

Метод конечных разностей

Выполнили:

Студенты гр. С-11-17

Любимов А.А

Николаев И.И

- **Метод конечных разностей** — численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами. Является сеточным методом.

Выражения второй и четвертой производных, которые используются в расчетах изгибаемых плит, в конечных разностях в точке i имеют вид :

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\lambda^2} \quad (1)$$

$$f_i^{IV} = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_{i-1} - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\lambda^4}, \quad (2)$$

Где f – значение функции в узловой точке
 λ – шаг вычисления функций.

**Особенности расчета методом
конечных разностей
изгибаемых плит.**

Дифференциальное уравнение Софи Жермен-Лагранжа

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (3)$$

где, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость,

h — толщина плиты, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, $q(x, y)$ – функция заданной нагрузки.

Изгибающие моменты M_x M_y

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4)$$

Уравнение Софи Жермен–Лагранжа (3) в разностной
форме
для i -ой точки

$$20w_i - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_g + w_h) +$$

$$+(w_k + w_l + w_m + w_n) = \frac{q\lambda^4}{D}, \quad (5)$$

где $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n$ –
узлы сетки, λ – шаг сетки (рис.
1).

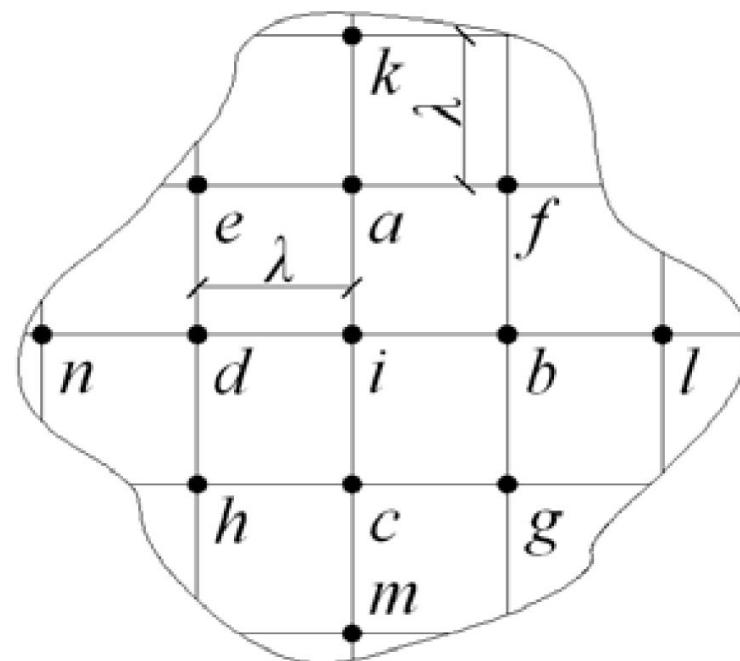


Рис. 1.

Изгибающие моменты (4) в разностной форме

$$M_{x,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_a + w_c) - (w_b + w_d)]; \quad (6)$$

$$M_{y,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_b + w_d) - (w_a + w_c)]. \quad (7)$$

Разностное уравнение вида (5) в матрично-операторной форме

		1		
	2	-8	2	
1	-8	20	-8	1
	2	-8	2	
		1		

$$w_i - \frac{q\lambda^4}{D} = 0; \quad (8)$$

$$20w_i - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_g + w_h) + (w_k + w_l + w_m + w_n) = \frac{q\lambda^4}{D}, \quad (5)$$

Разностное уравнение вида (6,7) в матрично-операторной форме

$$M_{x,i} = \frac{D}{\lambda^2} \cdot \begin{array}{c} \boxed{-\nu} \\ \boxed{-1 \quad 2+2\nu \quad -1} \\ \boxed{-\nu} \end{array} w_i ;$$

$$M_{y,i} = \frac{D}{\lambda^2} \cdot \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \boxed{-\nu \quad 2+2\nu \quad -\nu} \\ \boxed{-1} \end{array} w_i \quad (9)$$

$$M_{x,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_a + w_c) - (w_b + w_d)]; \quad (6)$$

$$M_{y,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_b + w_d) - (w_a + w_c)]. \quad (7)$$

