Тема 6. Несобственные интегралы.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции f(x) на полусегменте [a, ∞):

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\infty} f(x)dx$$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**. Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно провести для несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_c^{\infty} f(x)dx$

Признаки сходимости несобственных интегралов.

1) Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0\le f(x)\le\varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ тоже сходится и $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx\ge\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

2) Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0\le\varphi(x)\le f(x)$ и интеграл $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ тоже расходится.

3) Если $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

Интеграл от разрывной функции.

Если в точке x = c функция либо не определена, либо терпит разрыв, то

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)dx .$$

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_a^c f(x)dx$ - сходится, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует, то $\int_a^c f(x)dx$ - расходится.

Если в точке x = a функция терпит разрыв, то $\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to a+0} \int_b^c f(x)dx$.

Если функция f(x) имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Пример

Вычислить несобственный интеграл или исследовать его на сходимость

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{(x+1)^3}$$

Р е ш е н и е.

Несобственный интеграл первого рода (по бесконечному промежутку) от правильной рациональной дроби может быть вычислен согласно определению несобственного интеграла первого рода .

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{(x+1)^3} = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}dx = \lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_0^\alpha \frac{dx}{(x+1)^2} - \int_0^\alpha \frac{dx}{(x+1)^3}\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right)\Bigg|_0^\alpha = \lim_{\alpha\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{2(\alpha+1)^2} + 1 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

О т в е т: несобственный интеграл сходится и его значение равно 0.5

Пример Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}$

разрывна в точках $x=1$ и $x=3$.

Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода, так как

верхний предел совпадает со значением $x=1$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln|x-3|-\ln|x-1|\right]\Big|_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon}=\infty,$$

О т в е т: данный несобственный интеграл расходится

Пример. Вычислить $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция разрывна в точке $x=3$ и эта точка принадлежит отрезку интегрирования. Поэтому интеграл разбивается на два, чтобы особая точка в каждом из них была в конце интервала интегрирования

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} = \int_0^3 (x-3)^{-1/3}dx + \int_3^4 (x-3)^{-1/3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon}(x-3)^{-1/3}dx +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{3+\varepsilon}^4 (x-3)^{-1/3}dx = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(x-3)^{2/3}\Big|_0^{3-\varepsilon} + \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(x-3)^{2/3}\Big|_{3+\varepsilon}^4 =$$

$$\frac{3}{2}\left(0-(-3)^{2/3}+1-0\right) = \frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{9}).$$

О т в е т: Несобственный интеграл сходится и равен $\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{9}\right)$