

# Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: *Основные понятия  
теории числовых рядов*

# Глава III. Числовые ряды

## §14. Основные понятия теории числовых рядов

### 1. Основные определения

Пусть задана числовая последовательность  $\{u_n\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют **числовым рядом**.

При этом, члены последовательности  $\{u_n\}$  называются **членами ряда** (1-м, 2-м, ...,  $n$ -м (общим членом) )

Если начиная с некоторого номера  $N$  для членов ряда справедливо равенство

$$u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = \dots = 0,$$

то ряд называют **конечным**. В противном случае ряд называется **бесконечным**.

Ряд  $\sum u_n$  называют

- **знакоположительным**, если  $u_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- **знакоотрицательным**, если  $u_n \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- **знакопостоянным**, если он знакоположительный или знакоотрицательный;
- **знакопеременным**, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Для ряда  $\sum u_n$  запишем последовательность

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \dots$$

Числа  $S_1, S_2, \dots, S_n$  называют **частичными суммами ряда**  $\sum u_n$  (1-й, 2-й, ...,  $n$ -й).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ряд  $\sum u_n$  называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм  $\{S_n\}$ .

При этом, число  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  называют **суммой ряда**  $\sum u_n$ .

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \exists$ ) то говорят, что ряд  $\sum u_n$  **расходится** и не имеет суммы.

Если  $S$  – сумма ряда  $\sum u_n$ , то записывают:  $\sum u_n = S$ .

# ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РЯДОВ

1) Рассматривается в математическом анализе:

*Определить, сходится или расходится заданный ряд  
(говорят: «исследовать ряд на сходимость»)*

2) Рассматривается в вычислительной математике:

*Найти сумму сходящегося ряда.*

Найти точное значение суммы  $S$  сходящегося ряда удается редко. Обычно полагают  $S \approx S_n$  где  $n$  выбирают так, чтобы

$$|R_n| = |S - S_n| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ заранее задано}).$$

Число  $R_n$  называют *остатком ряда*.

## 2. Основные свойства числовых рядов

### ТЕОРЕМА 1.

*Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда.*

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) **Произведением ряда  $\sum u_n$  на число  $c \in \mathbb{R}$**  называется ряд

$$\sum c \cdot u_n.$$

2) **Суммой (разностью) рядов  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$**  называется ряд

$$\sum (u_n + v_n) \quad [ \sum (u_n - v_n) ].$$

ОБОЗНАЧАЮТ:  $c \cdot \sum u_n$  – произведение ряда на число  $c$  ;

$\sum u_n \pm \sum v_n$  – сумма (разность) рядов  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$

## ТЕОРЕМА 2 (об арифметических действиях над сходящимися рядами)

Если ряд  $\sum u_n$  сходится и его сумма равна  $U$ ,

ряд  $\sum v_n$  сходится и его сумма равна  $V$ ,

то а) ряд  $\sum c u_n$  – сходится и его сумма равна  $cU$  ( $\forall c \in \mathbb{R}$ );

б) ряд  $\sum (u_n \pm v_n)$  – сходится и его сумма равна  $U \pm V$ .

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

#### СЛЕДСТВИЯ теоремы 2.

1) Если  $\sum u_n$  расходится, то  $\forall c \neq 0$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) ряд  $\sum c u_n$  – тоже расходится.

2) Если ряд  $\sum u_n$  сходится, а ряд  $\sum v_n$  расходится, то ряд  $\sum (u_n \pm v_n)$  – расходится.

ТЕОРЕМА 3 (необходимый признак сходимости ряда).

*Если ряд  $\sum u_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ теоремы 3 (достаточное условие расходимости ряда)

*Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд  $\sum u_n$  расходится.*

ТЕОРЕМА 4 (закон ассоциативности для сходящихся рядов).

*Пусть ряд  $\sum u_n$  сходится и его сумма равна  $U$*

*Если сгруппировать члены этого ряда, НЕ ИЗМЕНЯЯ ИХ ПОРЯДКА, то полученный в результате этого ряд будет сходиться и иметь ту же сумму  $U$ .*