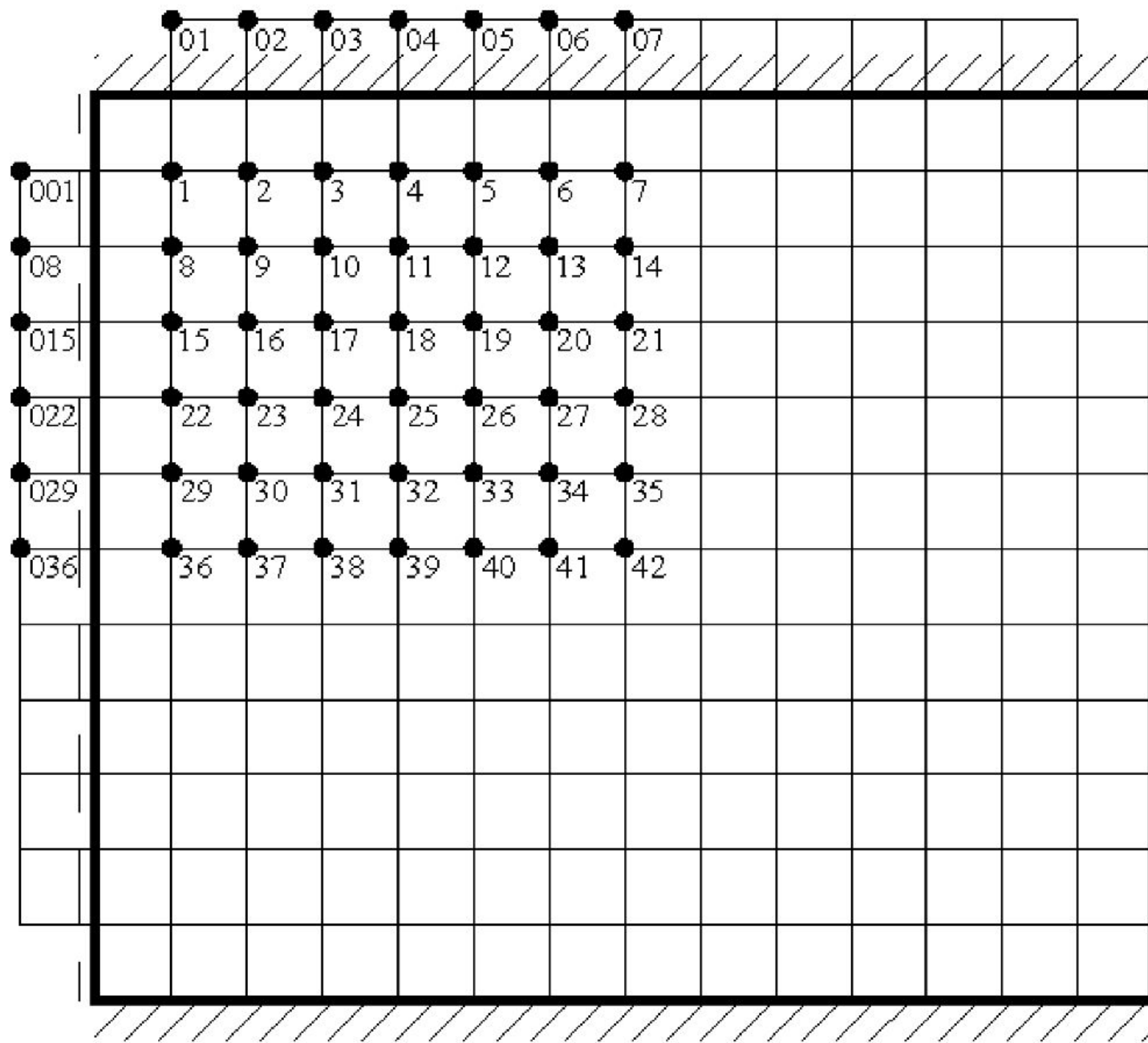


Рис. 2.

Граничные условия для защемлённого края :

а) прогиб на опоре равен нулю – $W_{\text{конт}} = 0$;

б) угол поворота на опоре равен нулю –

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{W_{\text{законт.}} - W_{\text{внутрик.}}}{2\lambda} = 0.$$

Из этих условий получим:

$$\text{а) } W_{\text{конт.}} = 0 ; \text{ б) } W_{\text{законт.}} = W_{\text{внутрик.}} \quad (10)$$

Для шарнирноопёртого края будем иметь:

а) прогиб на опоре равен нулю – $W_{\text{конт}}=0$;

б) изгибающий момент равен нулю –

$$\frac{\partial^2 W}{\partial^2 x} = \frac{W_{\text{законт.}} + W_{\text{внутрик.}}}{\lambda^2} = 0,$$

Откуда:

$$\text{а) } W_{\text{конт.}} = 0; \text{ б) } W_{\text{законт.}} = -W_{\text{внутрик.}} \quad (11)$$

Для плиты,
представленной
на рисунке 2,
будем иметь:

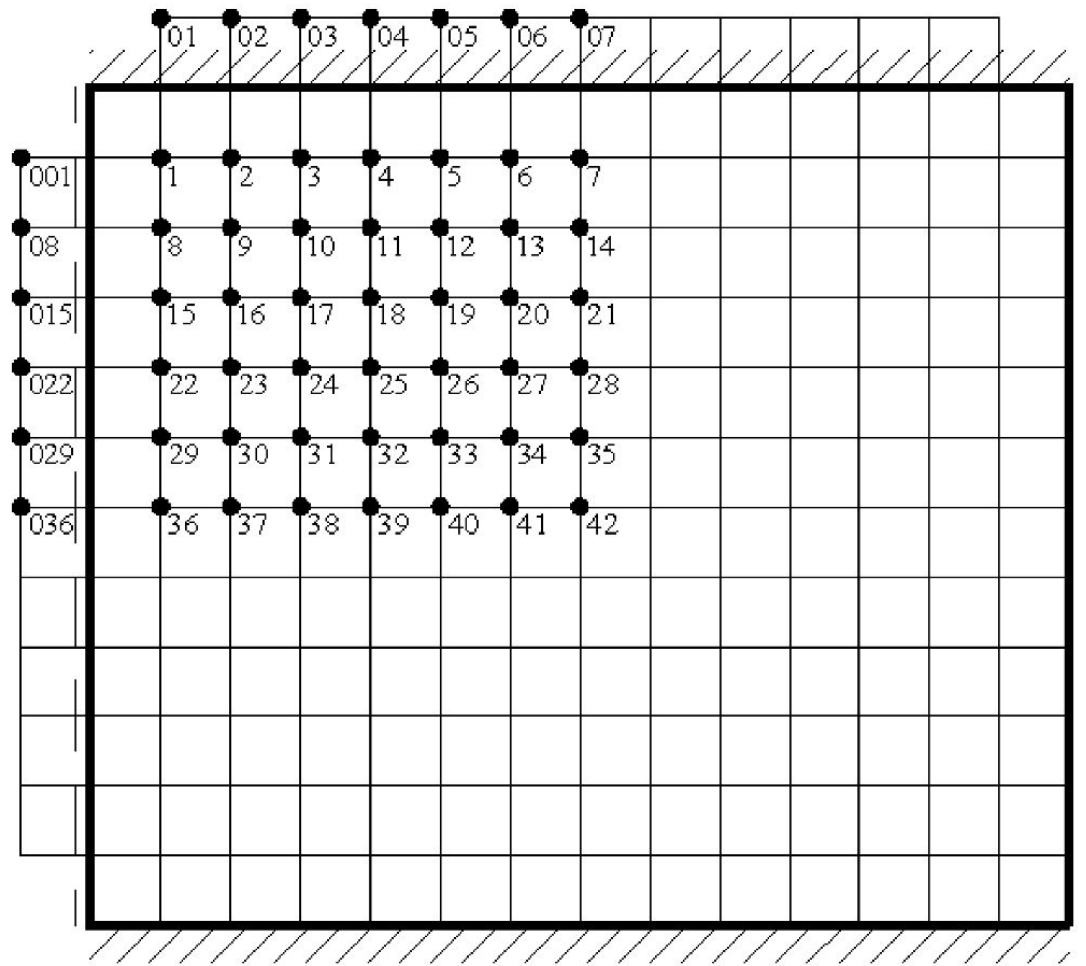


Рис. 2.

$$W_{01} = W_1, W_{02} = W_2, W_{03} = W_3 \text{ и } W_{001} = -W_1,$$

$$W_{08} = -W_8, W_{015} = -W_{15} \text{ и т. д.}$$

(12)

**Расчет изгибаемой плиты,
опертой по контуру.**

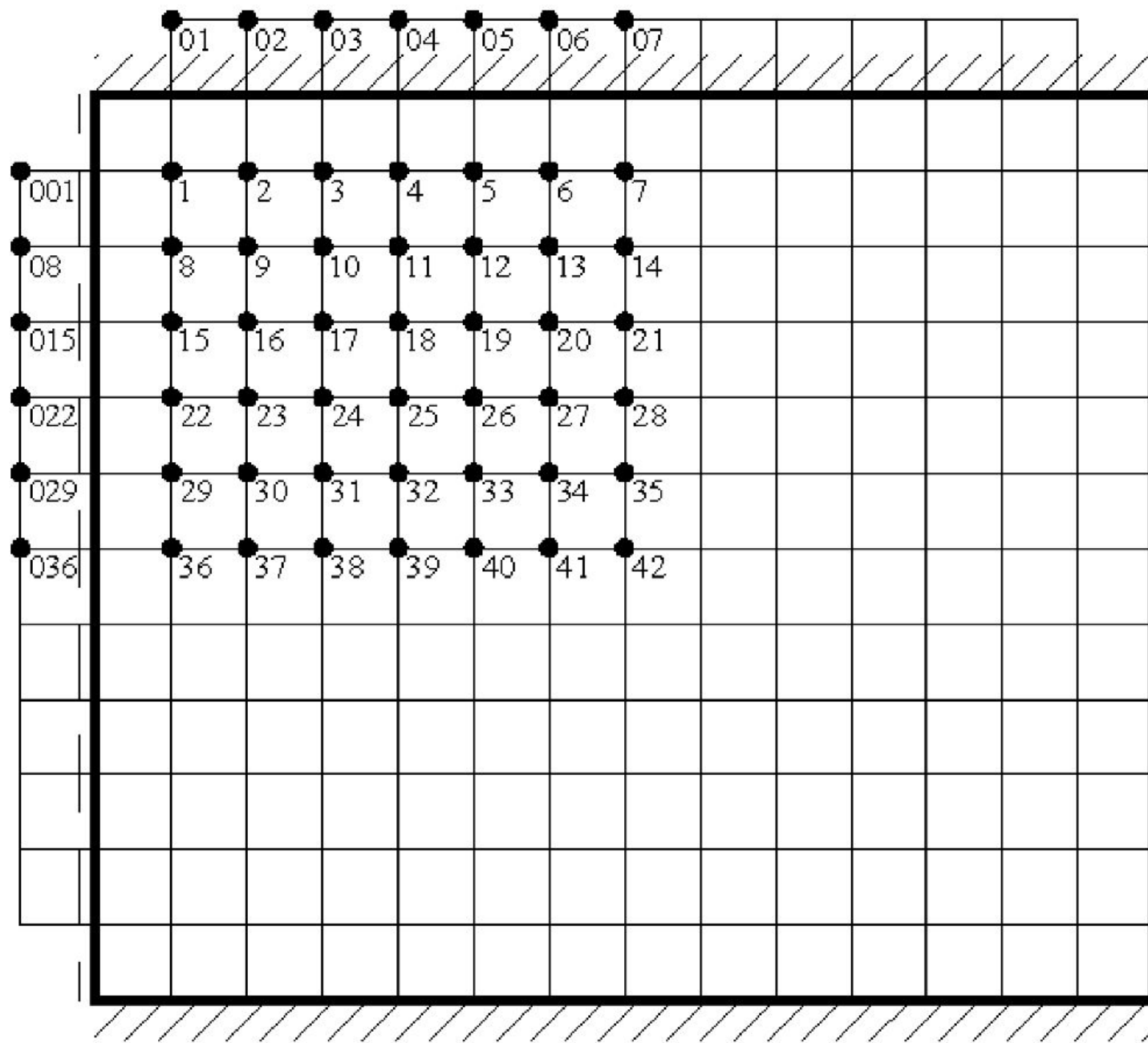


Рис. 2.

Деформированный вид плиты

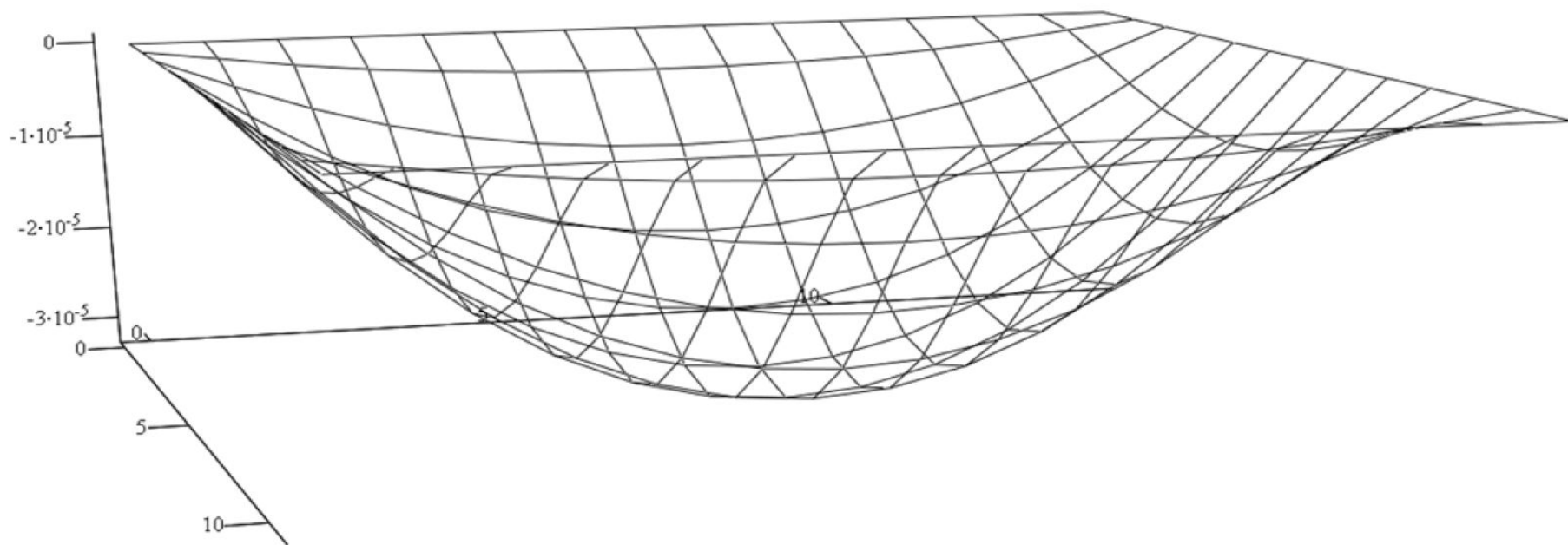


Рис. 3. Деформированный вид плиты

Эпюры изгибающих моментов M_x и M_y для рассматриваемой плиты

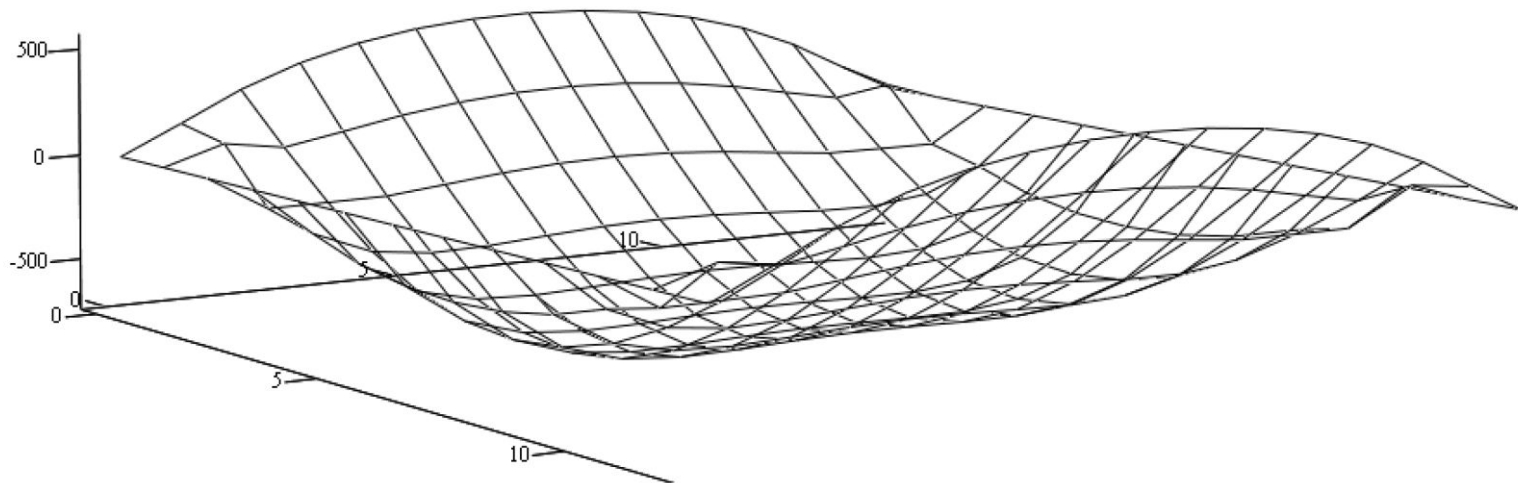


Рис. 4. Эпюра изгибающего момента M_x

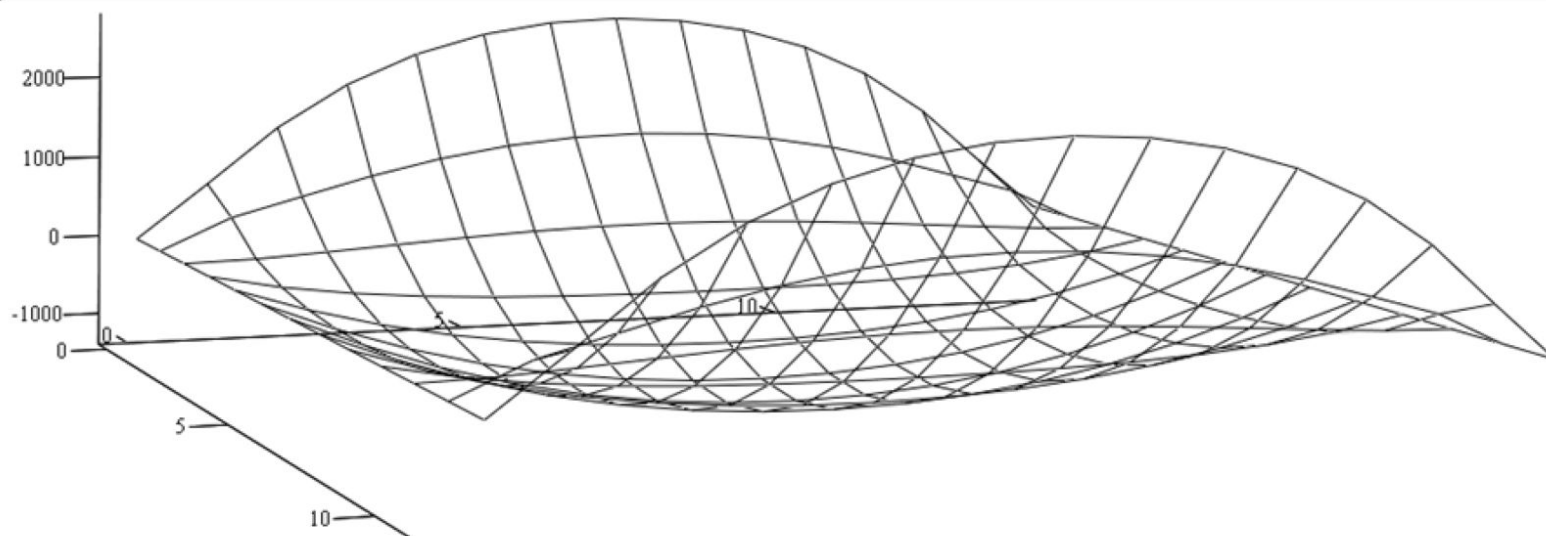


Рис. 5. Эпюра изгибающего момента M_y

**Расчет изгибаемой плиты с
одной промежуточной опорой.**

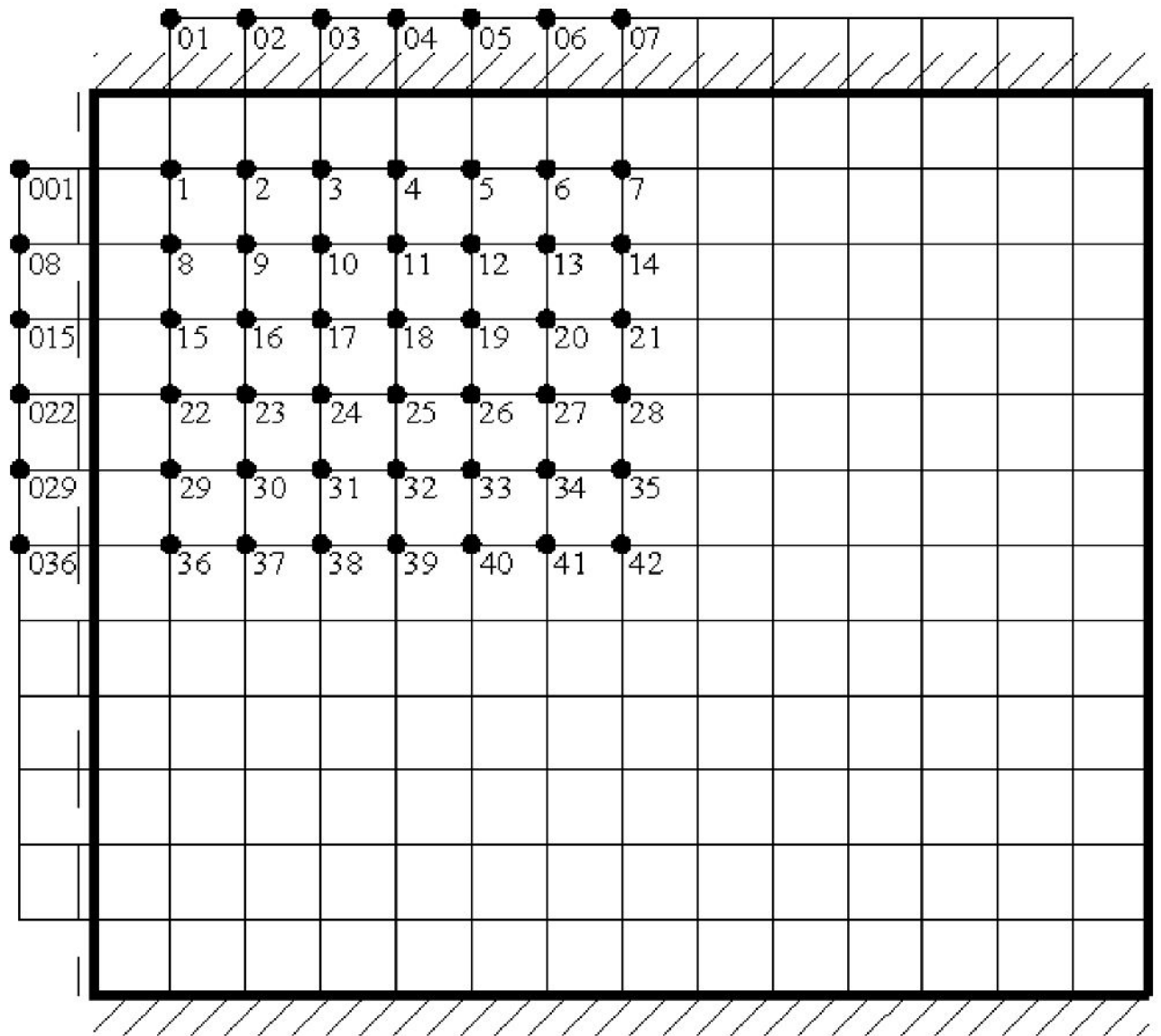


Рис. 2.

