Элементы функционального анализа

Лекция № 22

Линейные пространства

Определение: Множество E элементов x, y, z, ... называ-ется линейным пространством, если в нем определены две операции:

I. Каждым двум элементам множества E поставлен в соответствии определенный элемент E, называемый их суммой

$$\forall x, y \in E \quad \exists\, x + y \in E$$

II. Каждому элементу E и каждому числу (скаляру) поставлен в соответствие определенный элемент E - произведение элемента на число

$$\forall x, \in E, \lambda \in R \quad \exists\, \lambda x \in E$$

Свойства(аксиомы) операций

1) $x + y = y + x$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

3) $\exists\, 0 \in E : x + 0 = x$

4) $\lambda(\mu)x = (\lambda\mu)x$

5) $1 \cdot x = x,\ 0 \cdot x = 0$

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

Замечание:

$$\lambda, \mu \in R \text{ или } \lambda, \mu \in C$$

Следствия аксиом

1. Во всяком линейном пространстве E для всякого элемента x можно определить противоположный элемент (-x). (А значит и операцию вычитания y - x)

$$-x=(-1)x \Rightarrow x+(-x)=1\cdot x+(-1)x=0\cdot x=0$$

2. Нулевой элемент единственен

$$0_1+0_2=0_1,\, 0_2+0_1=0_2 \Rightarrow 0_1=0_2$$

3. Если $\lambda x=\mu x,\ где\ x\neq 0 \Rightarrow \lambda=\mu$

4. Если $\lambda x=\lambda y\ и\ \lambda\neq 0, \Rightarrow x=y$

Примеры линейных пространств

1. Множество векторов в трехмерном пространстве (на плоскости или прямой)

2. Множество R^m - всевозможных упорядоченных наборов (столбцов) из m действительных чисел

Пусть D - некоторое множество, пусть каждому t поставлен в соответствие элемент x(t) линейного пространства E. Введем операции:

$$(x+y)(t) \equiv x(t)+y(t)$$

$$(\lambda x)(t) \equiv \lambda x(t)$$

3. Пространство всех многочленов степени, не превышающей k:

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x^k t^k$$

$x_0, x_1, \ldots, x_k$ - произвольные вещественные числа

$$t \in R = (-\infty, +\infty)$$

4. Пространство непрерывных функций $C[a,b]$

5. Пространство k - раз непрерывно дифференцируемых функций

6. Множество M_{mn} всех прямоугольных матриц

Линейная зависимость и независимость элементов

Линейно зависимые элементы

$$\sum_{k=1}^{l}\alpha_k x_k = 0,\ \textit{где не все}\,\alpha_k = 0 \quad (\sum_{k=1}^{l}|\alpha_k| > 0)$$

Задача1: Найти к, при котором вектора (1,2,3), (1,1,0) и (к,1,1) линейно зависимы.

Задача2: Доказать, что в C[0,π] функции 1, cos(t), $\cos^2$(t) – линейно независимы, а функции 1, cos(2t), $\cos^2$(t) – линейно зависимы.

Конечномерные и бесконечномерные пространства

<u>Определение:</u> Линейное пространство называется

m-мерным, если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие m+1 векторов линейно зависимы.

<u>Определение:</u> Набор любых m линейно независимых векторов в m-мерном линейном пространстве E называ-ется ***базисом*** в E.

Задача: Любой вектор m-мерного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векто-ров – ***разложение вектора по базису***.

Задача: Разложение вектора x по базису - единственно

Бесконечномерное пространство

Определение: Линейное пространство E называется бесконечномерным, если для каждого натурального n в нем существует n линейно независимых элементов.

Задача: Пространство C[a,b] – бесконечномерно

Линейное многообразие

Определение: Множество M в линейном пространстве E называется ***линейным многообразием*** (линейным множеством), если

$$\forall x, y \in M, \forall \lambda, \mu \in R \Rightarrow \lambda x + \mu y \in M$$

Примеры:

Выпуклые множества в линейных пространствах

<u>**Определение1:**</u> Отрезком, соединяющим точки x_1 и x_2 линейного пространства E, называется совокупность всех точек вида

$$x = (1-t)x_1 + tx_2, \quad t \in [0,1].$$

<u>**Определение1:**</u> Множество W в линейном пространстве E называется выпуклым, если для любых двух точек из множества в нем содержится и отрезок их соединяющий.

Замечание: Всякое линейное многообразие является выпуклым множеством

Выпуклые функционалы

Пусть на линейном пространстве E задана функция, ставя-щая в соответствие каждому элементу x число p(x).

P(x) – функционал на E.

Определение: Вещественный функционал p(x) называется выпуклым, если

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad t \in [0,1]$$

$$p((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)p(x_1) + tp(x_2)$$

Теорема: Если p(x) – выпуклый функционал, то множество $Q = \{x \in E : p(x - x_0) < c\}$ - выпукло

$$p((1-t)x_1 + tx_2 - x_0) = p((1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0)) \le$$

$$(1-t)p(x_1 - x_0) + tp(x_2 - x_0) <$$

$$(1-t)c + tc = c$$

Нормированные пространства

Определение: Линейное пространство E называется ***нормированным пространством***, если каждому его элементу поставлено в соответствие неотрицательное число ||x|| (***норма x***) так, что выполнены 3 аксиомы:

1) $\|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ - невырожденность

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$ - однородность

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника

Следствие:

$$\|x - y\| \geq \left| \, \|x\| - \|y\| \, \right|$$

Расстояние в нормированном пространстве

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

Из свойств нормы следуют следующие свойства расстояния:

$\alpha)\ \rho(x, y) \geq 0$

$\beta)\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$

$\gamma)\ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

<u>Окрестности в нормированном пространстве:</u>

$$S_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$$

$$\overline{S}_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}$$

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$$

Неравенства Гельдера и Миньковского

$$\sum_{k=1}^{m}|\xi_k\eta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Примеры нормированных пространств

1. В пространстве R^m введем норму:

$$\|x\|_c = \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Полученное нормированное пространство называют евклидовым E^m

Как выглядят окрестности при m = 1, 2, 3?

2. В пространстве R^m введем норму:

$$\|x\|_k = \max_{1 \le i \le k} |\xi_i|$$

Полученное нормированное пространство называют c^m

Как выглядят окрестности при m = 1, 2, 3?

Примеры нормированных пространств

3. В пространстве R^m введем норму:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Полученное нормированное пространство называют $l_p^{(m)}$

4. Иногда используют норму

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Замечание: Норма 3 является самой общей

Последовательности и пределы в нормированном пространстве

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность элементов в нормированном пространстве E.

Определение: Элемент x_0 называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\|x_n - x_0\| \to 0 \; при \; n \to \infty$$

Свойства сходящихся последовательностей

1. В любой окрестности точки x_0 находятся все члены последовательности $\{x_n\}$ за исключением, может быть их конечного числа;
2. Предел x_0 единственен;
3. Если $\lambda_n \to \lambda_0 \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$
4. Если $x_n \to x_0,\ y_n \to y_0 \Rightarrow x_n + y_n \to x_0 + y_0$
5. Если $x_n \to x_0 \Rightarrow \|x_n\| \to \|x_0\|$

Пример1: c^m

$$\|x_n - x_0\|_c = \max_i |\xi_{ni} - \xi_{0i}| \to 0 \Rightarrow \xi_{ni} \to \xi_{0i}$$

Сходимость покоординатная!

Пример2: E^m

$$\|x_n - x_0\|_c = \left(\sum_{i=1}^{m} (\xi_{ni} - \xi_{0i})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

Так как для любого x справедливы неравенства

$$\|x\|_k = \max_i |\xi_i| \le \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_c \Rightarrow$$

$$\|x_n - x_0\|_k \le \|x_n - x_0\|_c \to 0$$

Сходимость также покоординатная

Евклидовы пространства

<u>Определение:</u> Вещественное линейное пространство называется ***евклидовым,*** если каждой паре его элементов **x** и **y** поставлено в соответствие вещественное число, (обычно обозначаемое **(x,y)**) называемое ***скалярным произведением***, так что выполняются аксиомы:

$$1.\ (x,x)\geq 0,\quad (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$2.\ (x,y)=(y,x);$$

$$3.\ (\lambda x,y)=\lambda(x,y);$$

$$4.\ (x+y,z)=(x,z)+(y,z).$$

Нормированное евклидово пространство

Всякое евклидово пространство можно превратить в нормированное:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Аксиомы 1) и 2) выполняются очевидно. Докажем аксиому треугольника.

$$(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0 \Rightarrow$$

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Аксиома треугольника

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Ортогональность и ортонормированность элементов

Если $(x_k, x_l) = 0, \forall k, l = 1,2,...,m; k \ne l$

То система векторов $\mathbf{x_1, x_2, \ldots x_m}$ – называется ортогональной системой.

<u>**Теорема:**</u> Любая ортогональная система линейно независима

Примеры пространств со скалярным произведением

1. E^m

2. Пространство непрерывных функций C[a,b]

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$$

Будем рассматривать системы, состоящие из бесконечного числа элементов пространства E со скалярным произведением. Введем понятие линейно независимой, ортогональной и ортонормированной систем:

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \{e_k\}, \quad \{f_k\}$$

Процесс ортогонализации Шмидта

Теорема: По любой линейно независимой системе можно построить ортогональную (ортонормированную) систему.

Пусть $e_1 = x_{1.}$ Ищем e_2 в виде:

$$e_2 = x_2 - \lambda_{21}e_1 \leftrightarrow (e_2, e_1) = 0 \Rightarrow \lambda_{21} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

$$e_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{ki}e_i \Rightarrow \lambda_{kl} = \frac{(x_k, e_l)}{(e_l, e_l)}$$

Задача:

Построить систему ортогональных многочленов в пространстве $L_2[-1;1]$

Обычно используют систему ортогональных многочленов Лежандра

$$p_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(t^2-1\right)^k\right], \quad k = 1,2,...,$$

Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$ - линейное преобразование векторов

Линейное преобразование векторов полностью определяется матрицей $A = (a_{ik})_{n \times n}$

Собственные числа и собственные вектора оператора:

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - спектр оператора (матрицы)

$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$ - спектральный радиус

Норма линейного оператора

$$\left\|A\right\| = \max_{x \neq 0} \frac{\left\|Ax\right\|}{\left\|x\right\|}$$

В зависимости от принятой нормы для векторов можно получить соответствующую матричную норму:

$$\left\|A\right\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

$$\left\|A\right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

$$\left\|A\right\|_2 = \left[\rho(A^T A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\|A\right\|_2 = \rho(A)$$ – Для симметричных матриц