.$

8. ***<u>Законы поглощения</u>*:**

$A \vee A \mathbin{\&} B \equiv A,$

$A \mathbin{\&} (A \vee B) \equiv A.$

9. ***<u>Закон исключенного третьего</u>*:**

$A \vee \neg A$ **- тождество.**

10. ***<u>Закон противоречия</u>*:**

$A \mathbin{\&} \neg A$ **– противоречие .**

11. ***<u>Закон контрапозиции</u>*:**

1. $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$.

Приоритет логических операций:

1) $\bar{A}$ - инверсия;
2) **A & B** - конъюнкция;
3) **A** ∨ **B** - дизъюнкция;
4) **A** → **B** - импликация;
5) **A** ↔ **B** - эквивалентность.

Составить таблицу истинности для выражения $A \vee (\bar{B} \,\&\, C)$:

A	B	$\bar{B}$	C	$\bar{B} \,\&\, C$	$A \vee (\bar{B} \,\&\, C)$
И	И		И		
И	И		Л		
И	Л		И		
И	Л		Л		
Л	И		И		
Л	И		Л		
Л	Л		И		
Л	Л		Л		

A	B	$\overline{B}$	C	$\overline{B} \& C$	$A \lor (\overline{B} \& C)$
И	И	Л	И		
И	И	Л	Л		
И	Л	И	И		
И	Л	И	Л		
Л	И	Л	И		
Л	И	Л	Л		
Л	Л	И	И		
Л	Л	И	Л		

A	B	$\overline{B}$	C	$\overline{B}$ & C	A ∨ ($\overline{B}$ & C)
И	И	Л	И	Л	
И	И	Л	Л	Л	
И	Л	И	И	И	
И	Л	И	Л	Л	
Л	И	Л	И	Л	
Л	И	Л	Л	Л	
Л	Л	И	И	И	
Л	Л	И	Л	Л	

A	B	$\bar{B}$	C	$\bar{B}$ & C	A ∨ ($\bar{B}$ & C)
И	И	Л	И	**Л**	**И**
И	И	Л	Л	**Л**	**И**
И	Л	И	И	**И**	**И**
И	Л	И	Л	**Л**	**И**
Л	И	Л	И	**Л**	**Л**
Л	И	Л	Л	**Л**	**Л**
Л	Л	И	И	**И**	**И**
Л	Л	И	Л	**Л**	**Л**

Любое высказывание можно формализовать - заменить его формулой.

Для формализации высказываний следует:

1) выделить все элементарные высказывания и обозначают их соответствующими буквами;

2) выделить все логические связки и заменяют их логическими символами;

3) расставить скобки в соответствии со смыслом исходного высказывания, учитывая при этом правило расстановки скобок.

Если известно значение каждого высказывания, входящего в формулу, то с помощью таблиц истинности можно найти значение этой формулы.

Пример. Формализовать высказывание: «Если число 60 делится на 3 и на 5, то 60 делится на 15»

Обозначим высказывания:

«число 60 делится на 3» - А,

«число 60 делится на 5» - В,

«число 60 делится на 15» - С.

Тогда исходное высказывание можно записать формулой:

$$(A \ \& \ B) \rightarrow C$$

Пример. При каком значении X истинно высказывание:

$$\neg((X>2) \rightarrow (X>3))$$

1)x=1;

2) x= 2;

3) x= 3;

4) x= 4.

<u>Решение:</u> выражение $\neg((X>2) \rightarrow (X>3)) = 1$ тождественно выражению $(X>2) \rightarrow (X>3) = 0$ (*из определения и таблицы истинности отрицания*).

Из определения и таблицы истинности импликации имеем:

$(X>2) \equiv$ И, $(X>3) \equiv$ Л

$$\mathbf{1 \rightarrow 0 = 0.}$$

Указанным условиям удовлетворяет значение <u>**X=3**</u>.

Задача: построить контактную схему для голосования комитета из 3-х человек. При голосовании свет на табло для голосования должен загораться тогда и только тогда, когда «ЗА» проголосовало большинство.

Решение: имеем три переменных – А, В и С, переменные будут принимать значение «1», если проголосовали «ЗА», и значение «0», если против.

Исходя из условия задачи, свет будет загораться тогда и только тогда, когда большинство проголосует «ЗА».