Деформированный вид плиты

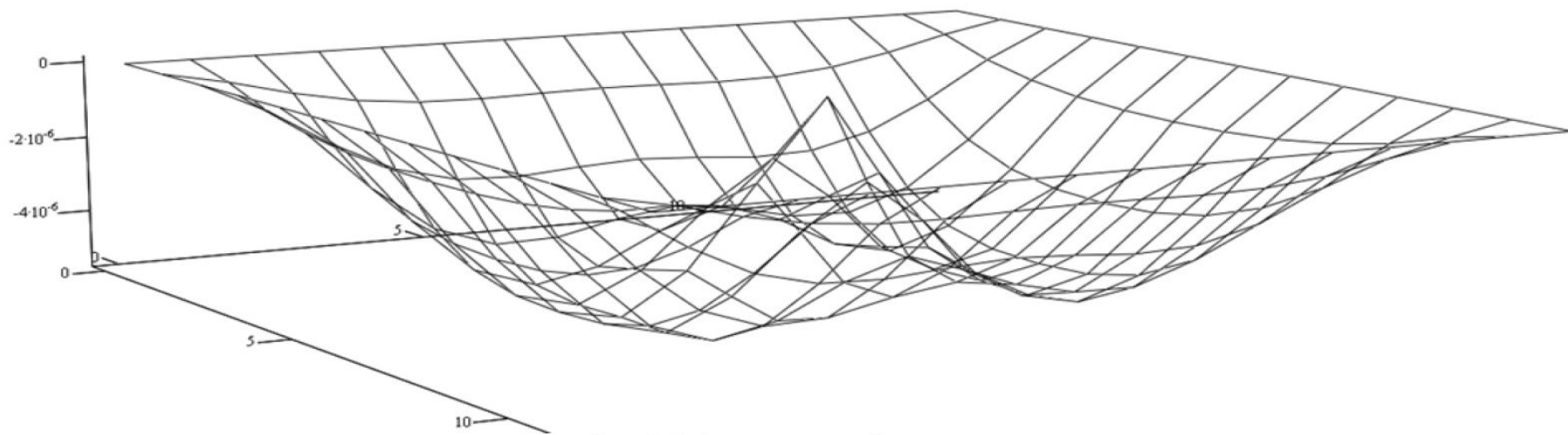
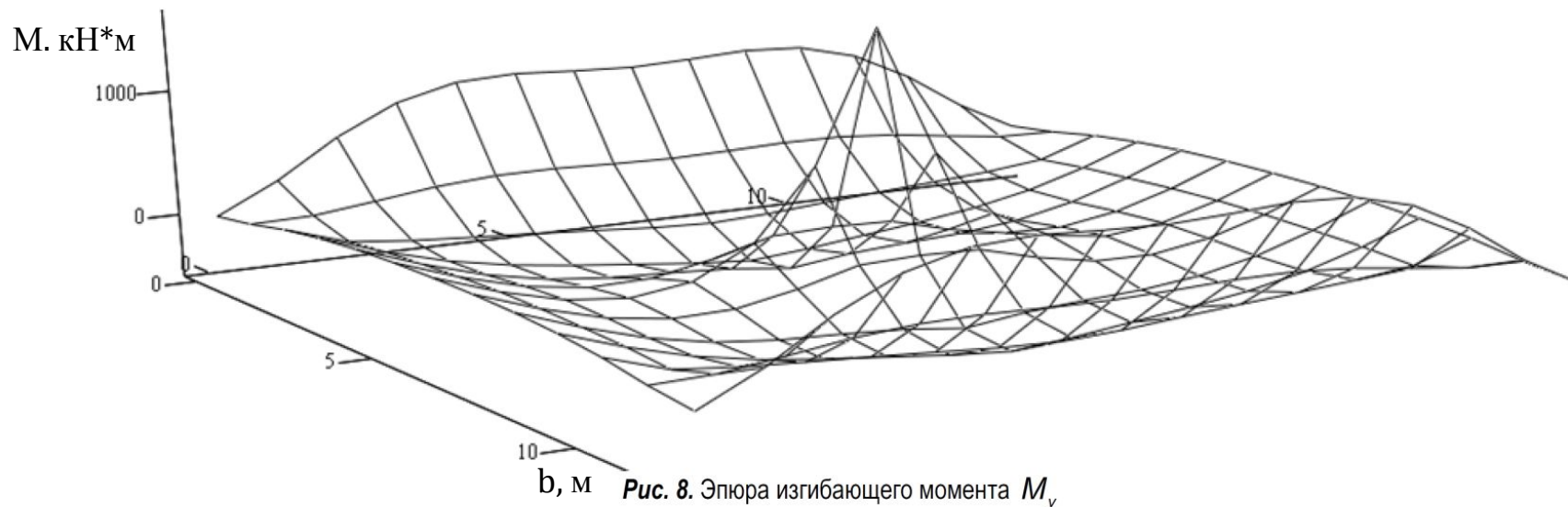
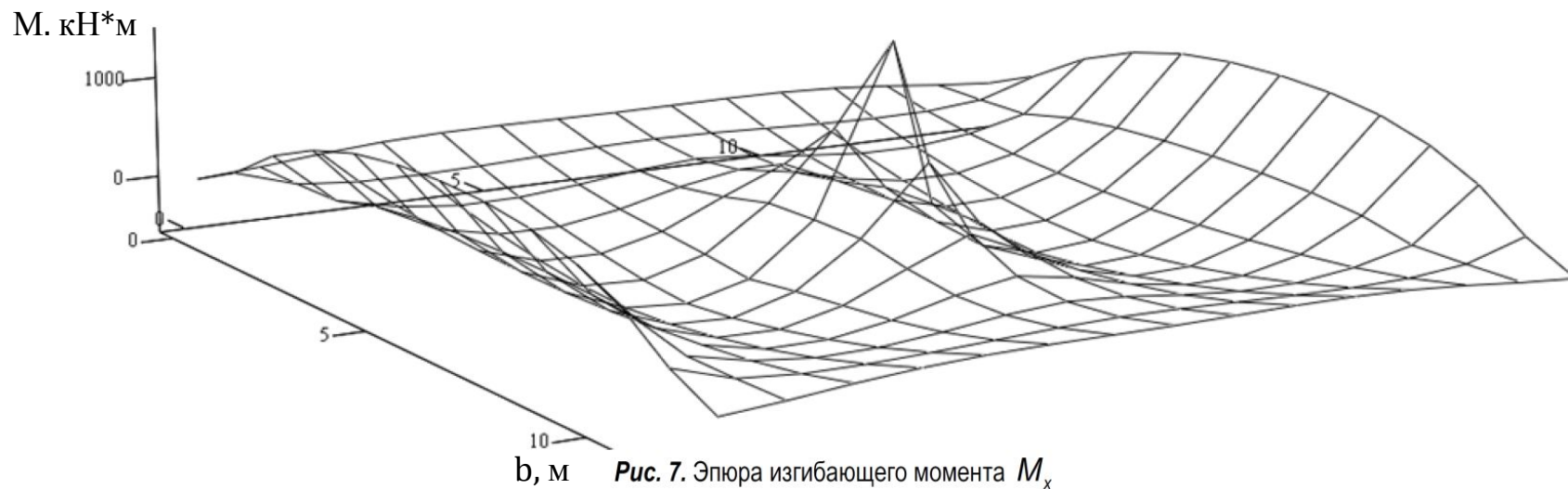


Рис. 6. Деформированный вид плиты

Эпюры изгибающих моментов M_x и M_y



**Расчет изгибаемой плиты с
двумя промежуточными
опорами.**

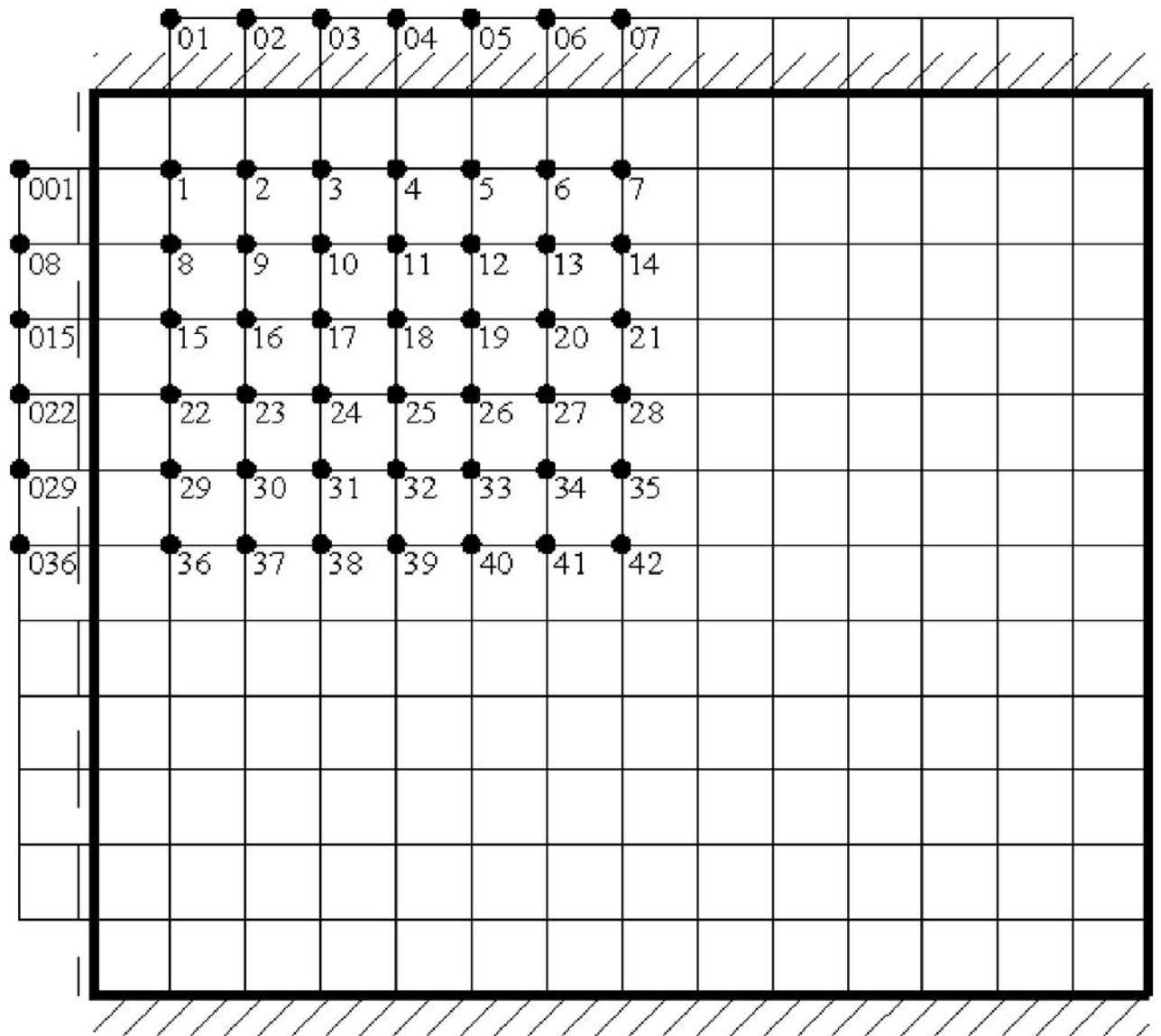


Рис. 2.

