Методы решения тригонометрических уравнений

ВЫПОЛНИЛА УЧЕНИЦА 10 «А» КЛАССА СИНЕЛЬНИКОВА МАЙЯ

Метод замены переменной

С помощью замены $t = \sin x$ *или* $t = \cos x$, *где* $t \in [-1;1]$ *решение исходного уравнения сводится к решению квадратного или другого алгебраического уравнения.*

Иногда используют универсальную тригонометрическую подстановку: $t = tg\,\frac{x}{2}$

$$\cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пусть $\sin x = t$, *где* $t \in [-1; 1]$, *тогда*

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2, \text{– не удовлетворяет условию } t \in [-1; 1] \\ t_2 = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$$

Ответ: $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в том, что произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом не теряют смысл:

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot \ldots = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \text{ или } g(x) = 0 \text{ или } h(x) = 0$$

и т.д. при условии существования каждого из сомножителей

$$\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\left(\cos x+\frac{2}{5}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x-\dfrac{1}{3}=0,\\[2ex] \cos x+\dfrac{2}{5}=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{3},\\[2ex] \cos x=-\dfrac{2}{5};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z\\[2ex] x=\pm\arccos\left(-\dfrac{2}{5}\right)+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z\\[2ex] x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{2}{5}\right)+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

Ответ : $(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n;\ \ \pm\left(\pi-\arccos\dfrac{2}{5}\right)+2\pi k;\ \ n,k\in Z.$

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени.

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad \Big| : \cos x$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ *называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени.*

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \quad \Big| : \cos^2 x$$

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную $\mathrm{tg}\,x = t$ *и решаем методом замены переменной.*

Если в данном уравнении $a = 0$ *или* $c = 0$ *то, уравнение решается методом разложения на множители.*

$$2\sin x - 3\cos x = 0 \quad \Big| : \cos x$$

$$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$2tgx - 3 = 0$$

$$tgx = \frac{3}{2}$$

$$x = arctg\,\frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\textit{Ответ}\ :\ arctg\,\frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

С помощью тригонометрических формул

1. Формулы сложения:

$$sin(x + y) = sinx\,cosy + cosx\,siny$$

$$sin(x - y) = sinx\,cosy + cosx\,siny$$

$$cos(x + y) = cosx\,cosy - sinx\,siny$$

$$cos(x - y) = cosx\,cosy + sinx\,siny$$

$$tg(x + y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx\,tgy}$$

$$ctg(x + y) = \frac{ctgx\,ctgy - 1}{ctgy + c\,tgx}$$

$$tg(x - y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx\,tgy}$$

$$ctg(x - y) = \frac{ctgx\,ctgy + 1}{ctgy - c\,tgx}$$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 \qquad \Big| : 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$$

Заметим, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, *тогда*

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

С помощью тригонометрических формул

2. Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t$$

$$\sin(\pi \pm t) = \mp \sin t \qquad \cos(\pi \pm t) = -\cos t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$$

$$\sin(2\pi \pm t) = \pm \sin t \qquad \cos(2\pi \pm t) = \cos t$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp ctg t \qquad ctg\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp tg t$$

$$tg(\pi \pm t) = \pm tg t \qquad ctg(\pi \pm t) = \pm ctg t$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp ctg t \qquad ctg\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp tg t$$

$$tg(2\pi \pm t) = \pm tg t \qquad ctg(2\pi \pm t) = \pm ctg t$$

С помощью тригонометрических формул

3. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$

$$\sin 4x - \cos 2x = 0$$

$$2\sin 2x \boxed{\cos 2x} - \boxed{\cos 2x} = 0$$

$$\boxed{\cos 2x}(2\sin 2x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ 2\sin 2x - 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \\ 2x = (-1)^k \arcsin \dfrac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z \\ x = (-1)^k \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$\text{Ответ}: \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z; \quad (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

С помощью тригонометрических формул

4. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+\sin 2\alpha$$

5. Формулы половинного угла:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

С помощью тригонометрических формул

6. Формулы суммы и разности:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$ctg\,\alpha + ctg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$ctg\,\alpha - ctg\,\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

С помощью тригонометрических формул

7. Формулы произведения:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$