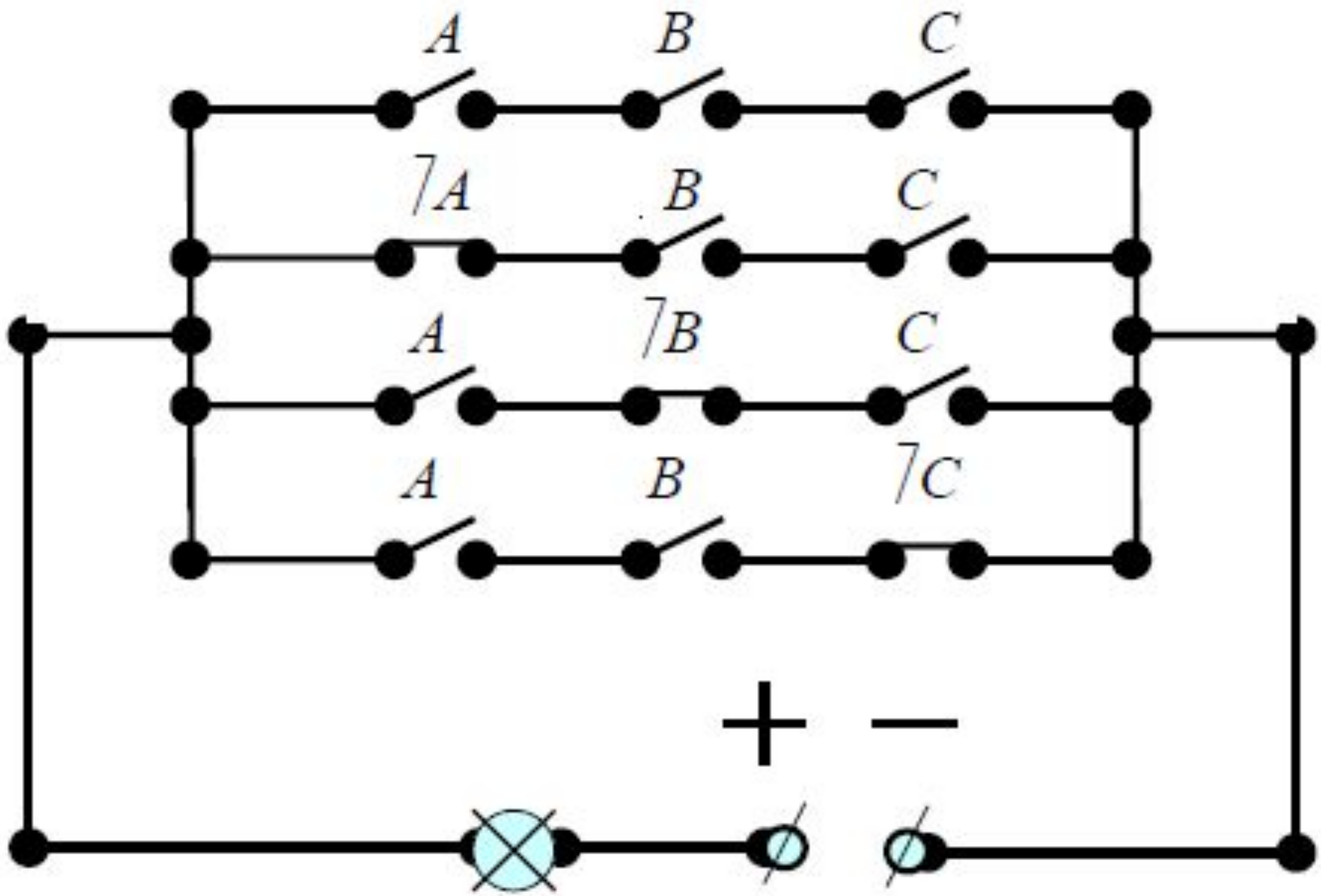
Построим таблицу истинности:

A	B	C	?
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

По данным таблицы запишем функцию, выбирая строки с большинством **1**:

(A&B&C) ∨ **(A&B&⌉ C)**∨**(A&⌉ B&C)**∨**(⌉ A&B&C)** **[1].**

Далее строим схему по выражению**:**



Последовательные контакты соответствуют связке **«И»**, параллельные – связке **«ИЛИ»**.

Выражение **[1]** равносильно (тождественно) выражению

A&B ∨ A&C ∨ B&C,

которое, используя законы логических операций, будет равносильно

A&B ∨ C &(B ∨ C).

Тогда схема будет выглядеть следующим образом: