МБОУ СОШ № 6
г. Богородск Нижегородская область

Наибольшее и наименьшее значения функции

Алгебра и начала анализа - 11

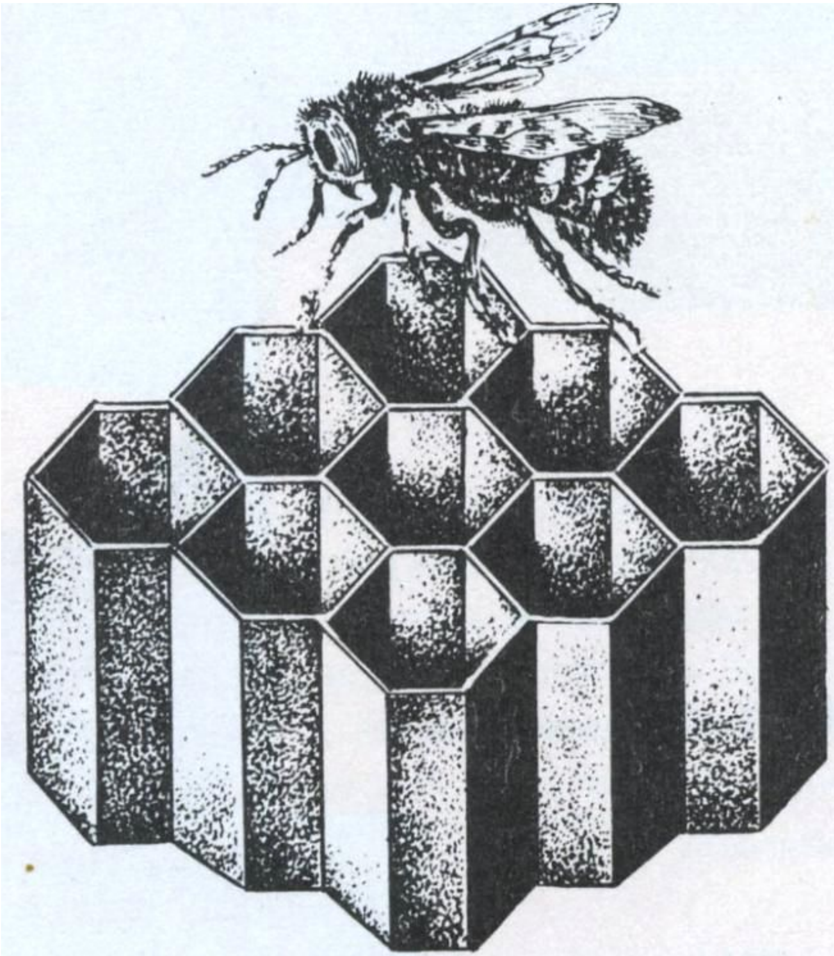
Учитель Королева О.А.

Ход урока:

1. Сообщение учащихся о практическом применении темы «Производная» (слайды 4 – 6)
2. Решение задач с практическим содержанием. В ходе решения задач используются «домашние заготовки» (слайды 6 – 17)

« Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды. »

П. Л. Чебышёв



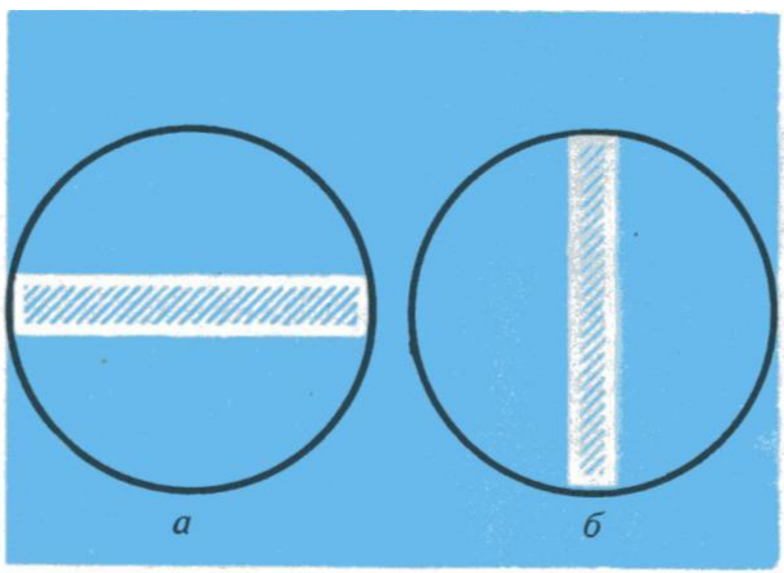
« Самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что, прежде чем строить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове. »

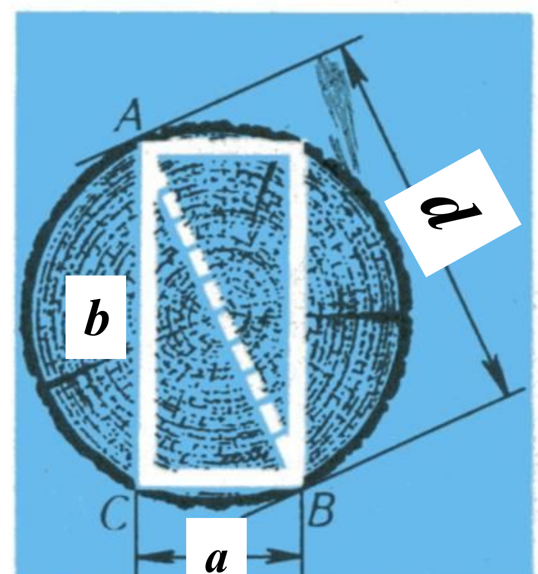
К. Маркс

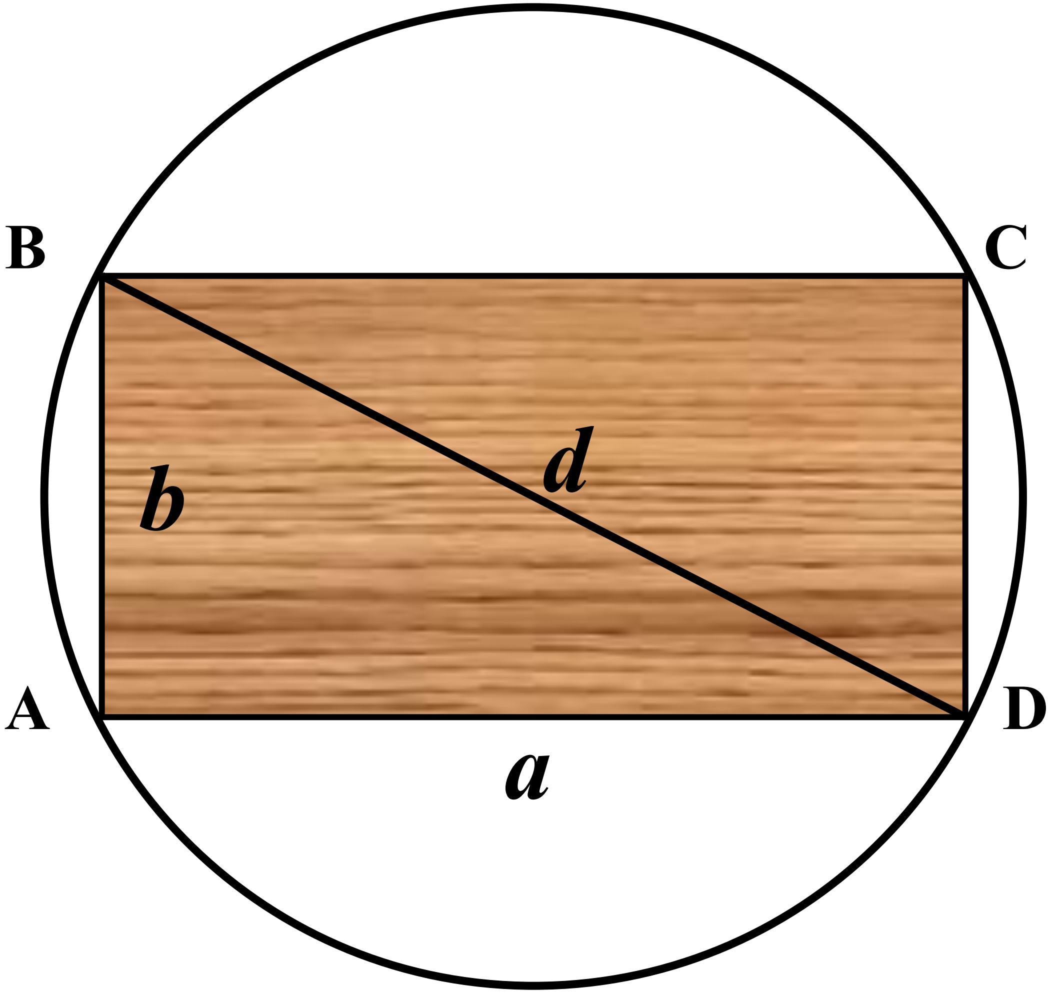
Задача № 1

Задача № 1

Из круглого бревна, толщина которого *d* см, следует вырезать балку прямоугольного сечения. Прочность балки пропорциональна ширине балки и квадрату ее высоты. Иными словами прочность балки равна $P = kab^2$. (*a* и *b* - измерения сечения балки, *k* – коэффициент пропорциональности, $k > 0$.)
При каких значениях *a* и *b* прочность балки будет наибольшей ?







$$b^2 = d^2 - a^2$$

$p(x) = kx(d^2 - x^2)$ $\quad k > 0$; $\quad x \in (0; d)$

$p(x) = kd^2x - kx^3$

$p'(x) = kd^2 - 3kx^2 = k(d^2 - 3x^2)$

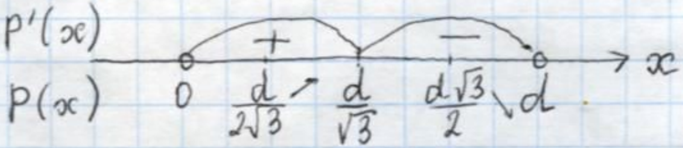
$k(d^2 - 3x^2) = 0$

$d^2 - 3x^2 = 0$

$-3x^2 = -d^2$

$x_1 = \frac{d}{\sqrt{3}}$; $\quad x_2 = -\frac{d}{\sqrt{3}}$

$\frac{d}{\sqrt{3}} \in (0; d)$; $\quad -\frac{d}{\sqrt{3}} \notin (0; d)$



$k\left(d^2 - 3\cdot\frac{d^2}{12}\right) = k\left(\frac{4d^2 - d^2}{4}\right) = \frac{3kd^2}{4}$; $\quad \left(\frac{3kd^2}{4} > 0\right)$

$k\left(d^2 - 3\frac{3d^2}{4}\right) = k\left(\frac{4d^2 - 9d^2}{4}\right) = -\frac{5dk}{4}$; $\quad \left(-\frac{5dk}{4} < 0\right)$

$x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ - точка максимума

при $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, ф-ция будет принимать наибольшие значения

Отношение $\frac{h}{a}$ равно $\sqrt{2} \approx \frac{7}{9}$.

Именно такое отношение высоты балки к ширине и предписано правилами производства строительных работ.

Задача № 2

Задача № 2

Найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Существенные требования :

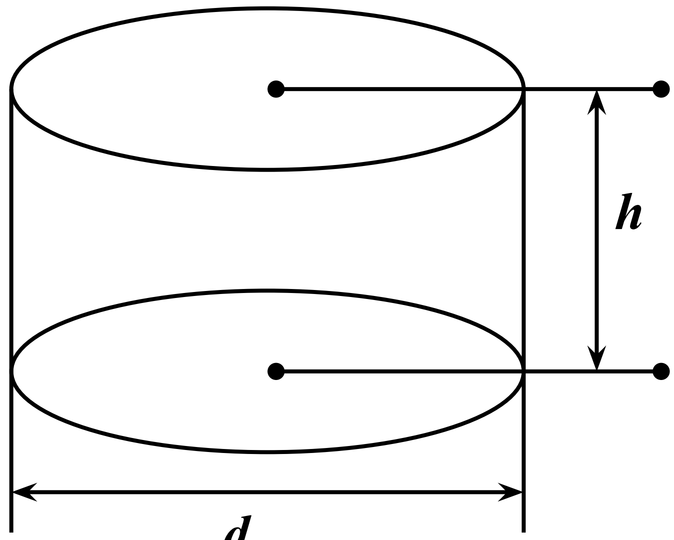
форма банки – цилиндр,

емкость банки задана – $V\ (\ см^3\ )$

Расход жести на изготовление банок – площадь полной поверхности цилиндра .

Математическая модель :

Определить размеры цилиндра с объемом $V\ (\ см^3\ )$ ***так, чтобы площадь его поверхности была наименьшей .***



$$S = 2 \cdot S_{осн} + S_{бок}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$r = \frac{d}{2}$$

$$S = 2\pi \frac{d^2}{4} + 2\pi \frac{d}{2} h$$

$$S = \pi \frac{d^2}{2} + \pi dh$$

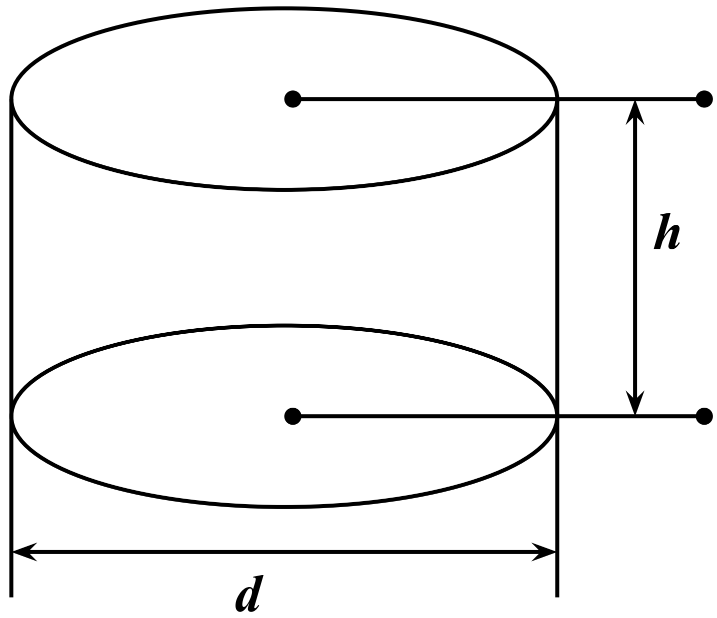
$$V_ц = S_{осн} \cdot h$$

$$V_ц = \pi r^2 \cdot h$$

$$r = \frac{d}{2}$$

$$V_ц = \pi \frac{d^2}{4} \cdot h$$

$$h = \frac{4V}{\pi d^2}$$



$$S = \pi \frac{d^2}{2} + \pi d h$$

$$h = \frac{4V}{\pi d^2}$$

$$S(x) = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{4V}{x}; \quad x \in (0; +\infty)$$

$$S'(x) = \pi x - \frac{4V}{x^2} = \frac{\pi x^3 - 4V}{x^2}$$

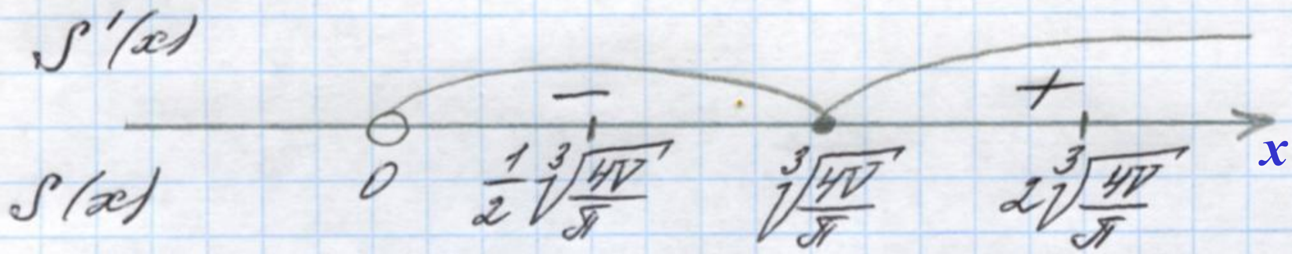
$$\frac{\pi x^3 - 4V}{x^2} = 0$$

$$\pi x^3 - 4V = 0$$

$$\pi x^3 = 4V$$

$$x^3 = \frac{4V}{\pi}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}; \quad \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \in (0; +\infty)$$



$$S'\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)=\frac{\pi\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4V}{\pi}-4V}{\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2}=\frac{\frac{V}{2}-4V}{\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2}=$$

$$=-\frac{\frac{7V}{2}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2}$$

$$S'\left(2\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)=\frac{\pi\cdot 8\cdot\frac{4V}{\pi}-4V}{\left(2\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2}=\frac{32V-4V}{\left(2\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2}=$$

$$=\frac{28V}{\left(2\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2}$$

$x=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ – точка минимума

Задача № 3

Задача :

Какими должны быть размеры участка прямоугольной формы и площадью $1600\ м^2$,

чтобы на его ограждение было израсходовано наименьшее количество материала ?

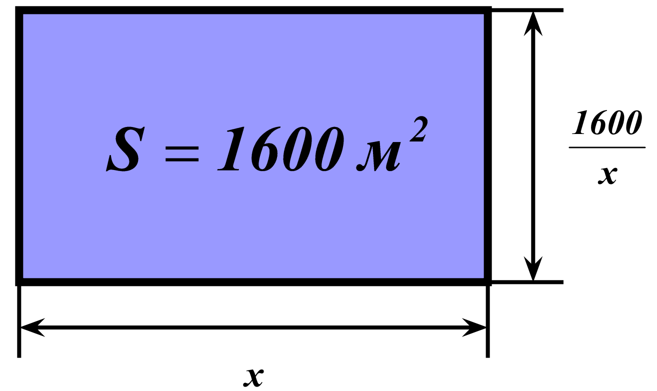
Составим математическую модель задачи :

из всех прямоугольников площадью 1600 кв. м найти прямоугольник наименьшего периметра

Из всех прямоугольников площадью 1600 кв. м найти прямоугольник наименьшего периметра.

1. *P – периметр прямоугольника*
2. *x (м) – длина прямоугольника*

$\dfrac{1600}{x}$ *(м) – ширина прямоугольника*



3. $\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{1600}{x} > 0 \end{cases}$; $x > 0$

4. $P = 2\left(x + \dfrac{1600}{x}\right)$

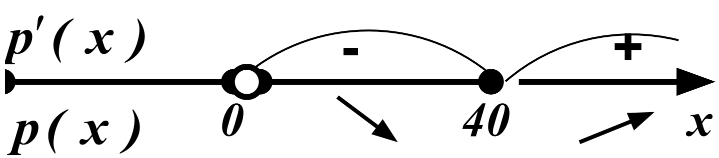
5. **Рассмотрим функцию** $p(x) = 2\left(x + \dfrac{1600}{x}\right)$

$$5.\ \ p(x) = 2\left(x + \frac{1600}{x} \right) = 2x + \frac{3200}{x}$$

$$p'(x) = 2 - \frac{3200}{x^2} = \frac{2x^2 - 3200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1600)}{x^2} = \frac{2(x-40)(x+40)}{x^2}$$

$$p'(x) = 0, \qquad x_1 = 40, \quad x_2 = -40$$

$$-40 \notin (0; +\infty)$$



x = 40 – точка минимума, значит функция *p (x)* в этой точке принимает наименьшее значение. Следовательно и периметр прямоугольника будет наименьшим.

Длина прямоугольника – 40 (м)

Ширина прямоугольника –

$$\frac{1600}{40} = 40 \ (\ м \ )$$

Длина участка – 40 (м)

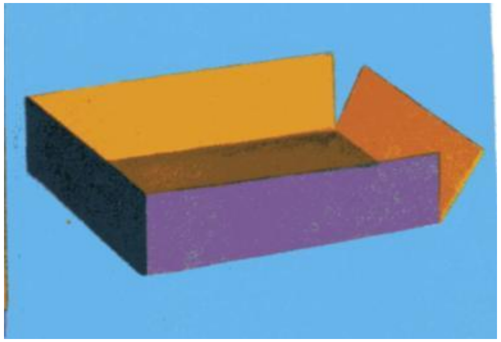
Ширина участка – 40 м

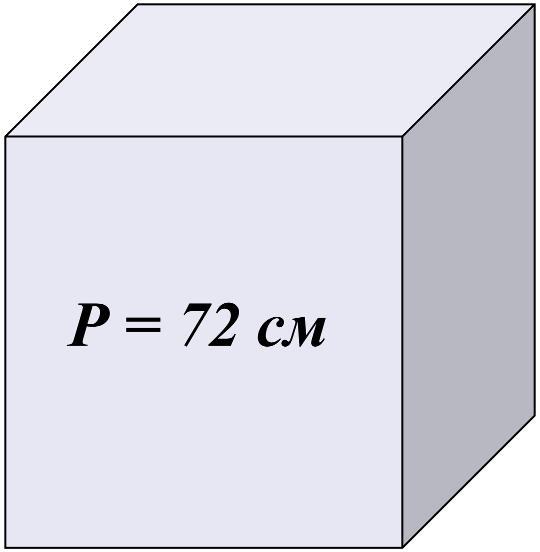
Ответ: ***длина участка 40 м, ширина участка – 40 м.***

Задача :

Выращенную на участке клубнику ученики отправляют в детский сад в коробках, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, периметр боковой грани которого 72 см. Какими должны быть размеры коробки, чтобы ее вместимость была наибольшей ?

Выращенную на участке клубнику ученики отправляют в детский сад в коробках, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, периметр боковой грани которого 72 см. Какими должны быть размеры коробки, чтобы ее вместимость была наибольшей ?





Математическая модель :

Из всех прямоугольных параллелепипедов с квадратным основанием, периметр боковой грани которого 72 см, найти параллелепипед наибольшего объема.

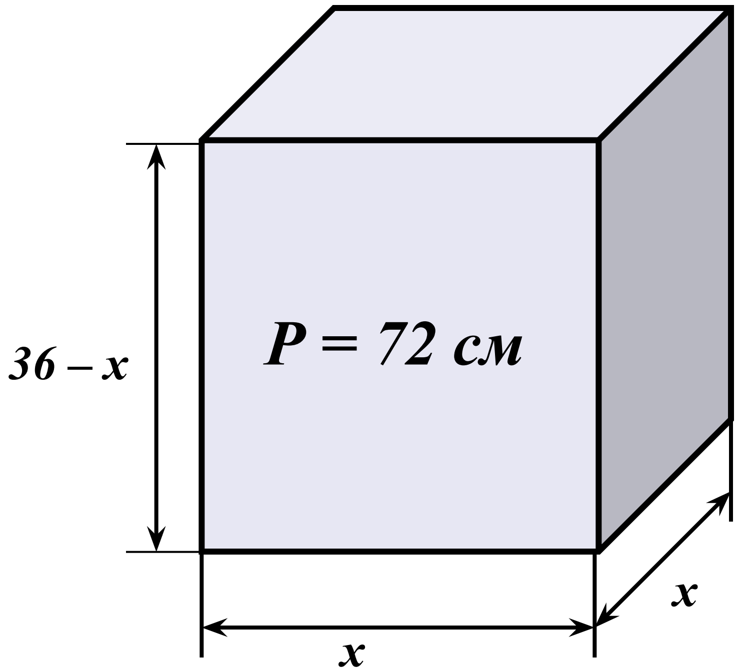
Из всех прямоугольных параллелепипедов с квадратным основанием, периметр боковой грани которого 72 см, найти параллелепипед наибольшего объема.

1. V – объем прямоугольного параллелепипеда

2. x (см) – длина прямоугольного параллелепипеда ,
x (см) – ширина прямоугольного параллелепипеда
$36 - x$ (см) – высота прямоугольного параллелепипеда

3. $$\begin{cases} x > 0 \\ 36 - x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 36 \end{cases}, \qquad 0 < x < 36$$



$$V = S_{\text{основания}} \cdot h$$

4. $V = x^2 (36 - x)$

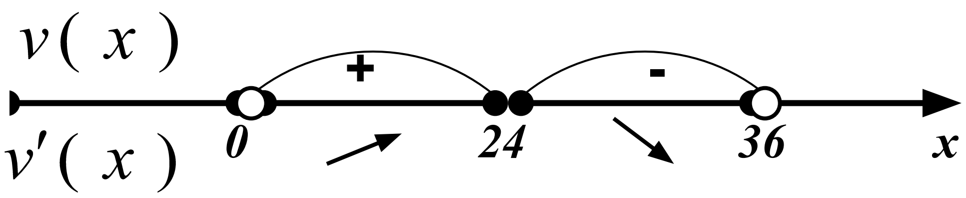
$v(x)$

5. *Рассмотрим функцию* $v(x) = x^2(36 - x)$

$$v'(x) = 72x - 3x^2 = 3x(24 - x)$$

$$v'(x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 24$$

$$0 \notin (0;36)$$



$x = 24$ – точка максимума, значит функция $v(x)$ в этой точке принимает наибольшее значение. Следовательно и объем прямоугольного параллелепипеда при $x = 24$ будет наибольшим.

Длина прямоугольного параллелепипеда –
24 (см)

Ширина прямоугольного параллелепипеда –
24 (см)

Высота прямоугольного параллелепипеда –
36 – 24 = 12 (см)

Ответ : *чтобы вместимость коробки была наибольшей, ее размеры должны быть 24 см, 24 см, 12 см*

1. Укажите производную функции $y = x^4 - \frac{1}{x}$

1) $4x - \frac{1}{x^2}$ 2) $4x^3 - \frac{1}{x}$ 3) $4x^3 + \frac{1}{x}$ 4) $4x + \frac{1}{x^2}$

2. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если

$$f(x) = -x^2 - 4x - 2006$$

1) $(-\infty; -2)$ 2) $(-2; +\infty)$ 3) $(-\infty; 2)$ 4) $(2; +\infty)$

3. Найдите точку маскимума функции

$$y = x^3 - 3x + 2$$

1) -1 2) 0 3) 1 4) 4

4. Найдите наименьшее значение функции

$y = 2x^3 - 6x$ на отрезке $[0; 2]$

1) -6 2) -4 3) -2 4) 0

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \sin 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$

1) 2 2) 1 3) 0 4) -1