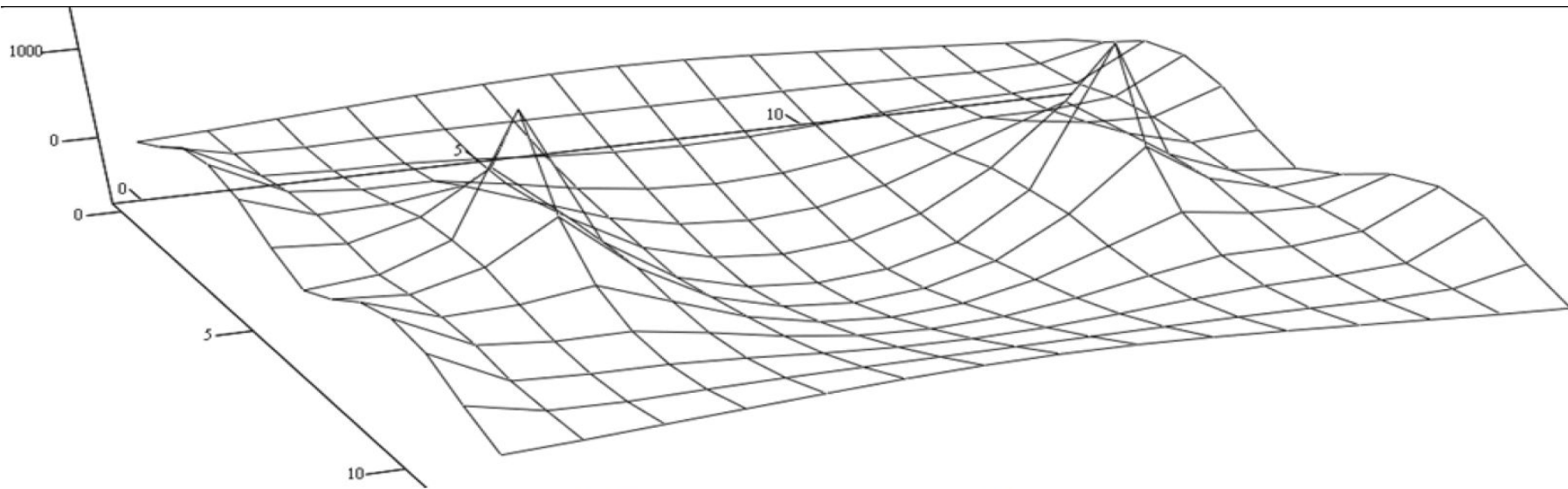


Рис. 9. Эпюра изгибающего момента M_x

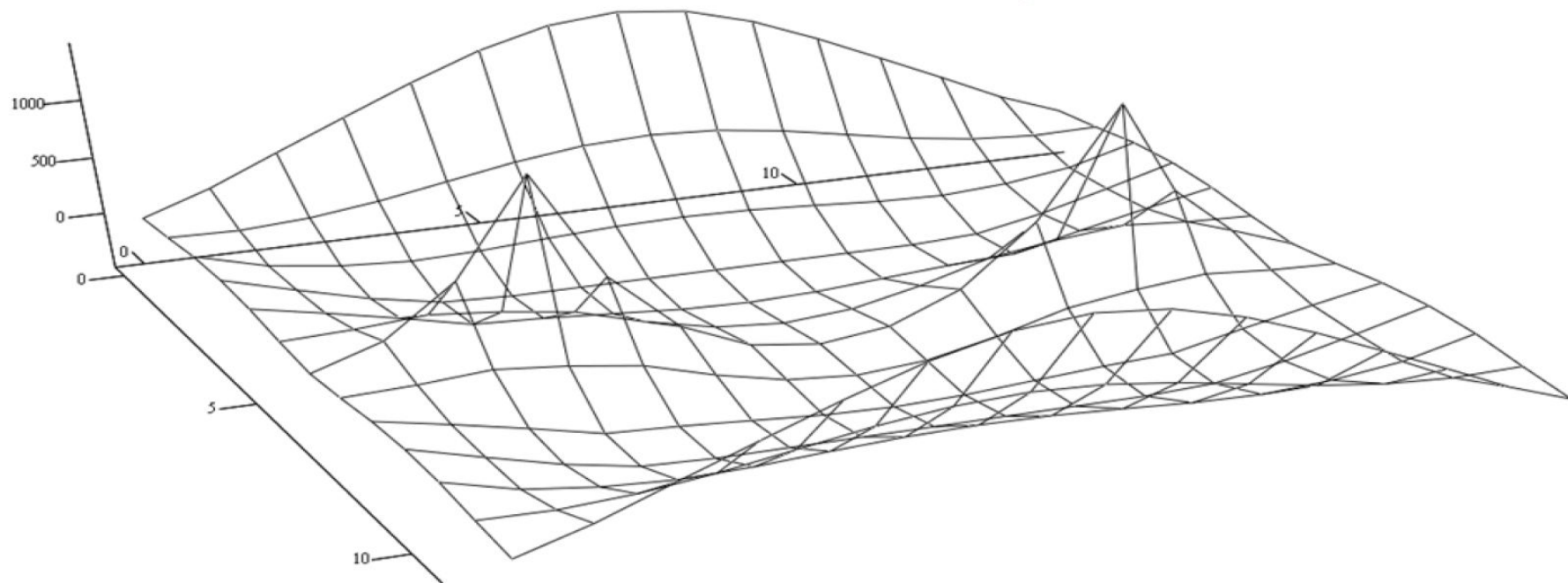


Рис. 10. Эпюра изгибающего момента M_y

Спасибо за внимание!